

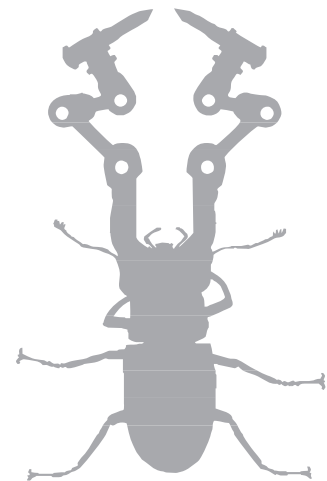


UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Mecanismes i màquines →
Exercicis resolts

Carles Riba Romeva



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecanismes i màquines →
Exercicis resolts

Carles Riba Romeva

Primera edició: setembre de 2019

© Carles Riba Romeva, 2019

© Iniciativa Digital Politècnica, 2019
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edifici K2M, Planta S1, Despatx S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

ISBN: 978-84-9880-766-0

DL: B 18512-2019

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.



Introducció

Els materials reunits en aquest text són una col·lecció de qüestionaris i d'exercicis resolts sobre sistemes mecànics, mecanismes i màquines procedents de matèries impartides per l'autor a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) durant les dues darreres dècades, concretament a les assignatures Mecanismes i Màquines, d'Enginyeria Industrial, i Disseny de Sistemes Mecànics, del Grau en Enginyeria Química.

La primera d'aquestes assignatures fou el resultat de la partició, arran de la implantació del Pla de 1994 que preveia una estructura per quadrimestres, de l'assignatura anual Cinemàtica i Dinàmica de Màquines en dues assignatures quadrimestrals: Teoria de Màquines, de caràcter més fonamental, i Mecanismes i Màquines, amb les matèries més properes a la pràctica industrial. Aquesta darrera matèria va impulsar l'autor a publicar, als anys 1999 i 2000, una trilogia de textos (referenciats a la bibliografia) sota el títol comú de *Mecanismes i màquines*, amb els subtítols següents: *I. El frec en les màquines*; *II. Transmissions d'engranatges*; *III. Dinàmica de màquines*.

L'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics fou impartida durant els anys 2011 a 2016 al Grau en Enginyeria Química de l'ETSEIB, a cada quadrimestre. Malgrat la denominació oficial ("Disseny"), la matèria s'orientava a proporcionar als futurs professionals de l'enginyeria química els coneixements bàsics sobre els equips i els sistemes mecànics. Es van elaborar uns breus documents introductoris sobre *Components de màquines* i *Vibracions mecàniques*, que s'inclouen als capítols corresponents.

Aquest text s'organitza en cinc capítols: 1. Components de màquines; 2. Vibracions mecàniques; 3. Motorització de màquines; 4. Mecanismes de frec, i 5. Dinàmica de màquines. Els tres primers procedeixen de l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics i els dos darrers, de Mecanismes i Màquines.

Cada un dels capítols consta d'una introducció breu, on s'expliciten els conceptes, les metodologies i les bases de càlcul sobre les matèries corresponents, d'un qüestionari (extrets d'exàmens) amb les seves respostes, i d'uns exercicis (provinents també d'exàmens) amb les seves solucions.



Aquest text vol anar més enllà de proposar simplement una exercitació pràctica de les matèries que s'hi tracten. Molts dels temes s'inspiren en casos reals, sorgits de projectes de col·laboració universitat-empresa realitzats en el marc del Centre de Disseny d'Equips Industrials de la Universitat Politècnica de Catalunya (CDEI-UPC), del qual l'autor ha estat director des que es va crear l'any 1999 fins al 2017, any de la seva jubilació professional. Per tant, aquests exercicis també volen exemplificar solucions que s'han implementat en la pràctica industrial.



Índex

Introducció	5
Índex	7
1. Elements de màquines	11
1.1 Elements de màquines: introducció	11
1.1.1 Tipus d'elements de màquines i de fallades de les màquines	11
1.1.2 Exemples d'elements de màquines	13
1.1.3 Fallades en les màquines	17
1.1.4 Exemples de fallades en les màquines	20
1.2 Elements de màquines: qüestionari	21
2. Vibracions mecàniques	27
2.1 Vibracions mecàniques: introducció	28
2.1.1 Sistema massa-molla	28
2.1.2 Efecte combinat de dues o més molles	33
2.2 Vibracions mecàniques: qüestionari	37
2.3 Vibracions mecàniques: exercicis	40
2.3.1 Vibracions en una màquina amb un motor elèctric desequilibrat	40
2.3.2 Identificació dels paràmetres d'un sistema vibratori	41
2.3.3 Vibració torsional d'un sistema	42
2.3.4 Llit elàstic	43
2.3.5 Centrifugadora flotant d'eix horitzontal	45
2.3.6 Vibracions en el sistema cable-càrrega d'una grua	46
2.3.7 Vibració causada per un motor elèctric desequilibrat	47
2.3.8 Aïllament de vibracions	47
2.3.9 Mesurament i identificació dels paràmetres d'un sistema vibratori	48
2.3.10 Tres sistemes vibratoris sobre una mateixa base	49
2.3.11 Sistema sintonitzable a una freqüència	51
2.3.12 Suspensió d'una màquina	52
2.3.13 Dimensionament d'un sistema de massa sísmica	53
2.3.14 Taula vibradora	54
2.3.15 Rentadora domèstica amb grup flotant	56
2.3.16 Combinacions de masses i molles	57



3. Motorització de màquines	59
3.1 Motorització de màquines: introducció	60
3.1.1 Conceptes	60
3.1.2 Motorització	63
3.2 Motorització de màquines: qüestionari	65
3.3 Motorització de màquines: exercicis	70
3.3.1 Accionament d'una grua	70
3.3.2 Accionament d'un agitador	72
3.3.3 Motorització d'un carretó de magatzem	73
3.3.4 Ventilador	75
3.3.5 Grua	76
3.3.6 Vehicle sobre rails	77
3.3.7 Arrencada d'un ventilador	77
3.3.8 Tren de carbó	80
3.3.9 Cinta transportadora inclinada	82
3.3.10 Escala mecànica	83
3.3.11 Potència necessària en un camió	85
3.3.12 Arrossegament d'una caixa per un pendent	88
3.3.13 Accionament d'un reactor químic	90
3.3.14 Arrossegament d'un vagoneta en pendent	91
3.3.15 Bomba centrífuga	92
4. Mecanismes de frec	95
4.1 Mecanismes de frec: qüestionari	96
4.2 Mecanismes de frec: exercicis	98
4.2.1 Solucions alternatives d'embragatge	98
4.2.2 Sistema de banda plana sobre múltiples corrons	100
4.2.3 Efecte de femella i contrafemella	102
4.2.4 Camí de corrons	103
4.2.5 Fre centrífug de dues sabates	106
4.2.6 Autoretenició en un mecanisme de corredora	109
4.2.7 Transmissió de corretja plana	112
4.2.8 Fixació axial per rosca i tres mordasses	115
4.2.9 Transmissió de corretja trapezial-plana	118
4.2.10 Autoretenició en un seguidor de lleva	121
4.2.11 Disseny preliminar d'un embragatge multidisc	123
4.2.12 Tamboret d'altura regulable per rosca	123
4.2.13 Limitador de parell multidisc	125
4.2.14 Pinça d'autosubjecció	127
4.2.15 Pany de "tanca de cop"	130
4.2.16 Fre centrífug	133
4.2.17 Tascó per esberlar pedres	137
4.2.18 Dues màquines elèctriques enllaçades per un embragatge centrífug	139
4.2.19 Adherència d'una cinta sobre una barra	141
4.2.20 Embragatge i fre d'una premsa de volant	143
4.2.21 Cadell de retenció per fre	146
4.2.22 Frenada de bicicleta	148
4.2.23 Frens de tramvia	151
4.2.24 Autoretenició en una guia pel bloqueig d'un corró	155

4.2.25	Sistema d'arrossegament d'una banda	158
4.2.26	Corredora de cortina.....	160
4.2.27	Moviment de banda.....	163
5.	Dinàmica de màquines	167
5.1	Dinàmica de màquines: qüestionari.....	168
5.2	Dinàmica de màquines: exercicis	177
5.2.1	Equilibrament d'un mecanisme	177
5.2.2	Automòbil de joguina amb volant d'inèrcia	180
5.2.3	Capçal giratori de rebordonar	182
5.2.4	Fallada del fre de retenció d'un ascensor.....	184
5.2.5	Moment d'inèrcia reduït d'un motor monocilíndric	187
5.2.6	Moment d'inèrcia reduït d'un motor tricilíndric.....	189
5.2.7	Portes d'un vagó de ferrocarril metropolità.....	190
5.2.8	Taula giratòria amb estacions de treball	193
5.2.9	Politja desequilibrada.....	195
5.2.10	Motor compacte de quatre cilindres en línia.....	197
5.2.11	Dinàmica d'una premsa de volant	199
5.2.12	Rotor trossejador de pales.....	200
5.2.13	Dinàmica d'un carretó elevador (o toro mecànic)	203
5.2.14	Equilibrament de rotor de motor elèctric asíncron.....	205
5.2.15	Desfrenada i caiguda d'un ascensor amb contrapès.....	207
5.2.16	Dinàmica d'una màquina tupí de fusteria	209
5.2.17	Equilibrament d'un motor tricilíndric	211
5.2.18	Dinàmica d'un martell de piló	214
Bibliografia	219

→ 1



Elements de màquines

Aquest capítol prové de l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics del Grau en Enginyeria Química, que l'autor va impartir a l'ETSEIB del 2011 al 2016, adreçada a futurs professionals de l'enginyeria química relacionada amb els equips i els sistemes mecànics.

Un dels aspectes més necessaris de tractar en un curs com aquest és el coneixement dels principals elements de les màquines, la seva denominació, descripció i funció, i alhora disposar d'una informació bàsica sobre els principals tipus de deteriorament i de fallada d'aquests elements. Aquest és l'objectiu del present capítol, que s'organitza en dues seccions: 1.1. Elements de màquines: introducció, i 1.2. Elements de màquines: qüestionari.

La documentació de la introducció prové d'un material preparat per a l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics, mentre que el qüestionari sorgeix dels diferents exàmens que s'hi han plantejat durant aquests anys.

Concretament, les preguntes del qüestionari provenen dels exàmens següents: les qüestions 1.2.1 a 1.2.3, de l'examen de juny del 2012; de la 1.2.4 a la 1.2.6, de novembre del 2012; la 1.2.7, d'abril del 2013; de la 1.2.8 a la 1.2.10, de novembre del 2013; de la 1.2.11 a la 1.2.13, de juny del 2014; la 1.2.14 i la 1.2.15, de novembre del 2015; la 1.2.16 i la 1.2.17, de gener del 2016, i la 1.2.18 i la 1.2.19, de juny del 2016.

1.1 Elements de màquines: introducció

1.1.1 Tipus d'elements de màquines i de fallades de les màquines

Elements de màquines segons la funció

Suport

Suporten forces sense moviments (o amb moviments perpendiculars a les forces). En general, constitueixen els elements de base: bancades (on predomina la rigidesa), bastidors (on predomina la resistència) i carcasses (que acullen mecanismes en un espai tancat i els preserven d'intrusions exteriors i/o n'asseguren l'estanquitat).

Transmissió

Transmeten forces en la direcció dels moviments (per tant, produeixen intercanvis d'energia): elements motors (transformen un vector energètic en energia mecànica en un



eix), transmissions (adeqüen l'energia dels eixos motors a la dels eixos receptors) i elements de suspensió (suporten masses de forma flexible)

Unió

- *Unions mòbils*: coixinets i rodaments (guiatge angular), guies lineals lliscants i de rodolament (guiatge lineal), elàstiques (permeten moviments per deformació elàstica) i mecanismes (poden fer funcions de guiatge complex).
- *Unions fixes*: unions cargolades i d'alta resistència (unions fortes, desmuntables); adhesius, unions de deformació permanent, soldadures (unions fortes, no desmuntables); ecliquetatges, adhesius reversibles (unions febles, fàcilment desmuntables); encaixos (unions per confinament geomètric, fàcilment desmuntables).

Fallades de les màquines

Definició

Una fallada consisteix en una sèrie de canvis en un element o en un sistema que impliquen la pèrdua de la seva capacitat per acomplir la funció encomanada o per realitzar-la de forma adequada. En alguns casos, aquesta pèrdua es produeix de forma sobtada (ruptura per sobrecàrrega, deformació elàstica excessiva) i, en d'altres, és conseqüència d'un deteriorament progressiu en el temps (fatiga, corrosió).

Causes

- *Per deformació* (en general, excessiva). Pèrdua de la geometria adequada dels components: deformació elàstica (momentània, a causa de sobrecàrregues), deformació plàstica, viscoelàstica, per fluència amb el temps (permanent en el temps).
- *Per ruptura*: dúctil (deformació plàstica important abans de la ruptura), fràgil (sobtada, pràcticament sense deformació prèvia), per fatiga (després d'una reducció de la superfície resistent com a conseqüència de nombroses càrregues repetides; té l'aspecte d'una ruptura fràgil).
- *Deterioraments superficials*. Pèrdua de propietats lliscants (deteriorament de la capa superficial, fallada del lubricant); pèrdua de material (desgast, corrosió, cavitacions); fatiga superficial (picat); gripatge (microsoldadures i esquinçament de la superfície).

Caràcter

- *Fallada parcial*. Disminució de la capacitat d'un sistema per fer la seva funció sense detenir-l, o disminució de la qualitat en la realització de la seva funció.
- *Fallada intermitent*. Fallada parcial que es presenta en determinades condicions, especialment per sobrecàrrega. Si no es corregeix, acaba conduint a una fallada total.
- *Fallada total*. Fallada que interromp totalment la funció del sistema i obliga a una reparació (o substitució).
- *Fallada catastròfica*. Fallada total que comporta danys a altres equips o a persones. El temps i el cost de reparació estan fora dels previstos per l'empresa.
- *Fallada d'aparença*. Fallada que no afecta el funcionament de l'equip però sí la seva aparença normal. És important en els serveis públics.

1.1.2 Exemples d'elements de màquines




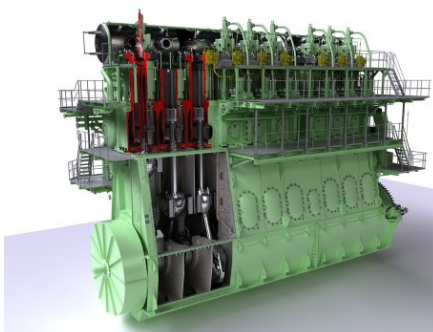
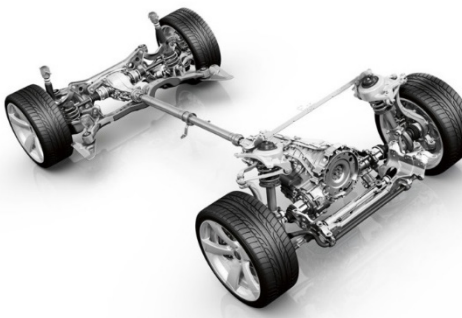

Figura 1. Elements de suport i de transmissió	
	
<p>Bancada de màquina</p>	<p>Bastidor de motocicleta</p>
	
<p>Carcassa de reductor</p>	<p>Motor marí</p>
	
<p>Transmissió d'un vehicle de 4 rodes</p>	<p>Suspensió de centrifugadora</p>

Figura 2. Elements de guiatge angular i lineal



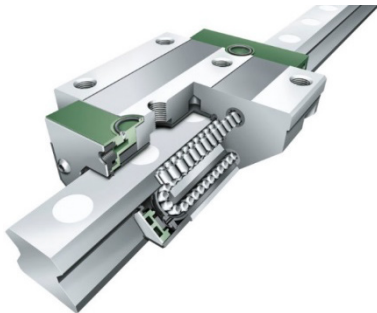
a) Coixinets de fricció de bronze



b) Coixinets de fricció multicapa



c) Rodaments de diferents tipus i ròtula



d) Guia lineal de recirculació de corrons



e) Guia lineal amb corrons guia

Figura 3. Unions cargolades (desmuntables)



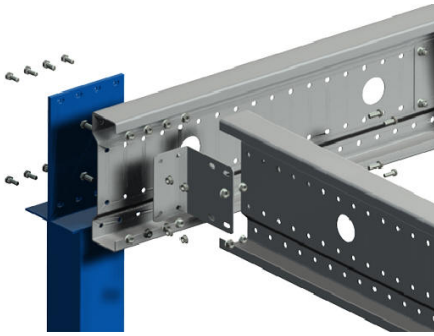

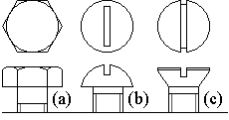
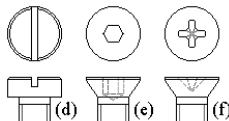
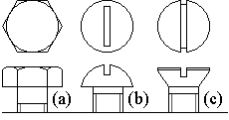
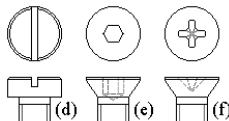








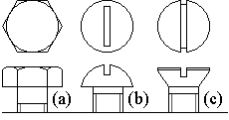
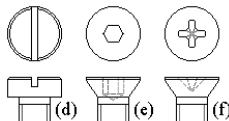





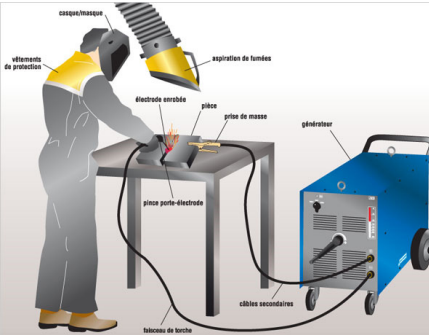
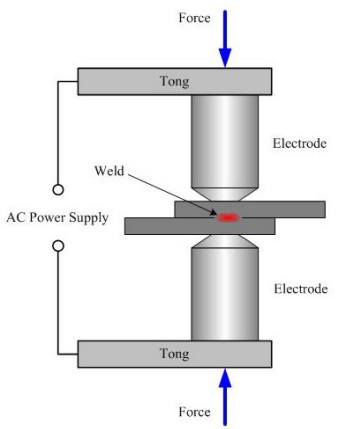
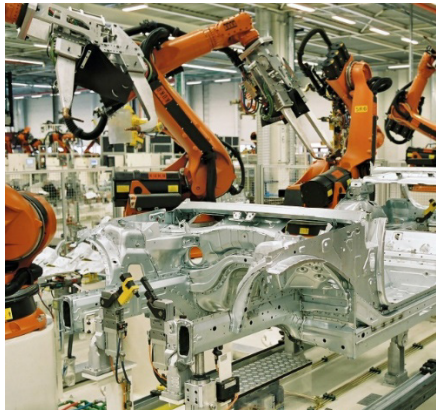
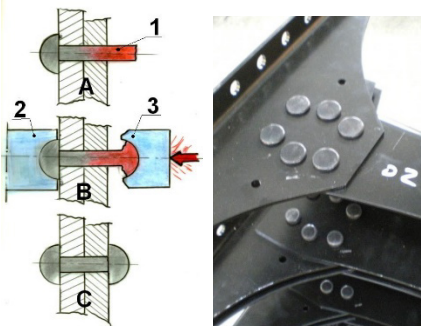
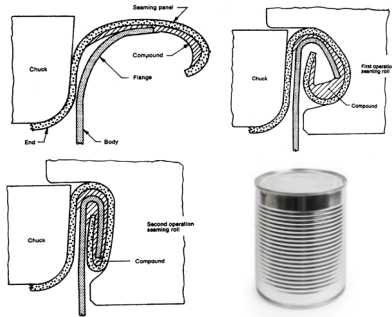
													
<p>a) Cargols femelles i volanderes</p>	<p>b) Cargols de fusta</p>												
													
<p>c) Estructura cargolada</p>	<p>d) Espàrrecs d'unió de la culata d'un motor</p>												
<table border="0"> <tr> <td data-bbox="239 1068 468 1186">  </td> <td data-bbox="505 1068 682 1212"> <p>Formes Hexagonal (a) Rodona (b) Avellanada (c, e, f) Cilíndrica (d)</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="239 1252 468 1371">  </td> <td data-bbox="505 1241 682 1386"> <p>Subjecció Clau fixa, anglesa (a) Tornavis (b, c, d) Clau Allen (e) Tornavis estrella (f)</p> </td> </tr> </table>		<p>Formes Hexagonal (a) Rodona (b) Avellanada (c, e, f) Cilíndrica (d)</p>		<p>Subjecció Clau fixa, anglesa (a) Tornavis (b, c, d) Clau Allen (e) Tornavis estrella (f)</p>	<table border="0"> <tr> <td data-bbox="708 1094 968 1149">  </td> <td data-bbox="1011 1112 1096 1138"> <p>Clau fixa</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="708 1186 953 1234">  </td> <td data-bbox="1011 1186 1110 1212"> <p>Clau de tub</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="708 1278 939 1345">  </td> <td data-bbox="1011 1267 1116 1293"> <p>Claus Allen</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="708 1382 953 1445">  </td> <td data-bbox="1011 1345 1125 1371"> <p>Clau anglesa</p> </td> </tr> </table>		<p>Clau fixa</p>		<p>Clau de tub</p>		<p>Claus Allen</p>		<p>Clau anglesa</p>
	<p>Formes Hexagonal (a) Rodona (b) Avellanada (c, e, f) Cilíndrica (d)</p>												
	<p>Subjecció Clau fixa, anglesa (a) Tornavis (b, c, d) Clau Allen (e) Tornavis estrella (f)</p>												
	<p>Clau fixa</p>												
	<p>Clau de tub</p>												
	<p>Claus Allen</p>												
	<p>Clau anglesa</p>												
<p>c) Cabotes de cargols</p>	<p>c) Claus</p>												

Figura 4. Unions no desmuntables

	
<p>a) Bancada soldada</p>	<p>b) Operació i equip de soldadura</p>
	
<p>c) Principi de la soldadura per punts</p>	<p>d) Robots amb pinces de soldadura per punts</p>
	
<p>e) Reblonat i unió reblonada</p>	<p>f) Unió per deformació en una llauna</p>

1.1.3 Fallades en les màquines

Deformació

És qualsevol canvi de mida o de forma d'un element o d'una peça d'una màquina a causa d'esforços que s'hi apliquen o de la dilatació tèrmica deguda a canvis de temperatura.

Deformació elàstica (o reversible)

Mode de deformació en què la peça o l'element recupera la seva forma i les seves dimensions originals després de retirar els esforços exteriors que l'han provocada.

Deformació plàstica (irreversible)

Mode de deformació en què el material no torna a la seva forma original després de retirar-ne la càrrega aplicada.

En general, una deformació excessiva (plàstica o elàstica) sol representar una fallada en les màquines (excepte en les molles). Les deformacions plàstiques excessives poden comportar deficiències en la funcionalitat, falta de precisió, elements que intersequen o, simplement, mal efecte visual. Les deformacions plàstiques, a més, comporten la pèrdua permanent de les formes i les dimensions dels elements de les màquines.

Ruptura

La ruptura és la separació d'una peça o component en dues o més parts a causa de sotmetre-la a esforços intensos o a xocs. En general, les fractures es poden classificar en fràgils i dúctils segons que la deformació permanent prèvia sigui inferior o superior al 5%.

Ruptura fràgil

Es dona en materials fràgils i es caracteritza pel fet que, quan les tensions del material sobrepassen un lílindar determinat (la resistència a la ruptura), es produeix una ràpida propagació de les fissures i la ruptura del material sense pràcticament cap deformació prèvia.

Per tant, és una ruptura sobtada i sense avís previ, que pot resultar catastròfica. La major part dels materials esdevenen fràgils a baixa temperatura i dúctils a alta temperatura, si bé cadascun d'ells ho fa a una temperatura diferent.

Ruptura dúctil

Es dona en materials dúctils i es caracteritza perquè, abans separar-se'n les parts, es produeix una deformació plàstica important. A mesura que la deformació plàstica augmenta, es van exhaurint les possibilitats de noves deformacions i, finalment, es produeix una ruptura semblant a la fràgil. En alguns casos, es produeix una gran deformació plàstica sense ruptura.

La ruptura dúctil sol ser menys catastròfica que la fràgil, ja que se solen produir deformacions plàstiques visibles molt abans d'arribar a la separació de les parts.



Ruptura per fatiga

Ruptura d'un element o peça després de la repetició d'un gran nombre de cicles (de milers a milions) d'esforços variables a tensions molt inferiors a la que podria suportar el material sota tensió estàtica (a la resistència a la ruptura i, també, al límit elàstic).

La fatiga es relaciona amb el creixement cap a l'interior, a cada nou cicle de càrrega, de les fissures originades a la superfície del material, sense pràcticament deformació plàstica. Finalment, quan la secció resistent és massa petita, es produeix una ruptura fràgil de la secció que resta.

La secció de les peces trencades per fatiga presenta dues zones característiques: la zona fissurada en el temps, llisa i brillant, brunyida per petits desplaçaments entre les parts, i la zona d'estructura fibrosa i de cristalls grans, corresponent a la ruptura (fràgil) de la secció que queda finalment.

Sol ser una ruptura sobtada que pot esdevenir catastròfica i induir importants desperfectes a les màquines i, fins i tot, provocar danys a les persones. Normalment, la disminució progressiva de la superfície resistent no es pot percebre fins a la ruptura si no és amb mitjans sofisticats (mesuraments amb ultrasons, líquids fluorescents).

Hi ha nombroses circumstàncies que empitjoren la ruptura per fatiga com ara les superfícies rugoses, els canvis bruscs de secció i les entalles, certs tractaments tèrmics o la corrosió. En general, en la fatiga els esforços de tracció són més perjudicials que els de compressió.

Fluència sota càrrega

És la deformació plàstica progressiva (fins a la ruptura) que té lloc quan una peça o un component a alta temperatura se sotmet a una càrrega constant i durant un període de temps llarg.

El llindar entre *alta temperatura* (per sobre de la qual la fluència sota càrrega és significativa) o *baixa temperatura* (per sota de la qual és poc significativa) depèn dels materials. Així doncs, a temperatura ambient, la major part dels plàstics ja se situen a alta temperatura, mentre que aquest llindar per als aluminis se situa entre 100 i 150 °C i, per als acers, entre 400 i 500 °C.

Aquesta característica és important en peces de plàstic sotmeses a tensions permanents (algunes unions forçades, que es poden relaxar) o en els materials per a calderes sotmeses a elevades pressions i temperatures (que poden acabar explotant) o en els rotors de turbines de vapor o de gas (en què els àleps sotmesos a les forces centrífugues poden acabar fregant amb la carcassa).

Fallades superficials

Les màquines es caracteritzen perquè tenen elements mòbils entre si, fet que pressuposa contactes mòbils entre superfícies de peces que exerceixen forces importants entre elles. Aquests contactes poden ser superficials (*contacte lliscant*), lineals o puntuals. Entre



aquests darrers, hi ha el *contacte rodolant*, amb elements rodolants interposats (rodaments, guies lineals), i el *contacte rodolant-lliscant* (propri de les lleves i dels engranatges).

Els comportaments són molt diferents: en el contacte lliscant (superficial), les pressions de contacte són baixes però les forces de freg són elevades, mentre que, en el contacte rodolant (teòricament, lineal o puntual), les pressions de contacte són molt elevades, mentre que les forces de freg són molt baixes (de 10 a 100 cops menys). Els deterioraments principals del contacte lliscant són el *desgast*, el *gripatge* i la *pèrdua de propietats lliscants*, mentre que, en el contacte rodolant, són el *picat* (o *fatiga superficial*) i la *deformació plàstica*. En el contacte rodolant-lliscant, es poden donar tots els tipus de deteriorament.

Desgast, gripatge, pèrdua de propietats lliscants

El *desgast* és l'erosió del material que experimenta la superfície d'un element respecte al seu estat original, causada per l'acció d'una altra superfície. El desgast depèn de cada parella de materials en contacte i de la lubricació. El lliscament acer-acer sense lubricació comporta un desgast elevat.

El *gripatge* és l'enferritjament entre dues superfícies en contacte i en moviment relatiu, causat per una temperatura excessiva i degut a unes males condicions de funcionament i/o de greixatge.

La *pèrdua de propietats lliscants* sol ser deguda al deteriorament de la capa superficial del material i pot comportar el mal funcionament de la màquina quan el coeficient de lliscament és crític.

Picat per fatiga superficial i deformació plàstica de la superfície

El *picat per fatiga superficial* és un deteriorament de les superfícies sotmeses a fortes càrregues repetitives en els contactes rodolant i rodolant-lliscant (rodaments, guies lineals, lleves, engranatges), que consisteix en l'aparició progressiva de pics (o petits forats) a les superfícies. El mecanisme de formació dels pics és semblant al de la ruptura per fatiga i és conseqüència de l'avanç de les fissures superficials sota les fortes tensions fins a formar els pics (semblants als clots de la carretera).

La *deformació plàstica* superficial (o *indentació*) consisteix en un enfonsament permanent d'una part de la superfície, causat per una sobrepressió per acció d'un element sobre l'altre. Aquesta deformació plàstica deteriora el funcionament posterior del sistema; per exemple, en la pista d'un rodament, provoca un petit salt a cada pas de bola.

1.1.4 Exemples de fallades en les màquines

Figura 5. Fallades	
	
a) Corrosió	b) Desgast dels flancs de les dents
	
c) Ruptura d'una dent d'un engranatge	d) Ruptura d'un ganxo per fatiga a flexió
	
e) Picat a la pista i als corròns d'un rodament	f) Picat a les dents d'una roda dentada

1.2 Elements de màquines: qüestionari

1. Funció d'un rodament de boles en una màquina i diferència amb un coixinet de fricció

Els rodaments de boles fan la funció de suportar els eixos giratoris de les màquines. Els coixinets de fricció fan la mateixa funció que els rodaments, però basant-se en uns principis de funcionament diferents:

Els rodaments es basen en el rodolament d'elements rodolants (boles o corrons) entre dues pistes solidàries amb les parts que giren.

Els coixinets de fricció es basen en el lliscament entre les parts (eix i allotjament), sovint amb un material interposat (lubricant o capa sòlida de fricció solidària amb una de les parts), amb l'objectiu de disminuir-ne la fricció.

2. Dues propietats superficials dels materials i els seus efectes en les màquines

Exemples: 1. La facilitat de lliscament (avaluada pel coeficient de fricció); 2. La resistència al desgast.

La facilitat de lliscament (coeficient de fricció baix) és important en els contactes lliscants entre les parts en què cal facilitar-ne el moviment relatiu amb les dissipacions mínimes. És el cas, per exemple, dels coixinets de fricció, les guies lineals de lliscament o les rosques.

La resistència al desgast és important a les superfícies en contacte lliscant per tal d'evitar que s'arrenqui material de les superfícies: les peces poden agafar jocs per variació de la seva geometria, o bé les superfícies es tornen aspres i perden les propietats lliscants.

3. Quan es pot produir una ruptura per fatiga? És una fallada fàcil de detectar abans que es produeixi?

Als materials (tant dúctils com fràgils), es produeix una ruptura per fatiga quan són sotmesos repetidament a esforços fluctuants per sota del seu límit elàstic o de la resistència a la ruptura. Aquesta oscil·lació de les tensions fa avançar les microfissures presents al material, que disminueixen la secció resistent fins que ja no és suficient i la peça es trenca, amb una ruptura d'aparença fràgil (sense pràcticament deformació plàstica), de forma sobtada i catastròfica.

En general, és una fallada molt difícil de detectar ja que la fissura avança per l'interior del material i no es manifesta exteriorment. En tot cas, es pot detectar amb sistemes complexos i costosos, com ara líquids fluorescents, o mesuraments amb ultrasons.

4. Avantatge d'un rodament enfront d'un coixinet de fricció

L'avantatge principal d'un rodament respecte a un coixinet de fricció és que les pèrdues per fricció hi són molt menors: entre 10 i 100 vegades menys.



Això és especialment important en aquells sistemes en què el moviment és continu i té una velocitat elevada. Per exemple, el capçal d'una màquina eina o les rodes d'un automòbil. Aquest aspecte es percep especialment en el suport de les rodes d'una bicicleta, accionades per a força humana.

5. Es produeix fatiga en el cable d'una grua?

Sí. Per dos motius:

- a.* Durant el cicle de funcionament, hi ha moments en què el cable suporta la càrrega i altres moments en què no. És una fatiga per les variacions de tracció sobre el cable.
- b.* A l'entrada i a la sortida del cable, en l'enrotllament sobre el tambor, el cable passa d'una configuració recta a una configuració corba, i viceversa: és una fatiga causada per la flexió del cable, que se superposa a l'anterior.

6. Què és el desgast i què és el que el produeix?

El desgast és la pèrdua progressiva de matèria d'una superfície que està sotmesa a fricció amb una altra. Això dona lloc a diversos deterioraments:

- a)* Canvi de les dimensions de la peça, que pot fer augmentar els jocs entre les peces i provocar falles en el guiatge o repiqueteig en el seu funcionament.
- b)* Pèrdua de les propietats lliscants entre les superfícies. En alguns casos, aquest deteriorament pot generar l'augment dels freds (i de la dissipació) o l'autoretenció en sistemes que inicialment funcionaven correctament.

7. Quin tipus de rodament permet el gir d'un ganxo de grua, radial o axial?

L'eix de gir d'un ganxo és vertical i coincideix amb la direcció de la força transmesa, sempre en la direcció del pes; per tant, cal un rodament axial.

El rodament axial se sol acompanyar d'uns rodaments radials auxiliars per tal d'assegurar-ne el guiatge radial (no assegurat pel primer), però pràcticament no transmeten forces.

8. En quines aplicacions faríeu servir un rodament en comptes d'un coixinet de fricció, i en quines no?

En aquelles aplicacions en què la pèrdua de rendiment o la dissipació d'energia siguin fonamentals.

Per exemple, en aquelles màquines que funcionen a alta velocitat i en què les forces als suports (rodaments) són elevades. Per exemple, en els reductors d'engrenatges, en les rodes dels vehicles o en els capçals de les màquines eines.

Una aplicació especial és la bicicleta, en què l'energia procedeix de l'esforç humà. Durant el seu primer desenvolupament al segle XIX, moltes de les patents de les bicicletes feien referència als antecedents dels rodaments.

No són necessaris els rodaments (i se solen usar coixinets de fricció) en mecanismes de moviments limitats, com una frontissa de porta, o amb petites implicacions de potència, com ara els micromotors.

9. Fallades principals que es poden produir en un coixinet de fricció

Les fallades principals es relacionen amb el desgast i la pèrdua de les propietats lliscants.

El desgast és la pèrdua de material de la superfície per l'acció abrasiva entre les superfícies, que amplifica els jocs, els repiqueteigs i la pèrdua de precisió de les màquines.

La pèrdua de les propietats lliscants provoca l'augment de la fricció, la pèrdua de rendiment i l'escalfament fins arribar, en alguns casos, a la fosa dels materials i al gripatge.

10. Com es pot reconèixer que la secció d'una peça s'ha trencat per fatiga?

Una secció que s'ha trencat per fatiga presenta un aspecte característic: una o més zones perifèriques de la secció s'han anat fissurant al llarg del temps i s'han brunyit amb els petits moviments relatius causats per les càrregues successives.

Hi ha una zona central d'aspecte rugós (com les fractures fràgils) que és la darrera secció encara resistent que es trenca en la ruptura per fatiga.

11. Avantatges i inconvenients d'una unió cargolada enfront d'una unió soldada

L'avantatge principal d'una unió cargolada davant d'una unió soldada és que és desmuntable. A més, permet un posicionament més precís entre les parts que es volen unir per mitjà d'elements de referència.

En canvi, l'inconvenient principal de les unions cargolades és el cost (dels cargols i les femelles, dels forats i els roscats previs, i de la pròpia operació de cargolar).

D'altra banda, per mitjà d'una soldadura, és més fàcil fer unions estanques i sense ressalts.

12. Deterioraments principals dels rodaments

El deteriorament més freqüent en els rodaments que funcionen en condicions adequades de càrrega i lubricació és el picat per fatiga superficial. És un deteriorament progressiu que es manifesta a través d'un soroll creixent amb el pas dels elements rodolants sobre els pics de les pistes.

Els rodaments també poden experimentar altres deterioraments, com ara la indentació (o deformació plàstica de les pistes de rodament) o la ruptura de boles o corrons, a causa de sobrecàrregues, o el gripatge (la creació de microsoldadures i el seu esquinçament posterior), a causa de temperatures excessives i la pèrdua del lubricant.



13. És el mateix una ruptura per fatiga que una ruptura fràgil?

La ruptura per fatiga es produeix després d'un gran nombre de cicles de càrrega variable a tensions inferiors al límit elàstic. És la conseqüència de l'avanç de les fissures superficials (en materials dúctils i fràgils) cap a l'interior fins que la secció romanent no és suficient i es produeix la ruptura. La secció final que se separa té l'aspecte d'una ruptura fràgil.

La ruptura fràgil convencional es produeix en materials fràgils a causa de sobrecàrregues més enllà del límit elàstic.

14. Un rodament ofereix més o menys resistència al gir que un coixinet de fricció? Argumenteu-ne la resposta.

Un rodament sempre ofereix una resistència al gir molt més baixa que un coixinet de fricció, normalment, entre 10 i 100 vegades inferior.

En general, aquest aspecte és el que justifica la major complexitat i el sobrepreu del rodament respecte del coixinet de fricció.

15. La ruptura per fatiga es produeix a tensions superiors o inferiors al límit elàstic del material?

La ruptura per fatiga es produeix a tensions substancialment inferiors al límit elàstic del material (de 2 a 8 vegades), després d'un nombre elevat de cicles de variació de la càrrega.

En canvi, en el càlcul a càrregues estàtiques en materials dúctils, es pren un coeficient de seguretat respecte al límit elàstic a fi d'evitar-ne les deformacions permanents i, en materials fràgils, el coeficient de seguretat es pren respecte a la resistència a la ruptura, a fi d'evitar aquesta ruptura.

Per tant, en els elements sotmesos a fatiga, cal fer el càlcul de la fatiga i aplicar-hi convenientment tots els coeficients correctors.

El fenomen de la fatiga va ser la gran sorpresa (i, alhora, el gran descobriment) durant la implantació del ferrocarril al segle XIX. En efecte, en girar, els eixos del ferrocarril estan sotmesos a una fatiga alternativa. Inicialment, es feia una comprovació estàtica amb una sobrecàrrega als vagons (per exemple, el doble de la nominal) i, si aguantaven, es donaven per bons. Tanmateix, després d'un nombre determinat d'hores de funcionament, molts eixos es trencaven.

Quan, cap al final del segle XIX, Whoooler col·loca un eix de ferrocarril en un banc d'assaig, hi observa clarament el fenomen de la fatiga (disminució del límit de ruptura per fatiga amb el nombre de cicles) i estableix les corbes que porten el seu nom, que són la base del mètode de càlcul de la fatiga.

16. És adequat posar rodaments a les frontisses de les portes d'un habitatge?

L'avantatge principal dels rodaments és la seva baixa fricció, aspecte especialment crític en moviments continus a altes velocitats; els seus principals inconvenients són el cost, la sensibilitat als sobreesforços i la lubricació.

En una frontissa de porta d'habitatge, el rendiment per a un moviment angular de 90° sol ser irrellevant; per tant, no justifica l'ús de rodaments.

En tot cas, en algunes portes molt pesades en altres circumstàncies, els rodaments poden ser útils per disminuir l'esforç necessari per a la seva obertura i tancament.

17. La ruptura per fatiga es produeix immediatament després d'aplicar-se la sol·licitació?

No. La fatiga és un fenomen que es produeix després d'un cert nombre de càrregues repetides.

El mecanisme de fatiga consisteix en la progressió de les fissures microscòpiques de la superfície cap a l'interior del material a cada nou cicle de càrrega fins que la secció resistent esdevé insuficient i es produeix la ruptura.

18. Per què un cargol de fixació no es descargola espontàniament?

Els cargols de fixació tenen un angle d'inclinació de filet molt gran, de manera que el pla inclinat equivalent entre el cargol i la rosca dóna lloc a la irreversibilitat: actuant axialment el cargol o la femella, l'altre element no gira en el sentit de desenroscar-se (auto retenció).

Per desfer la unió (desenroscar), cal exercir un parell en sentit contrari al de cargolar, a fi de vèncer la fricció del pla inclinat que formen els filets del cargol i la femella (o del cargol amb la peça sobre la qual està enroscada).

19. Els rodaments axial de boles tenen una pista de rodolament interior i una pista de rodolament exterior?

No. En els rodaments axials de boles, les dues pistes són iguals i suporten les boles axialment. Els rodaments amb una pista interior i una altra d'exterior són els rodaments radials (les pistes suporten les forces en aquesta direcció); els rodaments cònics i els rodaments de contacte angular (combinen càrregues radials i axials) també tenen una pista interior i una altra d'exterior.

→2



Vibracions mecàniques

Aquesta matèria s'ha ensenyat tradicionalment en diverses assignatures dels estudis superiors d'Enginyeria Industrial de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB). Entre d'altres, a Física, Mecànica, Cinemàtica i Dinàmica de Màquines, i també en assignatures específiques d'aquesta matèria.

En plantejar l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics del Grau en Enginyeria Química, l'autor va considerar que el coneixement bàsic de les vibracions mecàniques constituïa una matèria d'interès per als futurs professionals de la química, atesos els sistemes mecànics i els equips amb què hauran de treballar.

Entre les múltiples obres existents a la bibliografia sobre vibracions mecàniques, voldria destacar *Vibraciones* de Pedro Ramón Moliner (referenciada a la bibliografia final), per la claredat de la seva exposició i l'orientació a l'aplicació a les màquines, especialment pel que fa a l'aïllament de les vibracions.

La introducció prové d'un material preparat per a l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics, i el qüestionari i els exercicis provenen dels exàmens de l'assignatura plantejats durant els anys en què es va impartir (del 2011 al 2016).

El qüestionari de l'apartat 1.2 prové dels exàmens següents: les qüestions 2.2.1 a 2.2.3, de l'examen de gener de 2013; de la 2.2.4 a la 2.2.7, de juny del 2013; de la 2.2.8 a la 2.2.10, de gener del 2014; la 2.2.11, de gener del 2016, i la 2.2.12, de juny del 2016.

Els exercicis de l'apartat 1.2 prevenen dels exàmens següents: l'exercici 2.3.1, de l'examen de juny del 2012; el 2.3.2 i el 2.3.3, de gener del 2013; el 2.3.4, de la refosa dels exercicis de juny del 2013 i juny del 2015; el 2.3.5, de juny del 2013; el 2.3.6 i el 2.3.7, de gener del 2014; el 2.3.8 i el 2.3.9, juny del 2014; el 2.3.10 i el 2.3.11, de gener del 2015; el 2.3.12, de juny del 2015; el 2.3.13 i el 2.3.14, de gener del 2016, i el 2.3.15 i el 2.3.16, de juny del 2016.



2.1 Vibracions mecàniques: introducció

2.1.1 Sistema massa-molla

Vibració lliure

Sistema dinàmic, format per dos elements fonamentals:

- Un cos amb una massa m , que es pot desplaçar linealment.
- Un element elàstic de rigidesa K , que connecta la massa amb la base.

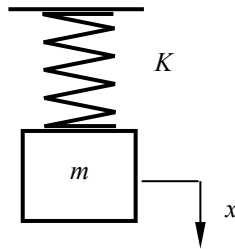
Si no hi intervenen forces exteriors ni dissipació, el moviment d'aquest sistema, x , es correspon amb l'equilibri entre la força d'inèrcia i la força elàstica.

La força d'inèrcia és el producte de la massa del cos per la seva acceleració.

La força elàstica és el producte de la rigidesa de l'element elàstic pel desplaçament des de la posició d'equilibri.

Per tant:

$$m \cdot x'' - K \cdot x = 0$$



Aquesta és una equació diferencial de segon grau en la variable desplaçament, x . Es temptegen solucions de tipus sinusoidal, amb les seves derivades:

$$x = X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$x' = -X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$x'' = -X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

En introduir aquestes expressions a l'equació del moviment, s'obté la freqüència pròpia del sistema, ω_0 :

$$m \cdot (-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + K \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t)) = 0$$

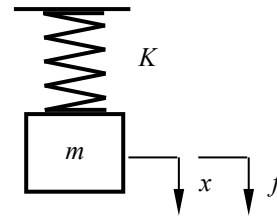
$$K - m \cdot \omega^2 = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{freqüència pròpia})$$

Vibració forçada per una força sinusoidal

El moviment del sistema massa–molla és forçat per una força sinusoidal f , de freqüència ω , que pot adoptar qualsevol valor (no necessàriament la freqüència pròpia, ω_0). L'equació diferencial del sistema serà:

$$m \cdot x'' + K \cdot x = f = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Aquesta és una equació diferencial de segon grau en la variable desplaçament, x . Es temptegen solucions de tipus sinusoidal, amb les seves derivades:

$$x = X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$x' = -X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$x'' = -X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

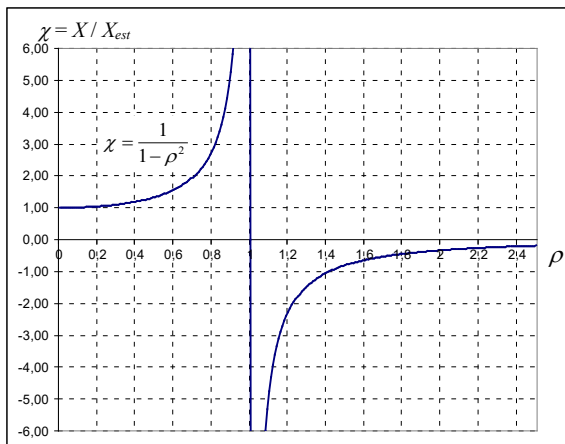
En introduir aquestes expressions a l'equació del moviment, se n'obté l'expressió de l'amplitud de moviment amb què respon al sistema, X , en funció de la freqüència a què s'excita, ω , i de l'amplitud de la força sinusoidal, F :

$$m \cdot (-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + K \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t)) = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$(K - m \cdot \omega^2) \cdot X = F$$

$$X = \frac{F}{K - m \cdot \omega^2} = \frac{F}{K} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = X_{est} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

El desplaçament estàtic, X_{est} , és el desplaçament de la molla sota l'efecte de l'amplitud de la força sinusoidal que s'hi aplica, F . Si s'adopten paràmetres adimensionals (amplitud reduïda, $\chi = X/X_{est}$, a les ordenades; freqüència reduïda, $\rho = \omega/\omega_0$, a les abscisses), la representació gràfica d'aquesta expressió és única (v. figura adjunta):



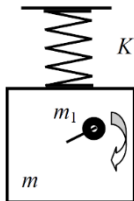
$$\chi = \frac{X}{X_{est}}$$

$$\rho = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\chi = \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Vibració forçada per una força d'inèrcia

A diferència del cas anterior, l'amplitud de la força excitadora no és constant, sinó proporcional al quadrat de la velocitat angular del rotor desequilibrat i, per tant, al quadrat de la freqüència angular. L'equació diferencial del sistema serà:



$$m \cdot x'' + K \cdot x = f = m_1 \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Aquesta és una equació diferencial de segon grau en la variable desplaçament, x . Es tempteja la mateixa solució de tipus sinusoidal que en el cas anterior.

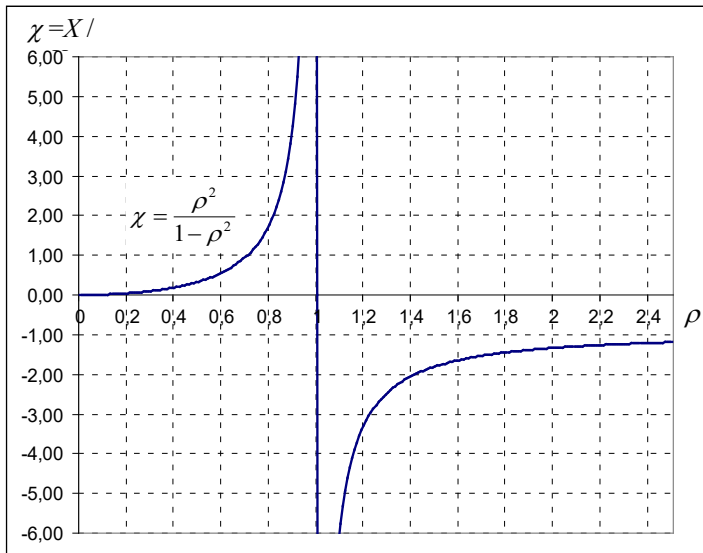
Quan s'introdueixen aquestes expressions a l'equació del moviment, proporcionen l'expressió de l'amplitud de moviment amb què respon al sistema en funció de la velocitat angular, ω , i de la massa giratòria m_1 .

$$((m + m_1) \cdot (-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + K \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t))) = (m_1 \cdot e) \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$(K - (m + m_1) \cdot \omega^2) \cdot X = (m_1 \cdot e) \cdot \omega^2$$

$$X = \frac{m_1 \cdot e \cdot \omega^2}{K - (m + m_1) \cdot \omega^2} = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot e \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ara, el desplaçament del moviment té un valor nominal que és l'excentricitat e de la massa rotatòria m_1 , multiplicada pel quocient entre la massa rotatòria i la massa total. Prenent paràmetres adimensionals (χ i ρ), la representació de l'expressió anterior també és única (v. figura adjunta):



$$X_0 = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot e$$

$$\chi = \frac{X}{X_0}$$

$$\rho = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{K}{m + m_1}}}$$

$$\chi = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

Vibració forçada per un moviment de base

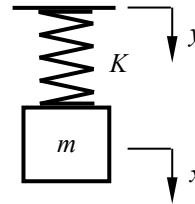
En aquest cas, el moviment vibratori s'excita per mitjà d'un moviment sinusoidal de la base y que, a través de la molla, indueix una força sinusoidal a la massa. El desplaçament de la base és:

$$y = Y \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

L'equació diferencial del sistema és:

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot (x - y) = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = K \cdot Y \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Es tracta novament d'una equació diferencial de segon grau en la variable desplaçament, x , i es tempteja la mateixa solució de tipus sinusoidal que en els casos anteriors.

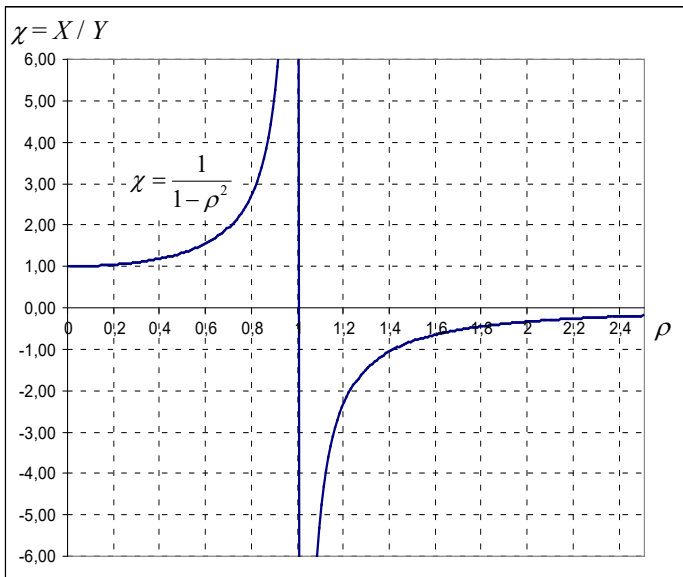
Si s'introdueixen aquestes expressions a l'equació del moviment, se n'obté l'amplitud de moviment amb què respon al sistema X , en funció de la freqüència a què s'excita, ω , i de l'amplitud de la força sinusoidal, F :

$$m \cdot (-X \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) + K \cdot (X \cdot \cos(\omega \cdot t)) = K \cdot Y \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$(K - m \cdot \omega^2) \cdot X = K \cdot Y$$

$$X = Y \cdot \frac{K}{K - m \cdot \omega^2} = Y \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ara, el desplaçament del moviment té un valor nominal, que és l'excentricitat e de la massa rotatòria m , multiplicada pel quocient entre la massa rotatòria i la massa total. Prenent paràmetres adimensionals, a les ordenades χ i a les abscisses ρ , la representació de l'expressió anterior és única:

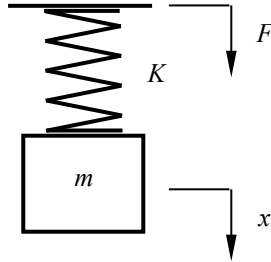


$$\chi = \frac{X}{Y} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \rho^2}$$



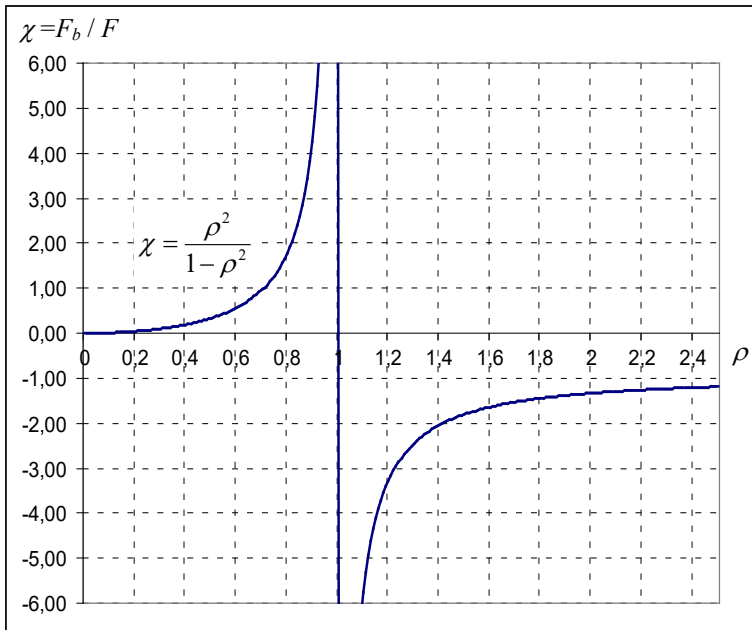
Transmissió de força a la base

En tots els casos anteriors, en què la base és fixa, podem preguntar-nos quina és la relació entre la força transmesa a la base, F_b , i l'amplitud del moviment de la vibració, X . L'expressió és:



$$f_b = K \cdot x = K \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$f_b = F_b \cdot \cos(\omega \cdot t) = K \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$F_b = K \cdot X = K \cdot \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2}$$

En definitiva, la relació de l'amplitud de la força transmesa a la base, F_b , respecte a l'amplitud de la força causant de la vibració, F , és la mateixa relació que havíem trobat abans:

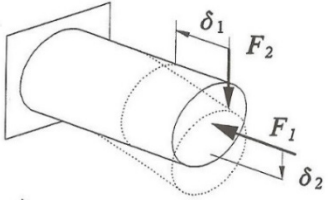
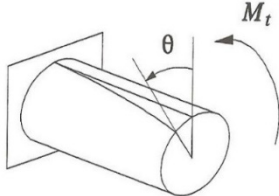


$$\frac{F_b}{F} = \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Vibració lineal – vibració torsional

Les vibracions lineals (de desplaçament lineal, x) que s’han descrit fins aquí tenen la seva traducció a vibracions torsionals (o de desplaçament angular, θ).

En aquest darrer cas, en comptes de massa, m (kg), hi ha el moment d’inèrcia, J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$); en comptes de la força, F (N), hi ha el parell, M ($\text{N}\cdot\text{m}$); en comptes de la rigidesa (lineal), K ($\text{N}\cdot\text{m}$), hi ha la rigidesa torsional, K_θ ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$), i, en comptes del mòdul d’elasticitat, E (MPa), hi ha el mòdul de rigidesa, G (GPa).

Vibració lineal	Vibració torsional
	
Massa: m (kg)	Moment d’inèrcia: J ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
Rigidesa: K (N/m)	Rigidesa torsional: K_θ ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$)
Mòdul d’elasticitat: E (MPa = $10^6\cdot\text{N}/\text{m}^2$)	Mòdul de rigidesa: G (GPa = $10^6\cdot\text{N}/\text{m}^2$)
Força: F (N)	Parell: M ($\text{N}\cdot\text{m}$)
Desplaçament lineal: x (m)	Desplaçament angular: θ (rad)
Freqüència: ω (rad/s)	Freqüència: ω (rad/s)
Freqüència pròpia: ω_0 (rad/s)	Freqüència pròpia: ω_0 (rad/s)

2.1.2 Efecte combinat de dues o més molles

Com es combina la rigidesa de dues o més molles que actuen sobre una massa?

Molles disposades en paral·lel

Dues o més molles estan disposades en paral·lel quan un dels extrems de cadascuna d’elles està lligat a la base i l’altre, a la molla.

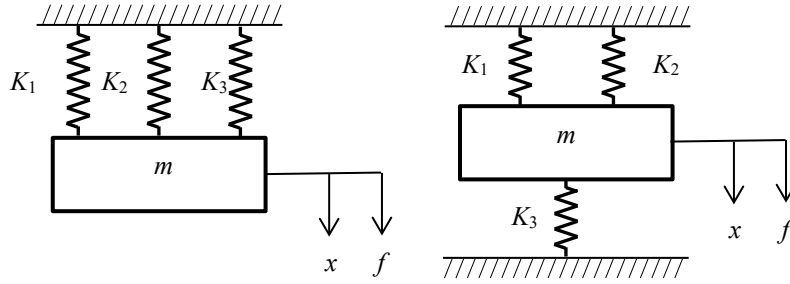
El desplaçament x entre els extrems de les molles és comú, mentre que se sumen les forces:

$$x = \frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2} = \frac{F_3}{K_3}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = (K_1 + K_2 + K_3) \cdot x$$

$$K = \frac{F}{x} = K_1 + K_2 + K_3$$

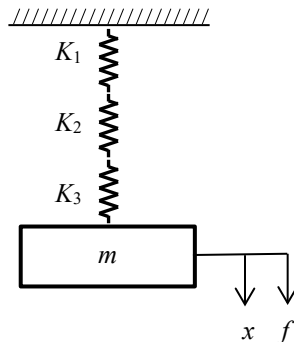
La rigidesa del conjunt és la suma de rigideses.



Les disposicions de les molles de les dues figures adjuntes són casos de molles en paral·lel. Totes les molles tenen un extrem unit a la base i un altre, a la massa.

Molles disposades en sèrie

Dues o més molles estan disposades en sèrie quan es col·loquen una a continuació de l'altra, amb un extrem de la cadena unit a la base i l'altre, a la massa.



En aquest cas, totes les molles estan sotmeses a la mateixa força F , mentre que se sumen els desplaçaments:

$$F = K \cdot x = K_1 \cdot x_1 = K_2 \cdot x_2 = K_3 \cdot x_3$$

$$x = \frac{F}{K} = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} + \frac{F}{K_3}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}$$

La inversa de la rigidesa del conjunt K és la suma d'inverses de les rigideses de les molles.

Vegem-ne un exemple.

$$K_1 = 20 \text{ N/mm}, K_2 = 10 \text{ N/mm}, K_3 = 5 \text{ N/mm}$$

Rigidesa en paral·lel: $K = K_1 + K_2 + K_3 = 20 + 10 + 5 = 35 \text{ N/mm}$

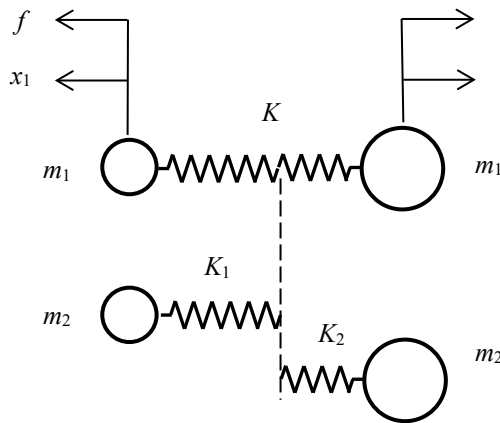
Rigidesa en sèrie: $1/K = 1/K_1 + 1/K_2 + 1/K_3 = 7/20 \text{ (N/mm)}^{-1}$

$$K = 2,857 \text{ N/mm}$$

Dues masses unides per una molla

Un cas interessant d'analitzar és el conjunt format per dues masses unides per una molla, sense cap unió amb la base. Pel fet de tenir dues masses, aquest és un sistema vibratori amb dos graus de llibertat. Un dels modes de vibració (que és el que interessa) és el moviment d'una massa contra l'altre. L'altre mode de vibració és un desplaçament del conjunt del sistema, que pot ser considerat un mode degradat amb freqüència pròpia zero.

La vibració d'una massa contra l'altra pot ser estudiada com un sistema d'un sol grau de llibertat si s'estableix la consideració següent: *a)* hi ha un punt de la molla entre les dues masses que no es mou respecte a la base; *b)* el sistema es pot dividir amb dos subsistemes, cadascun d'ells amb una massa i la part corresponent de la molla, els quals poden ser considerats sistemes d'un grau de llibertat (un extrem de la molla és fix sobre la base); *c)* aquests dos sistemes han de tenir la mateixa freqüència pròpia, ja que formen part del mateix sistema vibratori.



Un cop partit el sistema en els dos sistemes esmentats, caldrà que les forces d'inèrcia sobre les dues masses sumin zero, unes forces que es transmeten a través dels extrems de les dues submolles. És a dir:

$$m_1 \cdot x_1' + m_2 \cdot x_2' = 0$$

$$K_1 \cdot x_1 + K_2 \cdot x_2 = 0$$

Una solució és amb moviments sinusoidals:

$$x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad x_2 = X_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$x_1' = -X_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad x_2' = -X_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Aplicant-ho a les equacions anteriors, dóna:

$$m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = 0 \quad X_1 = -X_2 \cdot \frac{m_2}{m_1}$$

$$K_1 \cdot X_1 + K_2 \cdot X_2 = 0 \quad X_1 = -X_2 \cdot \frac{K_2}{K_1} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{K_1}{K_2}$$



Atès que les dues submolles estan disposades en sèrie:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \quad K_1 = K \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} \quad K_2 = K \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \sqrt{K \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

Exemple:

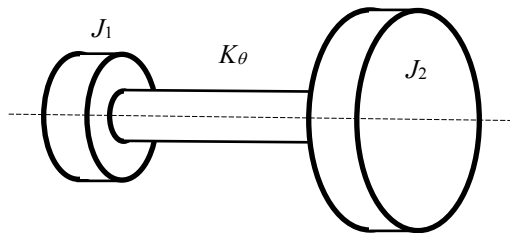
$$m_1 = 1 \text{ kg}; m_2 = 4 \text{ kg}; K = 5.000 \text{ N/m}$$

Molles dels subsistemes: $K_1 = 6.250 \text{ N/m}$; $K_2 = 25.000 \text{ N/mm}$,

$$\text{Freqüència pròpia: } \omega_0 = \sqrt{K \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}} = \sqrt{5.000 \cdot \frac{1+4}{1 \cdot 4}} = 79,057 \text{ rad/s} = 12,58 \text{ Hz}$$

Sistema torsional

Una variant del sistema anterior és en versió de moviment angular. Els rotors amb dues o més masses torsionals (equivalents a volants d'inèrcia) enllaçats per un eix amb una certa rigidesa torsional, malgrat girar de conjunt, originen vibracions torsionals entre aquests volants.



És el cas de les vibracions torsionals en el cigonyal d'un motor d'explosió: tot i ser un rotor que gira en conjunt, sota les accions de les explosions als cilindres, unes parts del cigonyal poden oscil·lar torsionalment respecte d'altres.

Dos volants d'inèrcia enllaçats per un eix torsional.

És anàleg al cas de dues masses enllaçades per una molla amb les corresponents substitucions de paràmetres:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_{\theta 1}} + \frac{1}{K_{\theta 2}}$$

$$K_{\theta 1} = K_{\theta} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_2} \quad K_{\theta 2} = K_{\theta} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\theta 1}}{J_1}} = \sqrt{\frac{K_{\theta 2}}{J_2}} = \sqrt{K_{\theta} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2}}$$

Exemple:

$$J_1 = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; J_2 = 0,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; K_{\theta} = 400 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$$

Molles dels subsistemes: $K_{\theta 1} = 600 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$; $K_{\theta 2} = 1.200 \text{ N}/\text{mm}$,

Freqüència pròpia:

$$\omega_0 = \sqrt{K_{\theta} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2}} = \sqrt{400 \cdot \frac{0,05 + 0,10}{0,05 \cdot 0,10}} = 122,47 \text{ rad/s} = 19,49 \text{ Hz}$$

2.2 Vibracions mecàniques: qüestionari

1. Quina diferència hi ha entre una vibració lliure i una vibració forçada?

Una vibració lliure d'un sistema vibratori és aquella que evoluciona sense més intervencions externes que el desplaçament inicial de la posició d'equilibri.

Una vibració forçada és aquella en què un sistema vibratori es veu sotmès a una força oscil·latòria exterior o a un moviment de la base exterior. En general, la freqüència de la causa exterior (força o moviment de base) és diferent de la pròpia i determina la freqüència de la vibració permanent.

2. Com es defineix la rigidesa torsional d'un element elàstic? Amb quines unitats es mesura?

En un element elàstic que pot deformar-se a torsió, la rigidesa torsional es defineix com el quocient entre el parell que s'aplica als seus extrems i l'angle mutu girat per aquests extrems.

La rigidesa torsional es mesura com un parell dividit per un angle. Normalment: $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ o $\text{N} \cdot \text{mm}/\text{rad}$. Atès que l'angle no té dimensions, la rigidesa torsional és equivalent a un parell, des del punt de vista dimensional.

3. Què és el mode propi de vibració d'una estructura mecànica? Com es defineix?

En una estructura elàstica amb diverses masses puntuals o masses distribuïdes, un mode propi de vibració és cada una de les formes diferents en què el sistema pot vibrar lliurement (sense forces exteriors) amb una freqüència pròpia. Per tant, un mode propi de vibració es compon d'una manera concreta de deformar-se l'estructura i de la freqüència pròpia associada.

Una estructura elàstica amb diverses masses té tants modes propis de vibració com graus de llibertat (en una estructura elàstica contínua amb massa distribuïda, són infinits). Tanmateix, els modes propis de vibració més importants, des del punt de vista tècnic, són els



de les freqüències pròpies més baixes (i, generalment, també els de les formes més simples de deformació), ja que solen interferir amb possibles causes d'excitació i provocar fenòmens de ressonància.

4. Les quatre molles d'una suspensió d'un automòbil actuen en sèrie o en paral·lel?

Les quatre molles de la suspensió d'un automòbil actuen en paral·lel, ja que cadascuna d'elles connecta la carrosseria amb el terra.

5. La molla d'una agulla d'estendre roba és lineal o torsional?

La molla d'una agulla d'estendre roba actua fent girar les dues meitats de l'agulla una contra l'altra; per tant, és una molla torsional. Alhora, també fa d'eix de les dues meitats de l'agulla.

6. El tram d'un tub de conducció d'un líquid suportat pels seus extrems pot vibrar lateralment a més d'una freqüència?

Un tram d'un tub suportat pels seus extrems és un element elàstic amb massa repartida; per tant, teòricament té infinits modes de vibració lateral (a tota la seva longitud, per meitats en sentits contraris, per terços, etc.), amb freqüències pròpies diferents.

Tanmateix, les més importants, des del punt de vista pràctic, són les primeres, ja que són les més fàcils d'excitar.

7. Quan es disposen dues molles en sèrie, una de molt rígida i l'altra de poc rígida, quina és més determinant en el sistema vibratori?

La que domina la menys rígida, K_2 .

Quan les molles es disposen en sèrie, la rigidesa del conjunt és:

$$K = K_2 \cdot \frac{K_1}{K_1 + K_2}$$

El segon factor és pràcticament 1, ja que K_1 és molt més gran que K_2 i, finalment, $K \approx K_2$.

8. Com es defineix la rigidesa d'una molla? Es mesura de la mateixa manera si la molla és lineal que si és torsional?

La rigidesa d'una molla és el quocient entre el valor de la força (o parell) aplicat i la deformació (lineal o angular) que experimenta entre els seus extrems.

A les molles lineals (de tracció-compressió i de cisallament), la rigidesa lineal K es mesura en força i en desplaçament lineals: N/m.

A les molles torsionals, la rigidesa torsional K_θ es mesura en parell i en desplaçaments angulars, N·m/rad.

9. Si s'uneixen dos cables, un a continuació de l'altre, i s'estiren pels extrems del conjunt, quina n'és la rigidesa resultant (la rigidesa dels cables, K_1 i K_2)?

Si s'uneixen dos cables, un a continuació de l'altre, és com si es col·loquessin dues molles en sèrie. Per tant, la inversa de la rigidesa resultant és la suma d'inverses de les rigideses dels dos cables:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \quad K = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

10. Un sistema massa-molla que vibra en una direcció vertical i el mateix sistema de massa-molla que vibra en una direcció horitzontal tenen la mateixa freqüència?

La freqüència pròpia és la mateixa, ja que depèn tan sols del valor de la massa i de la rigidesa de la molla. En tot cas, el sistema que es mou verticalment tindrà una deformació estàtica inicial causada pel pes de la pròpia massa i vibrarà al voltant d'aquesta altra posició d'equilibri.

11. Un sistema físic real pot vibrar amb més d'una freqüència pròpia? En cas afirmatiu, quines condicions s'han de donar?

Sí. La majoria dels sistemes físics reals poden vibrar a més d'una freqüència pròpia, sempre que tinguin dues o més masses amb moviments independents enllaçades per molles o elements elàstics entre si i/o amb la base.

Les estructures elàstiques amb masses distribuïdes també compleixen aquesta condició.

En efecte, aquestes estructures es poden deformar d'infinites maneres, cada una d'elles amb unes masses elementals amb moviments independents, enllaçades per elements de la pròpia estructura elàstica, que constitueixen un mode de vibració amb la seva freqüència pròpia corresponent.

Tanmateix, tan sols els primers modes de vibració amb les freqüències més baixes són els més significatius en el comportament dinàmic del sistema.

12. El pneumàtic d'una roda d'automòbil (com a element elàstic) i la molla de la suspensió de la roda actuen en sèrie o en paral·lel?

El pneumàtic (com a element elàstic) i la molla d'una suspensió d'automòbil estan disposats en sèrie en la suspensió. Tota la força es transmet, successivament, primer pel pneumàtic i després per la molla.

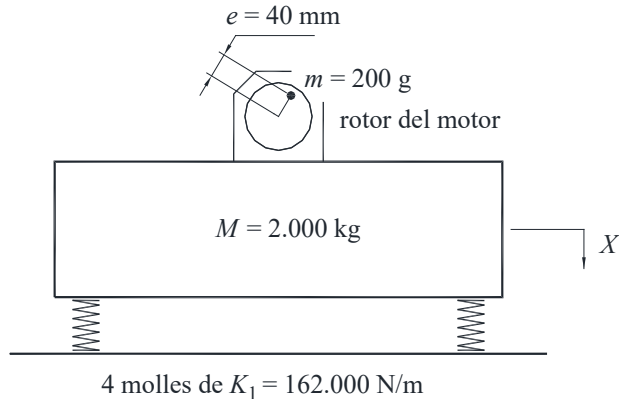
Com passa amb les molles disposades en sèrie, la menys rígida és la que és més determinant en el conjunt. En aquest cas, la molla de la suspensió té una rigidesa molt més baixa que la del pneumàtic i és la que determina, en gran manera, la rigidesa del conjunt i la freqüència pròpia de la suspensió.



2.3 Vibracions mecàniques: exercicis

2.3.1 Vibracions en una màquina amb un motor elèctric desequilibrat

La figura mostra una màquina de massa $M = 2.000$ kg, suportada per 4 molles cadascuna, amb una rigidesa de $K_1 = 162.000$ N/m. A la bancada de la màquina, hi ha un motor elèctric amb un desequilibri equivalent a una massa de $m = 200$ g, situada a una excen- tricitat de $e = 40$ mm.



Es demana:

- a. Quina és la freqüència pròpia de vibració del sistema massa-molla. Expressen els resultats en diferents unitats: rad/s, cicles/s (o Hz), revolucions/minut (o min^{-1}).

Les quatre molles actuen en paral·lel i, per tant, les rigideses se sumen:

$$K = 4 \cdot K_1 = 4 \cdot 162.000 = 648.000 \text{ N/m}$$

Per tant, la freqüència pròpia del sistema massa-molles és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{648.000}{2.000}} = \sqrt{324} = 18 \text{ rad/s}$$

En altres unitats: $18/(2 \cdot \pi) = 2,865$ Hz (o cicles/s); $18 \cdot 30/(2 \cdot \pi) = 171,89$ min^{-1}

- b. Si cal separar-se un 30 % de la freqüència de ressonància, en quin interval de velocitats (min^{-1}) pot girar el motor de forma permanent?

Cada volta del rotor desequilibrat del motor és un cicle d'excitació del sistema massa-molles.

Per tant, el motor no podrà funcionar de forma permanent entre:

$$171,89 \cdot (1-0,3) = 120,32 \text{ min}^{-1}$$

$$171,89 \cdot (1+0,3) = 223,46 \text{ min}^{-1}.$$

- c. *Quan el motor gira a 1.400 min⁻¹, quina és l'amplitud de moviment, X, del conjunt massa-molla excitada pel desequilibri del rotor del motor? S'està per sobre o per sota de la velocitat de ressonància?*

En primer lloc, aquest motor funciona (1.400 min⁻¹) molt per damunt de la freqüència de ressonància (171,89 min⁻¹) del sistema massa-molles.

L'amplitud del moviment, X, ve donada per l'expressió següent:

$$X = e \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Aplicant-hi els valors d'aquest problema, s'obté:

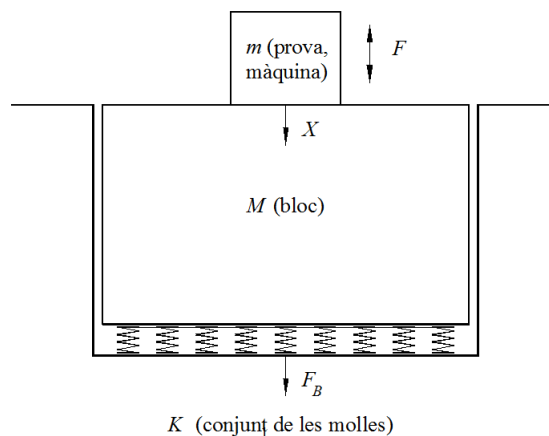
$$X = 0,040 \cdot \frac{0,200}{2.000} \cdot \frac{1.400^2}{171,89^2 - 1.400^2} = -4,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

és a dir, 0,004 mm. És una vibració quasi insignificant. El sistema de suspensió de la màquina pràcticament aïlla la vibració provocada pel desequilibri del rotor del motor.

2.3.2 Identificació dels paràmetres d'un sistema vibratori

Un sistema de massa sísmica consisteix en un bloc soterrat de gran massa i de grans dimensions (per exemple, una superfície de 5×5 m, amb una profunditat de 3 m), suportat sobre molles relativament toves (respecte a la massa) i que té una freqüència pròpia d'oscil·lació baixa.

Sobre aquest bloc, se situen màquines de comportament irregular, desequilibrades o que originen vibracions (premses, grans màquines rotatives, etc.) a fi d'aïllar l'entorn de les vibracions que produeixen.



En aquest cas, tenim un sistema sísmic del qual desconeixem els paràmetres principals (massa del bloc, M; constant de rigidesa del conjunt de molles, K).

A fi d'identificar-los, es fan les operacions i es demanen els càlculs següents:



- a. Se situa una màquina de 10.000 kg sobre la plataforma i el conjunt baixa 24 mm. Quina és la rigidesa del conjunt de les molles que suporten el sistema?

La rigidesa és el quocient entre l'increment de força i l'increment de deformació:

$$K = \frac{\Delta F}{\Delta \delta} = \frac{m \cdot g}{\Delta \delta} = \frac{10.000 \cdot 9,81}{0,024} = 4.087.500 \text{ N/m} = 4.087,5 \text{ N/mm}$$

- b. Amb un dispositiu adequat, s'aplica sobre el bloc sísmic (sense la màquina) una força alternativa que es pot ajustar a diferents freqüències. A 0,7 Hz, se n'obté la màxima resposta i l'amplitud d'oscil·lació va creixent. Quina és la massa del bloc?

Per la descripció (la màxima resposta i una amplitud d'oscil·lació creixent), el valor de $f = 0,7$ Hz és, a efectes pràctics, la freqüència pròpia. A partir de la freqüència pròpia angular ($\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f = 4,398$ rad/s) i de la massa del bloc, M , es pot calcular la rigidesa de les molles, K :

$$M = \frac{K}{\omega^2} = \frac{K}{(2 \cdot \pi \cdot f)^2} = \frac{4.087.500}{4,398^2} = 211.301 \text{ kg} \quad (211,3 \text{ tones})$$

- c. La màquina està situada sobre el bloc sísmic. Quan funciona, origina un desequilibri alternatiu sinusoidal de 12.000 N d'amplitud a una freqüència de 3 Hz. Quina és l'amplitud del moviment d'oscil·lació del conjunt?

Ara actua la massa conjunta del bloc i la màquina ($M + m$). La freqüència d'excitació és $f = 3$ Hz ($\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 18,850$ rad/s). L'amplitud del moviment d'oscil·lació és:

$$X = \frac{F}{K} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{12.000}{4.087,5} \cdot \frac{4,398^2}{4,398^2 - 18,850^2} = -0,1690 \text{ mm}$$

És un moviment de desplaçament molt petit.

- d. En el cas anterior, calculeu: 1) la variació de l'amplitud de la força que exerceixen les molles sobre el terra (vibració transmesa a la base); 2) la relació de l'amplitud de la força transmesa a la base amb l'amplitud de la força excitadora (efecte aïllador).

L'amplitud de la variació de la força que exerceixen les molles sobre el terra, F_B , és el producte de la rigidesa de les molles per l'amplitud del moviment:

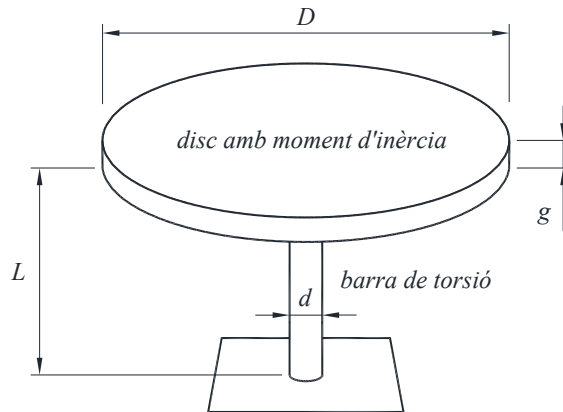
$$F_B = K \cdot X = 4.087,5 \text{ N/mm} \cdot (-0,1690) \text{ mm} = -690,95 \text{ N}$$

La transmissivitat és $TR = (-690,95 / 12.000) = -0,0576$ (5,76%). El signe negatiu indica que el desplaçament de les masses és de sentit contrari a la força d'excitació i, per tant, la força transmesa a la base, també.

2.3.3 Vibració torsional d'un sistema

La figura mostra un sistema vibratori torsional, format per la barra de torsió A , d'acer, de diàmetre $d = 10$ mm i longitud $L = 300$ mm, que connecta la base B amb un disc C ,

també d'acer, de diàmetre $D = 200$ mm i gruix $g = 10$ mm. El disc C pot fer una oscil·lació torsional sobre el seu centre gràcies a l'elasticitat de la barra A.



L'acer té una densitat de 7.800 kg/m^3 i el mòdul de rigidesa és $G = 80.000 \text{ MPa}$.

Es demana:

a. Rigidesa torsional, K_θ , de la barra de torsió A (se'n dóna la fórmula)

Aplicant-hi valors, se n'obté:

$$K_\theta = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^4 \cdot G}{L} = \frac{3,1416}{32} \cdot \frac{10^4 \cdot 80.000}{300} = 261.799 \text{ N}\cdot\text{mm/rad} = 261,8 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$$

b. Moment d'inèrcia, J , del disc C (se'n dóna la fórmula)

$$J = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot g \cdot \rho = \frac{3,1416}{32} \cdot 0,2^4 \cdot 0,01 \cdot 7.800 = 0,012252 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

c. Freqüència pròpia torsional del sistema

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_\theta}{J}} = \sqrt{\frac{261,799}{0,012252}} = 146,18 \text{ rad/s (23,26 Hz)}$$

2.3.4 Llit elàstic

Un nen salta sobre la zona central d'una lona elàstica tensada (amb massa negligible) que se situa a 1.500 mm de terra. Abans d'entrar en la zona elàstica, el nen mesura el seu pes, que resulta ser de 35 kg. Un cop situat en la zona central (sense saltar), la lona elàstica baixa fins a 1.200 mm de terra.

Es demana:



a. Quina és la rigidesa del llit elàstic en la seva zona central quan actua com a molla?

El llit elàstic es comporta com una molla: si s'hi aplica una força al centre (per exemple, el pes d'una persona), es desplaça i, quan aquesta força cessa, retorna a la seva posició original.

De forma simplificada, se suposa que la lona es comporta com una molla lineal. La rigidesa és el quocient entre la força aplicada sobre l'element elàstic (el pes del nen és de 35 kg; $F = m \cdot g = 35 \cdot 9,81 = 343,35$ N, en el nostre cas) i la deformació que experimenta aquest mateix element ($\delta = 1,50 - 1,20 = 0,30$ m, en el nostre cas):

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{343,35}{0,30} = 1.144,5 \text{ N/m}$$

b. Si el nen fa un petit impuls inicial, quina és la freqüència pròpia del sistema (en Hz)?

En el cas d'una pertorbació inicial (moure el conjunt massa–molla fora de la posició d'equilibri), s'origina una vibració en la freqüència pròpia del sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1.144,5}{35}} = 5,72 \text{ rad/s} = 0,910 \text{ Hz}$$

Normalment, els fenòmens de dissipació (frec de la persona i la lona amb l'aire, histèresi de la pròpia lona en fer els cicles de deformació) condueixen a una disminució de l'amplitud de la vibració que, a efectes pràctics, s'atura després d'un cert nombre d'oscil·lacions.

c. Si s'origina una oscil·lació de 120 mm d'amplitud respecte a la posició d'equilibri (o sigui, entre 180 i 420 mm), quins valors de força exerceix el llit elàstic sobre el nen en les posicions extremes (suposant que la lona elàstica es comporta com una molla lineal)?

Al punt de repòs, aguanta el pes del nen: 343,4 N.

Negligint la massa de la lona del llit elàstic, en tot moment la força que exerceix la lona sobre el nen és la força elàstica:

$$\text{Punt inferior: } \delta_{inf} = 180 \text{ mm}; F_{inf} = K \cdot \delta_{inf} = 1.144,5 \cdot 0,18 = 206,0 \text{ N}$$

$$\text{Punt superior: } \delta_{sup} = 420 \text{ mm}; F_{sup} = K \cdot \delta_{sup} = 1.144,5 \cdot 0,42 = 480,7 \text{ N}$$

Al punt inferior, la força elàstica de la lona (cap amunt) és menor que el pes del nen i, per tant, l'acceleració del nen és en el sentit de la gravetat mentre que, al punt superior, la força elàstica de la lona (també cap amunt) és major que el pes del nen i, per tant, l'acceleració del nen és en sentit contrari al de la gravetat.

d. Després, també hi puja un germà que pesa 45 kg i salten junts. Quina és la nova freqüència pròpia del sistema?

La nova freqüència pròpia serà deguda a la mateixa rigidesa de la lona elàstica i a la massa suma:

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{1.144,5}{35 + 45}} = 3,78 \text{ rad/s} = 0,602 \text{ Hz}$$

2.3.5 Centrifugadora flotant d'eix horitzontal

Una centrifugadora flotant d'eix horitzontal (composta per una envoltant de suport, el rotor de la centrifugadora, el motor i la transmissió), de 1.200 N de pes, està suportada per un conjunt de molles de $K_{total} = 200 \text{ N/mm}$. El rotor gira a 1.000 revolucions per minut i pot tenir una massa desequilibrada de 1.500 grams a una excentricitat de 250 mm.

Estudieu-ne només el moviment vertical. Es demana:

a. *Quina és la freqüència pròpia del sistema?*

Simplificadament, se suposa que el conjunt flotant (muntat sobre molles) de la centrifugadora només es pot moure en la direcció vertical (com si estigués guiat).

La massa de la centrifugadora és de: $M = pes/g = 1.200 \text{ (N)} / 9,81 \text{ (M/s}^2\text{)} = 122,3 \text{ kg}$

La massa desequilibrada és: $m = 1.500 \text{ g} = 1,5 \text{ kg}$

La freqüència pròpia del sistema (causada per una pertorbació puntual) és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M + m}} = \sqrt{\frac{200.000}{122,3 + 1,5}} = 40,19 \text{ rad/s}$$

b. *Durant la centrifuga, el sistema funciona per sobre o per sota de la freqüència pròpia de ressonància?*

Quan l'eix de la centrifugadora, associat a una massa desequilibrada (en aquest cas, d'1,5 kg), gira a la velocitat de 1.000 min^{-1} , genera una vibració forçada per una força d'inèrcia a la freqüència angular equivalent a la velocitat angular de gir.

La freqüència angular de la vibració forçada és:

$$\omega = 1.000 \cdot 3,14159/30 = 104,72 \text{ rad/s}$$

La freqüència reduïda (relació entre la freqüència forçada i la freqüència pròpia) és:

$$\rho = \omega/\omega_0 = 104,72/40,41 = 2,59$$

Per tant, centrifuga per damunt del punt de ressonància ($\rho > 1$).

c. *Quina és l'amplitud de l'oscil·lació del grup flotant?*

L'expressió de l'amplitud de moviment de vibració en funció de la freqüència reduïda, ρ , és:

$$X = \frac{m \cdot e}{M + m} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{1,5 \cdot 0,25}{122,3 + 1,5} \cdot \frac{2,59^2}{2,59^2 - 1} = -0,00356 \text{ m} = -3,56 \text{ mm}$$



L'amplitud del moviment oscil·latori és de 3,56 mm. El sentit negatiu indica que el desplaçament està en oposició a la força excitadora, ja que funciona per sobre de la freqüència de ressonància.

2.3.6 Vibracions en el sistema cable-càrrega d'una grua

La politja de reenviament del cable d'una grua està situat a 10 m de terra i la longitud de cable des de la politja de reenviament fins al tambor d'enrotllament és de 2 m més. El ganxo agafa la càrrega a 1 m de terra. En iniciar l'elevació de la càrrega de 1.000 kg, i a causa de l'elasticitat del cable, aquest s'enrotlla en el tambor d'enrotllament una longitud de 100 mm abans que la càrrega comenci a elevar-se.

Es demana:

a. *Rigidesa del cable quan la càrrega està a nivell del terra*

La rigidesa del cable és el quocient entre la força (el pes, $1.500 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2$) i l'allargament del cable (100 mm d'enrotllament abans d'iniciar l'elevació).

$$K_0 = 1.500 \cdot 9,8 / 0,080 = 183.937,5 \text{ N/m} = 183,9 \text{ kN/m}$$

b. *Freqüència de vibració del sistema càrrega-cable just quan la càrrega deixa de tocar el terra*

La freqüència de vibració és l'arrel quadrada del quocient entre la massa (la càrrega) i la rigidesa del cable:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{m}} = \sqrt{\frac{183.937}{1.500}} = 11,07 \text{ rad/s} = 1,75 \text{ Hz}$$

Quan la càrrega és a 8 m del terra, es demana:

c. *La nova rigidesa del cable (és inversament proporcional a la longitud lliure) i la nova freqüència de vibració*

La longitud lliure (entre ganxo i tambor d'enrotllament) inicial del cable és de 11 m: 10 d'altura de la politja de reenviament + 2 m de la politja de reenviament fins al tambor d'enrotllament – 1 m del terra al ganxo per agafar la càrrega.

Quan la càrrega és a 8 m del terra, el ganxo és a 9 m d'altura i la longitud total de cable lliure són 3 m (1 m del ganxo a la politja de reenviament i 2 m des de la politja de reenviament fins al tambor d'enrotllament).

La rigidesa del cable és inversament proporcional a la longitud. Per tant (inicial, K_0 ; elevada, K_1): $K_1/3 = K_0/11$. O sigui, $K_1 = 674.438 \text{ N/m} = 674,4 \text{ kN/m}$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{K_1}{m}} = \sqrt{\frac{674.438}{1.500}} = 21,20 \text{ rad/s} = 3,37 \text{ Hz}$$

La freqüència és pràcticament el doble.

2.3.7 Vibració causada per un motor elèctric desequilibrat

Un motor elèctric que gira a 150 rad/s (aproximadament, 1.430 min⁻¹) té un desequilibri en el rotor de 10 g a una excentricitat de 30 mm, que fa vibrar el conjunt del suport-motor. Aquest conjunt pesa 120 kg i se situa sobre un conjunt de molles de rigidesa total $K = 20 \text{ kN/m}$.

Es demana:

a. Freqüència de vibració del sistema

Aquest és un sistema forçat pel desequilibri del motor. Per tant, vibra a la freqüència que imposa aquest desequilibri:

$$\omega = 150 \text{ rad/s} = 23,37 \text{ Hz}$$

b. Amplitud de la vibració del sistema

L'amplitud del moviment del sistema en una vibració causada per una massa rotatòria desequilibrada és:

$$X = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot e \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ m}$$

Primer, cal conèixer la freqüència pròpia del sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{20.000}{1,20}} = 12,91 \text{ rad/s} = 2,05 \text{ Hz}$$

Aplicant valors a l'equació anterior:

$$X = \frac{0,01}{120 + 0,01} \cdot 0,03 \cdot \frac{150^2}{12,91^2 - 150^2} = -2,518 \cdot 10^{-6} \text{ m} = -0,002518 \text{ mm}$$

c. Amplitud de la vibració del sistema si el motor elèctric gira a 300 rad/s

En aquest darrer cas, l'única variació respecte al cas anterior és que la freqüència d'excitació és doble: $\omega = 300 \text{ rad/s}$. Aplicant valors dona:

$$X = \frac{0,01}{120 + 0,01} \cdot 0,03 \cdot \frac{300^2}{12,91^2 - 300^2} = -0,0025044 \text{ mm}$$

A efectes pràctics, és la mateixa amplitud de vibració. Això és degut al fet que la freqüència d'excitació en els dos casos és molt més elevada que la pròpia del sistema.

2.3.8 Aïllament de vibracions

Es vol aïllar una màquina de mesurament molt sensible a les vibracions del terreny (a causa del pas de vehicles, de premses properes, de petits sismes del terreny, etc.).



La màquina de mesurament (25 kg) se situa sobre una gran massa sísmica (30 tones) suportada per unes molles que, sota el seu propi pes, es deformen 200 mm.

Es demana:

a. *Rigidesa de les molles que suporten la massa sísmica*

La rigidesa del sistema és el quocient entre el pes de la massa suspesa (massa sísmica de 30.000 kg i massa de la màquina de mesurament, 25 kg, multiplicades per $9,8 \text{ m/s}^2$) i la deformació estàtica sota el seu efecte (200 mm = 0,200 m).

$$K = (30.000+25) \cdot 9,81 / 0,200 = 1.472.726 \text{ N/m} = 1,472,7 \text{ kN/m}$$

Si no s'hagués tingut en compte la massa de la màquina de mesurament (25 kg), la rigidesa hauria estat de $K = 1.471.500 \text{ N/m}$

b. *Freqüència de vibració del sistema de massa sísmica*

La freqüència de vibració és l'arrel quadrada del quocient entre la massa sísmica i la rigidesa del sistema de molles:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{m}} = \sqrt{\frac{1.472.726}{30.000+25}} = 7,001 \text{ rad/s} = 1,114 \text{ Hz}$$

Suposant que el terreny vibra amb una freqüència de 5 Hz i una amplitud de 0,3 mm:

c. *Quina és l'amplitud de vibració de la massa sísmica?*

La vibració del terreny i, alhora, la freqüència d'excitació és:

$$\omega = 5 \text{ Hz} = 5 \cdot (2 \cdot 3,141682) = 31,42 \text{ rad/s}$$

La freqüència reduïda del sistema excitat és:

$$\rho = \omega / \omega_0 = 31,42 / 7,001 = 4,488$$

El factor de transmissió adimensional d'amplituds és:

$$\chi = \frac{1}{1 + \rho^2} = \frac{1}{1 + 4,488^2} = 0,0473$$

Finalment, l'amplitud a què es veurà sotmesa la massa sísmica (i, per tant, de la màquina de mesurament) serà de:

$$X_M = \chi \cdot X_B = 0,0473 \cdot 0,3 = 0,0142 \text{ mm (14,2 mil·lèsimes de mil·límetre)}$$

2.3.9 Mesurament i identificació dels paràmetres d'un sistema vibratori

Un sistema vibratori està format per una molla de rigidesa K i una massa m , tots dos paràmetres desconeguts. La deformació estàtica de la molla sota el pes d'una massa m és de $x_1 = 100 \text{ mm}$; si s'hi afegeix una massa addicional d'1 kg, la nova deformació estàtica de la molla sota el pes de la massa incrementada és de $x_2 = 120 \text{ mm}$.

Es demana:

a. Valor de la rigidesa K de la molla

La rigidesa de la molla es pot avaluar com el quocient de l'increment de la força, dividit per l'increment de la deformació:

$$K = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1,9,81}{0,120 - 0,100} = 490,5 \text{ N/m}$$

b. Valor de la massa m

Coneguda la rigidesa, és fàcil obtenir-ne la massa inicial:

$$m \cdot g = K \cdot x_1 \quad m = \frac{K \cdot x_1}{g} = \frac{490,5 \cdot 0,100}{9,81} = 5 \text{ kg}$$

Es mesuren els períodes de vibració del sistema, amb la massa inicial i la massa incrementada amb 1 kg, i els valors són $T_1 = 0,565$ i $T_2 = 0,695$ s.

c. Són compatibles aquests períodes de vibració amb les dades anteriors?

Les freqüències pròpies dels dos sistemes són:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1}} = \sqrt{\frac{490,5}{5}} = 9,905 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = (2 \cdot \pi) / \omega_1 = 6,28 / 9,905 = 0,634 \text{ s}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_2}} = \sqrt{\frac{490,5}{5+1}} = 9,042 \text{ rad/s}$$

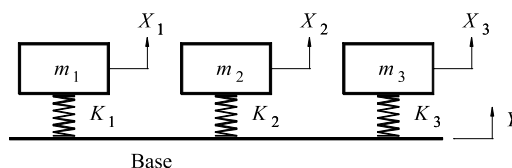
$$T_2 = (2 \cdot \pi) / \omega_2 = 6,28 / 9,042 = 0,695 \text{ s}$$

Per tant, el mesurament del període T_2 és compatible amb les dades del problema; en canvi, el mesurament del període T_1 no és compatible amb les dades del problema, de manera que probablement s'ha produït un error en el mesurament.

2.3.10 Tres sistemes vibratori sobre una mateixa base

La figura següent mostra tres sistemes de massa-molla independents, situats sobre una mateixa base.

$$m_1 = 1 \text{ kg}; m_2 = 2 \text{ kg}; m_3 = 3 \text{ kg}; K_1 = 500 \text{ N/m}; K_2 = 400 \text{ N/m}; K_3 = 300 \text{ N/m}$$





Es demana:

a. *Freqüències pròpies d'aquests tres sistemes massa-molla*

Les freqüències pròpies dels tres sistemes són:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{500}{1}} = 22,36 \text{ rad/s} = 3,56 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{400}{2}} = 14,14 \text{ rad/s} = 2,25 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{K_3}{m_3}} = \sqrt{\frac{300}{3}} = 10,00 \text{ rad/s} = 1,59 \text{ Hz}$$

Si la base vibra (excitació per base) a una freqüència de 3 Hz i una amplitud de 5 mm, es demana:

b. *Hi ha algun d'aquests sistemes de massa-molla que entri en ressonància?*

El moviment de la base es transforma en l'element que excita aquests tres sistemes vibratoris muntats sobre d'ella.

Cap de les freqüències pròpies dels tres sistemes vibratoris és igual a 3 Hz; per tant, cap d'elles entra en ressonància quan la base vibra.

c. *Quines són les amplituds dels moviments, X_1 , X_2 i X_3 ?*

L'amplitud d'oscil·lació s'expressa segons $X = Y/(1-\rho^2)$, on Y és l'amplitud del moviment vibratori de la base i $\rho = \omega/\omega_0$, essent ω la freqüència d'excitació (en aquest cas, 3 Hz = 18,85 rad/s, del moviment vibratori de la base) i ω_0 la freqüència pròpia de cadascun dels tres sistemes de massa-molla. Per tant:

$$\rho_1 = \frac{\omega}{\omega_{01}} = \frac{18,85}{22,36} = 0,84 \quad X = Y \cdot \frac{1}{1-\rho_1^2} = 5 \cdot \frac{1}{1-0,84^2} = +17,28 \text{ mm}$$

$$\rho_2 = \frac{\omega}{\omega_{02}} = \frac{18,85}{14,14} = 1,33 \quad X = Y \cdot \frac{1}{1-\rho_2^2} = 5 \cdot \frac{1}{1-1,33^2} = -6,44 \text{ mm}$$

$$\rho_3 = \frac{\omega}{\omega_{03}} = \frac{18,85}{10,00} = 1,88 \quad X = Y \cdot \frac{1}{1-\rho_3^2} = 5 \cdot \frac{1}{1-1,88^2} = -1,96 \text{ mm}$$

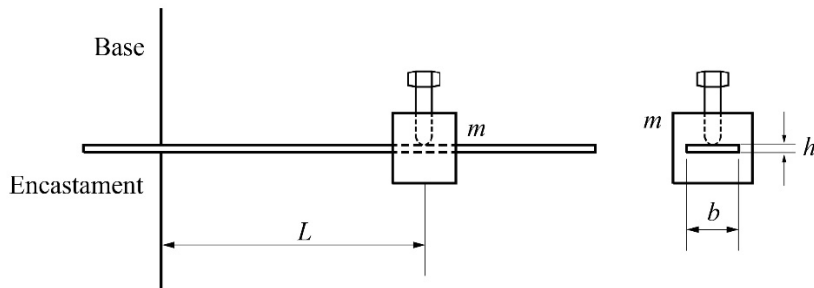
d. *Algun d'aquests moviments és de sentit contrari al de la base?*

Sí. El segon i el tercer sistemes de massa-molla tenen freqüències pròpies de 14,14 rad/s i 10,00 rad/s, inferiors a la d'excitació, de 22,36 rad/s; per tant, funcionen més enllà del punt de ressonància, i els moviments de la massa i de la base tenen sentits contraris.

En canvi, no és així en el primer sistema de massa-molla.

2.3.11 Sistema sintonitzable a una freqüència

Un sistema de massa-molla consisteix en una làmina d'acer flexible (amb un gruix de $h = 1$ mm i una amplada de $b = 20$ mm), encastada per un extrem. Per damunt, hi pot córrer una massa de $m = 500$ g, que es pot fixar a diferents distàncies L respecte a la secció d'encastament. La massa de la làmina es considera negligible.



L'expressió de la rigidesa de la molla a una distància L és: $K = b \cdot h^3 \cdot E / (4 \cdot L^3)$, essent E el mòdul d'elasticitat, que en l'acer és de 210.000 MPa.

Es demana (enunciat i resolució):

a. Rigidesa de la làmina d'acer per a $L = 100$ mm

L'expressió de la rigidesa de la molla a una distància L és:

$$K = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{4 \cdot L^3} = \frac{20 \cdot 1^3 \cdot 210.000}{4 \cdot 200^3} = 0,131 \text{ N/mm} = 131 \text{ N/m}$$

b. Freqüència pròpia del sistema per al valor de L anterior

Conegudes la massa i la rigidesa, la freqüència pròpia és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{131}{0,5}} = 16,20 \text{ rad/s} = 2,58 \text{ Hz}$$

c. Distància L a la qual s'ha de fixar la massa m perquè la freqüència d'oscil·lació sigui de 5 Hz

La rigidesa de la molla és $K = \omega^2 \cdot m = 31,42^2 \cdot 0,5 = 493,5 \text{ N/m} = 0,4935 \text{ N/mm}$.

Ara es coneix la freqüència d'oscil·lació (5 Hz = 31,42 rad/s) i cal trobar la distància L de la massa a la secció d'encastament:

$$L = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{4 \cdot K} = \frac{20 \cdot 1^3 \cdot 210.000}{4 \cdot 0,4935} = 128,62 \text{ mm}$$

d. En aquest darrer cas, si la base vibra amb una amplitud de $Y = 5$ mm i a una freqüència angular de $\omega = 30$ rad/s, quina és l'amplitud del moviment?



L'expressió de l'amplitud del moviment de la massa, X , en funció de l'amplitud de la vibració de la base de freqüència $\omega_0 = 30$ rad/s, Y , és:

$$\rho = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{30}{31,42} = 0,955 \quad X = Y \cdot \frac{1}{1 - \rho^2} = 5 \cdot \frac{1}{1 - 0,955^2} = 56,75 \text{ mm}$$

S'excita molt a prop del punt de ressonància i hi ha un efecte amplificador molt gran.

2.3.12 Suspensió d'una màquina

Una màquina de 3,5 t està situada sobre un conjunt d'elements elàstics que, en el moment de la seva instal·lació, havien experimentat un descens de 80 mm.

Es demana:

a. *Quina és la rigidesa del conjunt dels elements elàstics? I la freqüència pròpia del sistema de massa-suspensió?*

La rigidesa del conjunt d'elements elàstics és:

$$K = \frac{m \cdot g}{d} = \frac{3.500 \cdot 9,81}{0,080} = 429.187,5 \text{ N/m}$$

La freqüència pròpia del sistema és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{429.187,5}{3.500}} = 11,074 \text{ rad/s} = 1,76 \text{ Hz}$$

El funcionament de la màquina origina una vibració causada per una força alternativa de mòdul constant a una freqüència de 5 Hz que fa que la màquina sobre la suspensió vibri amb una amplitud màxima de 50 μm (micres o mil·lèsimes de mil·límetre).

b. *Quina és l'amplitud màxima de la força excitadora de la vibració, $F_{m\grave{a}x}$, i la força transmesa a la base, F_b ?*

La freqüència d'excitació del sistema i la freqüència reduïda són:

$$\omega = 5 \text{ Hz} = 31,416 \text{ rad/s}; \quad \rho = \omega / \omega_0 = 31,416 / 11,074 = 2,837$$

L'amplitud del moviment del sistema és:

$$X = X_{est} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2} = \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Aïllant l'amplitud, s'obté la força màxima excitadora, $F_{m\grave{a}x}$, per a una amplitud del moviment de 50 μm :

$$F_{m\grave{a}x} = K \cdot X \cdot (1 - \rho^2) = 429.187,5 \cdot 0,000050 \cdot (1 - 2,837^2) = -151,26 \text{ N}$$

El sentit negatiu indica que la força i el moviment són de sentit contrari: la vibració té lloc per damunt de la ressonància.

L'amplitud de la força transmesa a la base, F_b , és:

$$F_b = K \cdot X = 429.187,5 \cdot 0,000050 = 21,459 \text{ N}$$

c. *Analitzeu què passa amb unes molles de la suspensió del doble de rigidesa?*

La freqüència pròpia es multiplica per $\sqrt{2} = 1,41428$ i la freqüència reduïda es divideix per $\sqrt{2}$:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{K_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 429.187,5}{3.500}} = 15,660 \text{ rad/s} \quad \rho_1 = \frac{\omega}{\omega_{01}} = \frac{31,416}{15,660} = 2,006$$

Aplicant aquests nous valors, l'amplitud del moviment, X , i la força transmesa a la base, F_b , són:

$$X_1 = \frac{F}{K_1} \cdot \frac{1}{1 - \rho_1^2} = \frac{151,26}{2 \cdot 429.187,5} \cdot \frac{1}{1 - 2,006^2} = 0,000058 \text{ mm} = 58 \text{ }\mu\text{m}$$

$$F_b = K_1 \cdot X_1 = (2 \cdot 429.187,5) \cdot 0,000058 = 50,014 \text{ N}$$

L'amplitud del moviment augmenta en una proporció moderada i passa de 50 a 58 μm (un 16,5 % més), però la força transmesa a la base és més del doble, en passar de 20,46 a 50,01 N (un 133,1 % més).

2.3.13 Dimensionament d'un sistema de massa sísmica

Una massa sísmica de $m = 5.000 \text{ kg}$ es col·loca sobre un nombre elevat de molles helioidals de compressió, iguals, cadascuna de les quals té una rigidesa $K = 3 \text{ N/mm}$ i una longitud inicial de $L_0 = 220 \text{ mm}$. La deformació màxima que admet cada molla quan les espires es toquen entre sí (deformació a bloc) és de $\delta_{m\grave{a}x} = 120 \text{ mm}$.

Es demana:

a. *Sobre quantes molles caldrà suportar la massa sísmica perquè la freqüència pròpia del sistema se situï entre 1,5 i 1,51 Hz?*

Les freqüències mínima i màxima en rad/s són:

$$\omega_{\min} = 1,5 \cdot (2 \cdot 3,1416) = 9,425 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\max} = 1,51 \cdot (2 \cdot 3,1416) = 9,488 \text{ rad/s}$$

Les rigideses mínima i màxima que ha de tenir el conjunt de molles són:

$$K_{\min} = m \cdot \omega_{\min}^2 = 5.000 \cdot 9,42^2 = 444.132 \text{ N/m}$$

$$K_{\max} = m \cdot \omega_{\max}^2 = 5.000 \cdot 9,49^2 = 450.074 \text{ N/m}$$

Atès que la rigidesa d'una molla és $K_1 = 3.000 \text{ N/m}$, el nombre de molles serà:



$$n_{\min} = K_{\min} / K_1 = 444.132 / 3.000 = 148,04$$

$$n_{\max} = K_{\max} / K_1 = 450.074 / 3.000 = 150,02$$

Prenem $n = 150$ (és fàcil de disposar-les; per exemple, 10×15).

b. *Quina deformació estàtica experimentaran les molles? És acceptable?*

La deformació estàtica que experimenten les molles és el quocient entre el pes de la massa sísmica i la rigidesa de conjunt de les molles:

$$\delta_{\max} = \frac{m \cdot g}{n \cdot K_1} = \frac{5.000 \cdot 9,81}{150 \cdot 3.000} = 0,109 \text{ m} = 109 \text{ mm}$$

Atès que la deformació màxima que admet cada molla individual és de 120 mm, aquesta deformació estàtica és admissible, tot i que no està lluny del seu límit.

Amb el pas d'un vehicle en les proximitats, el terra vibra a una freqüència de 6 Hz i amb una amplitud d'1,2 mm. Es demana:

c. *Amplitud del moviment de la massa sísmica*

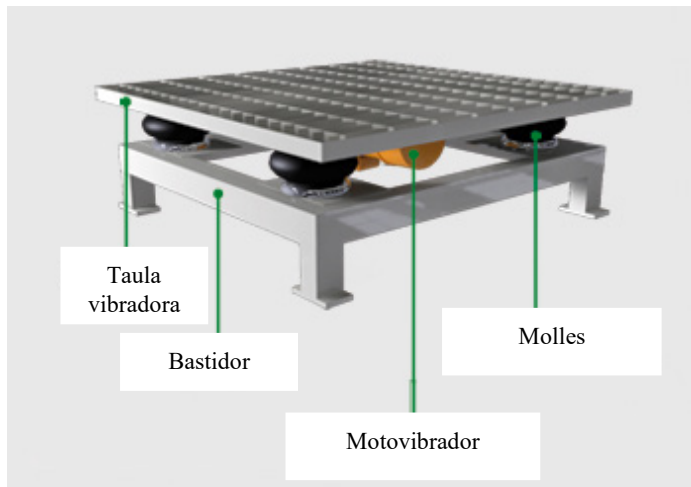
La freqüència reduïda és $\rho = \omega / \omega_0 = 6 / 1,51 = 3,97$.

És un moviment excitat per la base ($Y = 1,2$ mm, amplitud del moviment de la base). L'amplitud del moviment de la massa sísmica és:

$$X = Y \cdot \frac{1}{1 - \rho^2} = 1,2 \cdot \frac{1}{1 - 3,97^2} = -0,081 \text{ mm}$$

L'amplitud del moviment de la massa sísmica és 14,8 vegades inferior al de la base.

2.3.14 Taula vibradora



Com indica la figura, una taula vibradora és una màquina que provoca la vibració de la taula amb l'objectiu de fer avançar objectes que es troben al seu damunt. La vibració és essencialment horitzontal i se sol combinar amb una petita vibració vertical a fi de facilitar l'efecte combinat de petits salts amb la fricció que impedeixen el retrocés dels objectes.

En aquest cas, el sistema se simplifica i tan sols es considera el moviment vibratori horitzontal.

La massa de la taula vibradora és $m_T = 100$ kg i està suportada per un sistema elàstic que permet el desplaçament horitzontal equivalent a una molla de constant K . Empenyent lateralment la taula amb una força estàtica de 240 N, aquesta experimenta una deformació estàtica de 12 mm.

Sota la taula vibradora, hi ha un sistema motovibrador format per un motor de massa $m_M = 20$ kg i un rotor amb una massa desequilibrada m_e a una excentricitat e , i tots dos valors són desconeguts. Es demana (enunciat i resolució):

a. Freqüència pròpia del sistema

En primer lloc, cal calcular la rigidesa horitzontal del sistema de suport elàstic de la taula. Es coneix una força que s'hi aplica i la deformació corresponent:

$$K = F_{est}/X_{est} = 240 / 0,012 = 20.000 \text{ N/m}$$

Cal considerar la suma de la massa de la taula i la del sistema motovibrador. Per tant, la freqüència pròpia és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_T + m_M}} = \sqrt{\frac{20.000}{100 + 20}} = 12,91 \text{ rad/s} = 123,28 \text{ min}^{-1}$$

b. Quan el motor gira a la velocitat de 200 min⁻¹, s'observa que l'amplitud del moviment de la taula és de $X = 1,5$ mm. Es demana deduir el valor del desequilibri del rotor del motor donat pel producte $m_e \cdot e$ (en kg·m)

La velocitat angular reduïda és $\rho = \omega / \omega_0 = 200 / 123,28 = 1,62$.

La relació de paràmetres d'aquest moviment forçat per una inèrcia és:

$$X = \frac{m_e \cdot e}{m_T + m_M} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = X_0 \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

Aïllant el producte $m_e \cdot e$ de l'equació anterior, s'obté:

$$m_e \cdot e = X \cdot (m_T + m_M) \cdot \frac{1 - \rho^2}{\rho^2} = 0,015 \cdot (100 + 20) \cdot \frac{1 - 1,62^2}{1,62^2} = 0,1116 \text{ kg·m}$$

$$X_0 = \frac{m_e \cdot e}{m_T + m_M} = \frac{0,1116}{100 + 20} = 0,000930 \text{ m} = 0,93 \text{ mm}$$



c. A quina velocitat cal sincronitzar el motor per tal que la taula vibradora oscil·li amb una amplitud de $X = 10 \text{ mm}$?

Ara, aïllant el valor de la velocitat reduïda a l'equació anterior, s'arriba a:

$$\rho = \sqrt{\frac{X}{X + X_0}} = \sqrt{\frac{10}{10 + 0,93}} = 1,050$$

$$\omega = \rho \cdot \omega_0 = 1,050 \cdot 12,910 = 13,56 \text{ rad/s} = 129,4 \text{ min}^{-1} \text{ (per sobre de la ressonància)}$$

També:

$$\rho = \sqrt{\frac{-X}{-X + X_0}} = \sqrt{\frac{-10}{-10 + 0,93}} = 0,956$$

$$\omega = \rho \cdot \omega_0 = 0,956 \cdot 12,910 = 12,35 \text{ rad/s} = 117,9 \text{ min}^{-1} \text{ (per sota de la ressonància).}$$

2.3.15 Rentadora domèstica amb grup flotant

El grup flotant d'una rentadora domèstica pesa $m_{GF} = 60 \text{ kg}$ i està suportat verticalment per quatre molles, cadascuna d'elles de rigidesa $K_1 = 5.000 \text{ N/m}$. Durant el rentat, l'emplenament màxim d'aigua és de 40 litres i, durant la centrifugació, que assoleix una velocitat de 900 min^{-1} , la massa de la roba mullada és de $m = 15 \text{ kg}$ i arriba a una excentricitat respecte a l'eix del tambor de $e = 10 \text{ mm}$.

Es demana:

a. Deformació estàtica màxima que experimenten les molles quan el grup flotant carrega la màxima quantitat d'aigua

La deformació estàtica màxima de les molles correspon a la càrrega màxima, és a dir, al pes del grup flotant amb la màxima quantitat d'aigua:

$$F_{\text{màx}} = (m_{GF} + m_{\text{aigua}}) \cdot g = (60 + 40) \cdot 9,81 = 981 \text{ N}$$

La rigidesa del conjunt de les 4 molles (en paral·lel) és:

$$K = 4 \cdot K_1 = 4 \cdot 5.000 = 20.000 \text{ N/m}$$

La deformació màxima estàtica és:

$$\delta_{\text{est}} = F_{\text{màx}} / K = 981 / 20.000 = 0,049 \text{ m} = 49 \text{ mm}$$

b. Freqüència pròpia del moviment vertical del grup flotant amb la roba mullada

La freqüència pròpia del grup flotant amb roba mullada és:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_{GF} + m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5.000}{60 + 15}} = 16,33 \text{ rad/s} = 155,9 \text{ min}^{-1}$$

c. Amplitud del moviment d'oscil·lació vertical del grup flotant quan gira a la màxima velocitat (900 min^{-1})

La freqüència reduïda és $\rho = \omega / \omega_0 = n / n_0 = 900 / 155,9 = 5,77$.

L'amplitud de moviment a una velocitat de gir qualsevol és:

$$X = \frac{m \cdot e}{m_{GF} + m} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{15 \cdot 0,01}{60 + 15} \cdot \frac{5,77^2}{1 - 5,77^2} = -0,00206 \text{ m} = -2,06 \text{ mm}$$

El moviment del grup flotant té sentit contrari al del desequilibri.

2.3.16 Combinacions de masses i molles

Es disposa de diverses masses iguals de $m = 0,8 \text{ kg}$ cadascuna, que es poden acoblar entre si per formar una massa més gran, i també de diverses molles iguals, de $K = 1.500 \text{ N/m}$ cadascuna.

Es demana la freqüència pròpia dels muntatges de masses i molles següents:

a. *Una massa unida a la base a través de tres molles en sèrie*

La massa, la rigidesa i la freqüència pròpies d'aquest sistema són: $m_T = 0,8 \text{ kg}$

$$K_T = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{1}{K}} = \frac{1}{3 \left(\frac{1}{1.500} \right)} = 500 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T}{m_T}} = \sqrt{\frac{500}{0,8}} = 25,0 \text{ rad/s} = 238,7 \text{ min}^{-1}$$

b. *Quatre masses acoblades entre si, unides a la base per dos conjunts de dues molles en sèrie*

La massa, la rigidesa i la freqüència pròpies d'aquest sistema són:

$$m_T = 4 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ kg}$$

$$K_T = \frac{2}{\frac{1}{K} + \frac{1}{K}} = \frac{2}{2 \left(\frac{1}{1.500} \right)} = 1.500 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T}{m_T}} = \sqrt{\frac{1.500}{3,2}} = 21,7 \text{ rad/s} = 206,7 \text{ min}^{-1}$$

c. *Dues masses acoblades entre si, unides per dues molles en paral·lel a una altra massa*

$$m_A = 2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ kg}$$

$$m_B = 1 \cdot 0,8 = 0,8 \text{ kg}$$

$$K_T = 2 \cdot K = 2 \cdot 1.500 = 3.000 \text{ N/m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{K_T \cdot \frac{m_A + m_B}{m_A \cdot m_B}} = \sqrt{3.000 \cdot \frac{1,6 + 0,8}{1,6 \cdot 0,8}} = 75,0 \text{ rad/s} = 712,2 \text{ min}^{-1}$$

→ 3



Motorització de màquines

Aquest capítol prové de l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics del Grau en Enginyeria Química que l'autor va impartir a l'ETSEIB entre els anys 2011 i 2016. Malgrat el seu nom oficial ("Disseny de..."), la matèria s'orienta al coneixement de les motoritzacions de les màquines per a la seva utilització més adequada i va destinada a professionals de la química per als quals les màquines i els equips són eines amb què treballen.

La majoria de les màquines que intervenen en els processos de la indústria química (bombes per a líquids, cintes transportadores, ventiladors, agitadors, mescladores, centrifugadores, bombes de calor) són impulsades per motors majoritàriament asíncrons, alimentats a través de la xarxa elèctrica, que funcionen en règim estacionari o quasi estacionari; és a dir, quan està en funcionament, la màquina receptora no requereix variacions de velocitat i/o de parell (o en requereix poques).

Al maig de 1988, l'autor va publicar un recull de documentació titulat *Selecció de motors i transmissions en el projecte mecànic* (referenciat a la bibliografia) com a material de suport a diverses assignatures d'enginyeria mecànica i d'enginyeria de les màquines. La primera part (accionaments de potència) constitueix un suport per als qüestionaris i els exercicis de motorització de màquines inclosos en aquest text.

Aquest capítol s'organitza en tres seccions: 3.1. Motorització de màquines: introducció; 3.2. Motorització de màquines: qüestionari, i 3.3. Motorització de màquines: exercicis.

En aquest capítol, s'ha considerat oportú incloure una introducció sobre la motorització de màquines (secció 3.1), en què se'n resumeixen els conceptes i les fórmules.

El qüestionari de la secció 3.2 prové dels exàmens parcials de l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics. Concretament, les qüestions 3.2.1 a 3.2.4, de l'examen d'abril del 2012; la 3.2.5, de juny del 2012; la 3.2.6 i la 3.2.7, de novembre del 2012; de la 3.2.8 a la 3.2.10, d'abril del 2013; la 3.2.11, de novembre del 2013; de la 3.2.12 a la 3.2.15, d'abril del 2014; la 3.2.16 i la 3.2.17, de novembre del 2014; la 3.2.18 i la 3.2.19, d'abril del 2015; la 3.2.20 i la 3.2.21, de novembre del 2015; la 3.2.22, de gener del 2016; la 3.2.23 i la 3.2.24, d'abril del 2016, i la 3.2.25, de juny del 2016.



Finalment, els exercicis de la secció 3.3 provenen dels exàmens parcials de l'assignatura Disseny de Sistemes Mecànics. Concretament, l'exercici 3.3.1, de l'examen d'abril del 2012; el 3.3.2, de novembre del 2012; el 3.3.3, d'abril del 2013; el 3.3.4 i el 3.3.5, de novembre del 2013; el 3.3.6 i el 3.3.7, d'abril del 2014; el 3.3.8 i el 3.3.9, de novembre del 2014; el 3.3.10 i el 3.3.11, d'abril del 2015; el 3.3.12 i el 3.3.13, de novembre del 2015, i el 3.3.14, d'abril del 2016.

3.1 Motorització de màquines: introducció

3.1.1 Conceptes

L'objectiu d'aquest capítol és proporcionar elements per seleccionar i/o comprovar que un motor és adequat per moure una màquina tenint en compte fonamentalment el seu règim de funcionament permanent. Per tant, s'està lluny dels accionaments per a sistemes robòtics i de movimentació que treballen contínuament en règims transitoris, accelerant i desaccelerant les inèrcies dels seus elements i de la càrrega. Tampoc hi sol haver, en aquest tipus de màquines, moviments coordinats; en tot cas, un determinat eix pot requerir un control simple de velocitat a través d'un variador de freqüència. Per tot això, hem titulat aquest capítol *Motorització de màquines*.

Un *motor* transforma l'energia d'una font elèctrica, tèrmica, hidràulica o pneumàtica en energia mecànica en un eix angular (parell contra moviment angular) o en un eix lineal (força contra moviment lineal), mentre que el *receptor* transforma l'energia mecànica de l'eix receptor (angular o lineal) en una combinació de forces i moviments útils per a un aplicació determinada; la *transmissió* adequa els paràmetres que proporciona l'eix motor (com ara força/parell, velocitat lineal/angular, direcció, orientació, situació) en paràmetres adequats a l'eix del receptor.

Cadena d'accionament

La cadena d'accionament d'una motorització està formada pel motor, la transmissió i l'eix receptor de la màquina. En primer lloc, cal fer unes precisions sobre dues de les característiques principals de les transmissions: la relació de transmissió, i , i el rendiment, η .

Relació de transmissió

Es defineix com el quocient entre la velocitat d'entrada i la velocitat de sortida d'una transmissió. Atès que els eixos d'entrada i de sortida poden ser de moviment angular o lineals, la relació de transmissió pot tenir diverses magnituds segons els tipus de velocitats d'entrada i de sortida.

Rendiment de la transmissió

Es defineix com el quocient entre la potència de sortida i la potència d'entrada de la transmissió. Atès que la potència sempre té les mateixes unitats, tant en un eix angular com en un eix lineal, el rendiment (quocient de potències) sempre és un paràmetre adimensional.

Sovint, la transmissió global entre l'eix motor i l'eix receptor està formada per diverses etapes de transmissió (per exemple, un reductor amb tres engranatges successius) o de

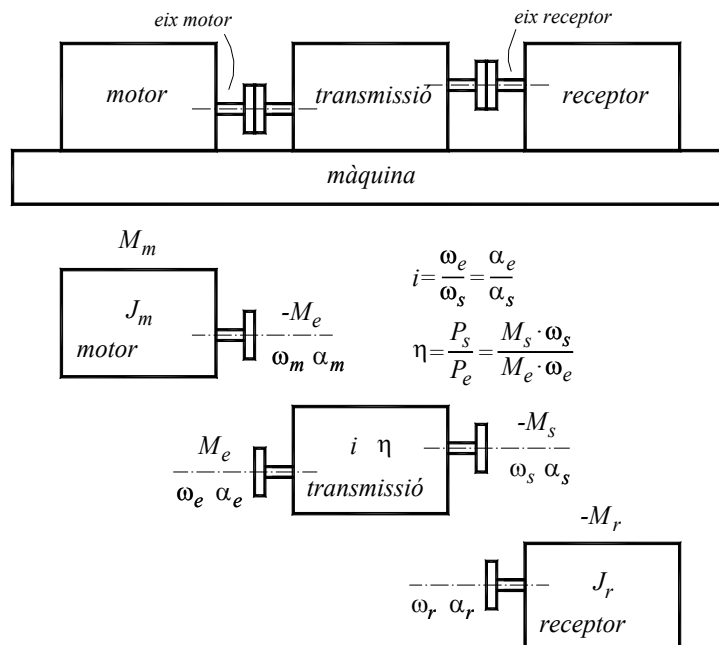
transmissions en sèrie (per exemple, un reductor d'engranatges, seguit d'una transmissió per cadena). Tant en la relació de transmissió com en el rendiment, el valor global és el producte dels components.

Relació de transmissió	Rendiment de la transmissió
$i = \frac{\text{velocitat d'entrada}}{\text{velocitat de sortida}}$	$\eta = \frac{\text{Potència de sortida}}{\text{potència d'entrada}}$
$i = \frac{\omega_e}{\omega_s} \quad (-) \quad i = \frac{\omega_e}{v_s} \left(\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right)$ $i = \frac{v_e}{\omega_s} \left(\frac{\text{m}}{\text{rad}} \right) \quad i = \frac{v_e}{v_s} \quad (-)$	$\eta = \frac{M_s \cdot \omega_s}{M_e \cdot \omega_e} \quad (-) \quad \eta = \frac{M_s \cdot \omega_s}{F_e \cdot v_e} \quad (-)$ $\eta = \frac{F_s \cdot v_s}{M_e \cdot \omega_e} \quad (-) \quad \eta = \frac{F_s \cdot v_s}{F_e \cdot v_e} \quad (-)$
$i_T = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdots i_n$	$\eta_T = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_n$

Aplicant aquestes definicions de relació de transmissió i de rendiment, les equacions resulten coherents, des del punt de vista dimensional, independentment de si els arbres motor i receptor són de moviment angular o lineal.

Model de cadena d'accionament

La figura següent esquematitza la cadena d'accionament (motor, transmissió i receptor), que s'exemplifica, en aquest cas, amb eixos angulars (tant del motor com del receptor), amb la indicació de tots els paràmetres cinemàtics i dinàmics significatius, des del punt de vista del seu comportament dinàmic.





- M_m = parell motor (moviment angular)
- M_r = parell receptor (moviment angular)
- ω_m = velocitat angular de l'eix motor (moviment angular)
- ω_r = velocitat angular de l'eix receptor (moviment angular)
- J_m = moment d'inèrcia de l'eix motor (moviment angular)
- J_r = moment d'inèrcia de l'eix receptor (moviment angular)
- P_m = potència de l'eix motor
- P_r = potència de l'eix receptor
- i = relació de transmissió
- η = rendiment de la transmissió

Aplicant les equacions de la mecànica, i considerant que la relació de transmissió és constant ($i = \text{constant}$; el cas més freqüent en les màquines) s'arriba a la següent equació dinàmica de l'accionament simple d'un grau de llibertat:

$$M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta} = \left(J_m + \frac{J_r}{i^2 \cdot \eta} \right) \cdot \alpha_m$$

Agrupant termes, es pot reescriure aquesta equació de la forma següent:

$$M_{R(m)} = J_{R(m)} \cdot \alpha_m \quad \text{on:} \quad M_{R(m)} = M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta} \quad \text{i} \quad J_{R(m)} = \left(J_m + \frac{J_r}{i^2 \cdot \eta} \right)$$

que es pot llegir de la manera següent: l'accionament, format per l'eix motor i l'eix receptor que es mouen a diferents velocitats amb els parells i els moments d'inèrcia associats, es comporta com un sistema simple, reduït a l'arbre motor del tipus $M = J \cdot \alpha$ (equivalent a $F = m \cdot a$, força igual a massa per acceleració, en el moviment lineal). En aquest cas, però, aquests paràmetres són reduïts a l'eix motor, parell reduït, $M_{R(m)}$, i moment d'inèrcia reduït, $J_{R(m)}$.

En general, sol ser més interessant relacionar els paràmetres del sistema amb l'acceleració de l'eix receptor, que és el que volem moure. Atès que la relació entre l'acceleració de l'eix motor i la de l'eix receptor és $\alpha_m = i \cdot \alpha_r$, l'equació anterior es transforma en:

$$M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta} = \left(i \cdot J_m + \frac{J_r}{i \cdot \eta} \right) \alpha_r \quad \alpha_r = \frac{M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta}}{\left(i \cdot J_m + \frac{J_r}{i \cdot \eta} \right)}$$

Aquesta equació pren quatre formes diferents, en funció de les combinacions d'eixos motor i receptor lineals o angulars (a totes elles, les definicions de la relació de transmissió, i , anteriors fan que les equacions siguin coherents, des del punt de vista dimensional:

Angular – angular	Angular – lineal	Lineal – angular	Lineal – lineal
$\alpha_r = \frac{M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta}}{\left(i \cdot J_m + \frac{J_r}{i \cdot \eta} \right)}$	$v_r = \frac{M_m - \frac{F_r}{i \cdot \eta}}{\left(i \cdot J_m + \frac{m_r}{i \cdot \eta} \right)}$	$\alpha_r = \frac{F_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta}}{\left(i \cdot m_m + \frac{J_r}{i \cdot \eta} \right)}$	$v_r = \frac{F_m - \frac{F_r}{i \cdot \eta}}{\left(m + \frac{m_r}{i \cdot \eta} \right)}$

3.1.2 Motorització

Quan un sistema motor/transmissió/receptor funciona a règim permanent o estacionari, la velocitat és constant (l'acceleració = 0). Per al cas d'un accionament angular-angular (el cas més freqüent a les màquines, especialment en la indústria química i similars), i tenint en compte la definició de relació de transmissió, $i = \omega_m/\omega_r$, l'equació dinàmica general del sistema se simplifica en:

$$\alpha_r = 0 \Rightarrow M_m - \frac{M_r}{i\eta} = 0 \Rightarrow M_m = \frac{M_r}{i\eta} \Rightarrow M_m \cdot \omega_m = \frac{M_r \cdot \omega_r}{\eta} \Rightarrow P_m = \frac{P_r}{\eta}$$

A fi d'avaluar la potència necessària del motor, P_m , es parteix de la potència absorbida per l'eix receptor, P_r , i es divideix pel rendiment de la transmissió, η . Si es disposa del parell receptor M_r , per avaluar el parell motor M_m , es divideix pel rendiment η i la relació de transmissió i .

En els accionaments angular-lineal, lineal-angular o lineal-lineal, les definicions corresponents de la relació de transmissió fan coherents les equacions, des del punt de vista dimensional:

$$M_m = \frac{F_r}{i\eta} \quad i = \frac{\omega_m}{v_r} \quad (\text{m}^{-1}); \quad F_m = \frac{M_r}{i\eta} \quad i = \frac{v_m}{\omega_r} \quad (\text{m}); \quad F_m = \frac{F_r}{i\eta} \quad i = \frac{v_m}{v_r} \quad (-);$$

Parell nominal

La limitació principal d'un motor elèctric és tèrmica. Cal que la temperatura resultant del balanç entre la calor generada per efecte Joule i la calor dissipada pel motor (molts d'ells porten ventiladors) no s'elevi més enllà de la que resisteixen els vernissos d'aïllament que cobreixen els fils de coure dels enrotllaments. Superada aquesta temperatura, els vernissos es destrueixen, es produeixen curtcircuits interns i el motor es col·lapsa (diem que es "crema").

El punt nominal d'un motor elèctric (N de la figura, determinat pel parell nominal M_N i la velocitat nominal ω_N) correspon al punt més elevat de la característica mecànica a què un motor pot funcionar indefinidament sense fallar, amb la temperatura ambient de 20°C.

En motoritzar un receptor que realitza cicles repetits de curta durada amb oscil·lacions de la càrrega, la potència instantània del motor pot superar puntualment la potència nominal, però la potència mitjana en un cicle P_{mit} (calculada segons la fórmula següent) no ha de superar la potència nominal:

$$P_{mit} = \sqrt{\frac{P_1^2 \cdot t_1 + P_2^2 + \dots + P_n^2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}} \leq P_N = M_N \cdot \omega_N$$

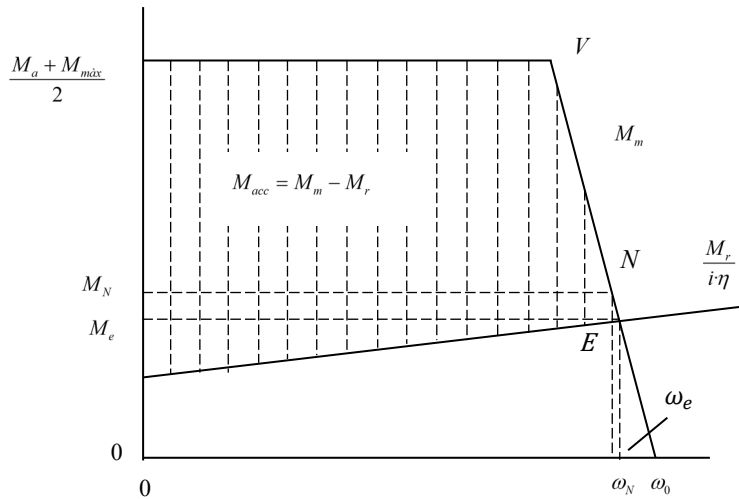
La calor generada pel motor durant un cicle és proporcional a la seva potència mitjana.

Escalfament durant l'engegada

Molts dels accionaments de potència funcionen amb motors asíncrons i, durant l'arrencada i fins a les proximitats del valor d'equilibri, el motor dissipa una gran part de la potència elèctrica que rep en forma de calor; no succeeix el mateix al voltant del punt

nominal de funcionament, en què el rendiment entre l'energia elèctrica i l'energia mecànica és molt més elevat.

Normalment, l'engegada és curta (0,1 a pocs segons) i l'escalfament en aquesta etapa té poca incidència. Tanmateix, si les inèrcies del sistema són significatives (especialment, a l'eix receptor), el temps d'acceleració pot ser molt més llarg i comportar un escalfament del motor fins a la seva fallada (a "cremar-se"). En aquests casos, convé estimar el temps d'arrencada per comprovar que no és excessiu. Els bons catàlegs de motors indiquen el temps màxim d'engegada que cal no sobrepassar, però, en tot cas, un valor límit acceptat per als motors asíncrons industrials és d'uns 10 s.



Les corbes característiques del motor (M_m, ω_m) i el receptor (M_r, ω_r) solen tenir formes que no són fàcils de tractar matemàticament; l'acceleració varia contínuament i el temps s'hauria d'obtenir per integració. L'equació dinàmica del sistema permet calcular l'acceleració de l'eix motor, i el temps d'engegada seria la integral del quocient del diferencial de velocitat angular del motor, dividit per l'acceleració de cada moment entre la velocitat zero i la del punt d'equilibri, ω_e .

$$\alpha_m = \frac{M_m - \frac{M_r}{i \cdot \eta}}{J_m + \frac{J_r}{i^2 \cdot \eta}} \quad t = \int_0^{\omega_e} \frac{d\omega_m}{\alpha_m}$$

A efectes pràctics, el càlcul d'aquest integral és irrealitzable. Per això, es proposa un mètode simplificat (essent un sumatori, els errors són petits), que consisteix a esquematitzar la corba característica del motor per mitjà d'una línia trencada (v. figura anterior) amb un tram horitzontal el valor del qual és la mitjana entre el parell d'arrencada i el parell màxim, $(M_a + M_{m\max})/2$, i un segon tram de pendent negatiu que passa pel punt nominal (M_N, ω_N) i el punt de funcionament en buit, o sense càrrega ($M_m = 0, \omega = \omega_0$).

El temps d'engegada es pot avaluar per mitjà d'un sumatori per a unes quantes franges de velocitat prenent el valor mitjà dels parells motor i receptor (i l'acceleració corresponent) a cada una d'elles (sovint n'hi ha prou a arribar al punt V del gràfic):

$$\alpha_{m(i)} = \frac{M_{m(i)} - \frac{M_{r(i)}}{i \cdot \eta}}{J_m + \frac{J_r}{i^2 \cdot \eta}} \quad t = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \omega_{m(i)}}{\alpha_{m(i)}}$$

3.2 Motorització de màquines: qüestionari

1. Què és la característica mecànica d'un motor?

La característica mecànica d'un motor és la corba que relaciona el parell que proporciona el motor amb la velocitat angular a què gira, en condicions estacionàries (sense variar la velocitat).

2. Per què serveix una transmissió mecànica?

Les transmissions mecàniques poden combinar una o més de les funcions següents:

- Canviar la relació de velocitats entre l'eix d'entrada i l'eix de sortida (un reductor, un multiplicador).
- Transmetre el moviment d'un eix lineal a un eix angular, o viceversa (pinyó-cremallera, cargol de boles, cable-politja).
- Traslladar el moviment de l'eix d'entrada a un eix de sortida a una certa distància (els paliers en la transmissió d'un automòbil).
- Modificar l'orientació en l'espai de l'eix de sortida respecte al d'entrada (transmissions d'eixos concurrents o encreuats).
- Altres funcions (canvis de marxa, inversors).

3. Si, en una grua, es connecta el motor en el sentit de baixada, la càrrega baixa més ràpida o més lenta que en caiguda lliure?

En la caiguda lliure, la càrrega s'acceleraria amb l'acceleració de la gravetat, o a una velocitat lleugerament inferior si accelera òrgans de la grua.

Si es connecta el motor en sentit de baixada, el motor actua com a fre i baixa a una velocitat constant, si bé molt probablement lleugerament més elevada que a la pujada.

4. Quin tipus de característica mecànica té una escala mecànica?

La característica mecànica (de receptor) d'una escala mecànica és constant. Això s'explica perquè és el resultat d'una composició de característiques parcials constants:

- El treball contra la gravetat en l'elevació (o en el descens) dels passatgers
- Els freds dels diferents òrgans de la màquina.



5. Quina diferència hi ha entre una transmissió per corretja i una transmissió per cadena? En cas d'haver de transmetre un parell elevat a baixa velocitat, quina de les dues transmissions és millor?

Les transmissions per corretja transmeten el moviment i la força gràcies a l'adherència entre la corretja i la politja (transmissió per força), mentre que les transmissions per cadena ho fan gràcies a la forma entre les dents de les rodes i les baules de la cadena (transmissió per forma).

Si les dimensions són iguals, les transmissions per forma són més adequades per transmetre grans parells a baixa velocitat, mentre que les transmissions per força adherent (o "fricció", en el llenguatge comú) transmeten parells menors però permeten altes velocitats, en ser un sistema continu sense dents. Per tant, en el cas de l'enunciat, és millor una transmissió per cadena.

6. Quina potència desenvolupa una persona de 70 kg que puja un graó de 170 mm per segon?

El pes de la persona és $F = m \cdot g = 70 \cdot 9,81 = 686,7$ N (l'acceleració de la gravetat és $9,81 \text{ m/s}^2$). La velocitat d'elevació contra la gravetat és de $v = 0,17$ m/s.

Per tant, la potència d'elevació de la persona és $P = F \cdot v = 686,7 \cdot 0,17 = 116,74$ W.

7. A què s'aplica el concepte de rendiment?

El rendiment és la relació entre la potència d'entrada d'un convertidor d'energia (motor, transmissió) i la potència de sortida. Aplicat a una transmissió entre eixos angulars, s'expressa:

$$\eta = \frac{P_e}{P_s} = \frac{M_e \cdot \omega_e}{M_s \cdot \omega_s} < 1$$

El rendiment sempre és inferior a 1:

8. Es pot deduir la característica mecànica d'un motor de la seva característica de potència?

Sí. La característica mecànica és la relació entre el parell d'un motor i la seva velocitat angular, i la característica de potència és la relació entre la potència del motor i la velocitat angular.

Dividint a cada punt la potència per la velocitat angular corresponent, s'obté el parell corresponent de la característica mecànica.

9. Si, en l'equilibri, la característica mecànica del receptor és constant i la del motor té un pendent creixent, l'equilibri és estable o inestable?

L'equilibri és inestable

En aquest cas, $dM_m/d\omega_m > dM_r/d\omega_r$; si la velocitat del sistema disminueix respecte de la del punt d'equilibri, el parell accelerador és $M_a = M_m - M_r < 0$, l'acceleració és negativa

i el sistema tendeix a aturar-se, i, si augmenta respecte al punt d'equilibri, el parell accelerador i l'acceleració són positives, i el sistema tendeix a embalar-se.

En ambdós casos, el sistema s'allunya del punt d'equilibri.

10. Coneixent els parells d'entrada i de sortida d'un reductor, se'n pot obtenir el rendiment?

No n'hi ha prou. Cal conèixer també la relació de transmissió.

L'expressió del rendiment d'un reductor és:

$$\eta = \frac{P_e}{P_s} = \frac{M_e \cdot \omega_e}{M_s \cdot \omega_s} = \frac{M_e}{M_s \cdot \frac{\omega_s}{\omega_e}} = \frac{M_e}{M_s \cdot i} < 1$$

11. Què passa si es bloqueja el moviment del rotor d'un motor asíncron després d'haver-lo connectat al corrent?

Si es bloqueja el moviment del rotor a l'arrencada, no es produeix la força contraelectromotriu, la intensitat que circula pels debanats és de l'ordre de 4 a 8 vegades la intensitat nominal i el motor s'acaba cremant en molt poc temps: l'augment de la temperatura deteriora el vernís aïllant que recobreix els fils del debanat, que es fonen; s'interromp el corrent elèctric, i el motor mor.

12. La potència d'entrada i la de sortida d'un reductor, són iguals?

La potència d'entrada i la potència de sortida d'un reductor solen ser semblants, però la primera és més gran que la segona. El quocient és el rendiment de la transmissió, que és inferior a 1, tot i que sol ser relativament proper a la unitat.

13. Què és el punt nominal de funcionament d'un motor elèctric?

El punt nominal d'un motor elèctric és el de parell més elevat en què el motor pot funcionar de forma contínua sense que es cremin els vernissos aïllants dels debanats per excés de temperatura. Es referencia a una temperatura ambient de 20°C.

Quan la temperatura ambient és diferent de 20°C, les condicions de funcionament nominal canvien. Si és més baixa (per exemple, 0°C), la dissipació de calor al medi ambient és més elevada i el motor pot funcionar de forma contínua a més potència que la nominal; si, per contra, és més alta (per exemple, 40°C), la dissipació de calor al medi ambient és més baixa i la potència de funcionament continu s'ha de limitar respecte de la nominal.

14. Quina és la velocitat de sincronisme d'un motor elèctric de quatre pols, connectat a una xarxa de corrent altern de 60 Hz de freqüència?

La velocitat de sincronisme és el producte de la freqüència f (en Hz) per 60 s/min, dividit pel nombre de parelles de pols pp . És a dir:



$$n_0 = \frac{60 \cdot f}{pp} = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1.800 \text{ min}^{-1}$$

15. Doneu dos exemples de receptor que tinguin una característica mecànica constant (o pràcticament constant).

Exemple 1: una grua (treballa contra la gravetat; la força no depèn de la velocitat).

Exemple 2: el moviment d'un vehicle sobre rodes (en una primera aproximació, la resistència al rodolament no depèn de la velocitat a què es mou el vehicle).

16. El rendiment d'una transmissió pot ser superior a 1? Argumenteu la resposta.

Tota transmissió dissipa una part de la potència que rep.

El rendiment és el quocient entre la potència d'entrada i la potència de sortida. Per tant, sempre és inferior a 1. En cas de transmissions extraordinàriament eficients, el rendiment pot ser molt proper a 1, però mai superior.

17. Si, per mitjà d'un variador de freqüència, s'alimenta un motor síncron de dotze pols amb un corrent altern de 30 Hz de freqüència, a quina velocitat girarà el rotor?

La velocitat de sincronisme elèctric és de $30 \text{ Hz}(\text{cicles/s}) \cdot 60 \text{ s/min} = 1.800 \text{ min}^{-1}$.

Si el motor és de dotze pols (parelles de pols, $pp = 6$), això vol dir que, mecànicament, el motor síncron gira 6 vegades més lent que el sincronisme elèctric: $1.800/6 = 300 \text{ min}^{-1}$.

18. Com baixarà més ràpidament la càrrega d'una grua en el descens: a) si no es connecta elèctricament el motor; b) si el motor es connecta en el sentit del descens de la càrrega? Argumenteu la resposta.

- a. Si el motor no es connecta elèctricament, la càrrega baixa en caiguda lliure, tan sols moderada per l'acceleració dels elements de la cadena de transmissió.
- b. Si el motor es connecta elèctricament en el sentit del descens de la càrrega, la càrrega passa a ser el motor i el motor, el fre. La velocitat d'equilibri és a la zona de fre del motor, una mica més ràpid que la corresponent a la velocitat en buit del motor.

19. Quina diferència fonamental hi ha entre un motor de corrent continu en paral·lel amb col·lector de delgues i un motor sense escobretes (*brushless motor*)?

Els dos motors tenen el mateix tipus de característica mecànica i són excel·lents per controlar la velocitat i la posició.

Les diferències estan en la forma constructiva. En el motor de corrent continu en paral·lel, els bobinatges estan situats en el rotor i la commutació es realitza mecànicament a través del col·lector de delgues; en els motors sense escobretes, els bobinatges són

en l'estator (al rotor hi ha un imant permanent) i la commutació es realitza electrònicament a partir d'un sensor de posició angular (normalment, d'efecte Hall).

Els motors de corrent continu en paral·lel produeixen espurnes en passar les escobretes d'una delga a la següent i, per tant, no són adequats en atmosferes explosives; alhora, les escobretes es van desgastant i requereixen manteniment.

Els motors sense escobretes no tenen cap d'aquests dos inconvenients. Tanmateix, és un motor mecatrònic que no funciona sense el control electrònic.

20. En quines circumstàncies cal utilitzar un motor tèrmic?

En general, és necessari utilitzar un motor tèrmic quan es requereix una energia important, combinada amb una gran autonomia: vehicles per a llargues distàncies, serres per treballar al bosc, maquinària agrícola, maquinària d'obres públiques.

Això és degut al fet que els combustibles líquids emmagatzemen una quantitat molt gran d'energia amb un pes i un volum raonables, un emmagatzemament d'energia que avui dia encara és molt problemàtic fer-lo amb bateries (especialment, pel pes i pel cost).

En el futur, tot fa pensar que els sistemes de més potència en aquest tipus d'aplicacions s'accionaran amb hidrogen i amb piles de combustible i, en una petita proporció, amb biocarburants.

21. Un reductor d'eixos paral·lels de relació de transmissió $i = 52$, quantes etapes té?

En els reductors d'eixos paral·lels, es pot considerar que la reducció màxima per etapa és de 4,5. Si un reductor tingués dues etapes, la seva reducció màxima seria de $4,5^2 = 20,25$ i, si en tingués tres, seria de $4,5^3 = 91,125$.

Per tant, una reducció de $i = 52$ requereix més de dues etapes, és a dir, tres.

22. Una transmissió per cadena és síncrona? És necessari que sigui síncrona la transmissió dels pedals a la roda d'una bicicleta?

En efecte, una transmissió per cadena sempre és síncrona, ja que la cadena fa que les rodes girin en relació amb el nombre de dents. No hi ha possibilitat de lliscament llevat que no es destrueixi la pròpia transmissió.

La transmissió entre els pedals i la roda d'una bicicleta no té per què ser síncrona. La bicicleta sol utilitzar una cadena (en comptes d'una corretja) per les forces elevades que cal transmetre a una velocitat relativament baixa i per evitar el tesat crític de la corretja.

23. En quines circumstàncies cal utilitzar un motor hidràulic?

En general, és necessari utilitzar un motor hidràulic (cilindre hidràulic o motor hidràulic angular) quan es requereix una força o un parell molt important en relació amb les dimensions de què es disposa. Els dispositius hidràulics solen ser pesants perquè han de ser robusts, atès que funcionen a pressions elevades.



Els motors hidràulics tenen l'inconvenient que cal disposar d'una centraleta hidràulica (el conjunt d'una bomba hidràulica, un acumulador i les vàlvules de control corresponents).

24. Quin pot ser el rendiment aproximat d'un reductor d'eixos paral·lels amb una relació de transmissió $i = 39$?

En els reductors d'eixos paral·lels, es pot considerar que la reducció màxima per etapa és de 4,5. Si el reductor tingués dues etapes, la seva reducció màxima seria de $4,5^2 = 20,25$ i, si en tingués tres, seria de $4,5^3 = 91,125$.

Amb una reducció de $i = 39$, calen tres etapes.

Atès que, en els reductors industrials, per a un primer tempteig es pot considerar que hi ha una pèrdua de rendiment de 0,05 per etapa, el rendiment aproximat d'aquest reductor pot ser de 0,85.

25. Quines de les transmissions següents són síncrones i quines no: engranatge recte, engranatge cònic, corretja dentada, corretja trapezial?

L'engranatge recte, l'engranatge cònic i la corretja dentada transmeten per forma. Una dent d'una roda es correspon amb una dent de l'altra roda, o una dent de la corretja amb una dent de la poliça. Per tant, són síncrones.

En canvi, la corretja trapezial transmet gràcies a les forces de fricció. En no haver-hi una forma que obliga, es produeixen lliscaments de deriva (a causa de les deformacions per canvi de tensions) que fan que la transmissió no sigui síncrona.

3.3 Motorització de màquines: exercicis

3.3.1 Accionament d'una grua

Es parteix d'una grua que ha d'aixecar una càrrega de 300 kg a una velocitat aproximada d'1,5 m/s. L'accionament es compon d'un motor elèctric asíncron de quatre pols, un reductor d'engranatges i un tambor d'enrotllament del cable de 300 mm de diàmetre.

	Potència	Velocitat angular	Parell nominal	Intensitat nominal	Moment d'inèrcia	Massa
	kW	min ⁻¹	N·m	A	kg·m ²	kg
MBT 100 LA	2,2	1.415	15	5,4	0,0073	21
MBT 100 LB	3,0	1.415	20	7,0	0,0084	24
MBT 112 MC	4,0	1.430	27	9,0	0,0150	31
MBT 132 SA	5,5	1.445	37	12,7	0,0215	42
MBT 132 MC	7,5	1.445	50	16,4	0,0300	52
MBT 132 MD	9,0	1.450	60	19,6	0,0360	60

Considerant els motors de la taula anterior, es demana:

a. *Quina és la relació de transmissió entre el motor i el receptor (càrrega de la grua)?*

Tot i que no sabem quin serà el motor elegit, tots ells tenen velocitats nominals semblants. Es pren $1.430 \text{ min}^{-1} = 149,75 \text{ rad/s}$.

El receptor és la càrrega de la grua que cal elevar a la velocitat de $v = 1,5 \text{ m/s}$. Una primera estimació de la relació de transmissió total (motor-transmissió) és:

$$i_T = \omega_m / v_r = 149,75 / 1,5 = 99,8 \text{ rad/m}$$

b. *Descriu una possible cadena de transmissió entre el motor i el receptor*

La transmissió ha de resoldre dues funcions importants:

- a. Transformar el moviment angular del motor en el moviment lineal del cable
- b. Adequar la velocitat del motor a la del receptor (la càrrega que s'eleva)

La primera funció se sol resoldre amb una transmissió tambor-cable, mentre que la segona funció se sol ajustar amb un reductor entre el motor i el tambor.

c. *Estimeu les relacions de transmissió i el rendiment de les etapes de la transmissió*

Una grua d'aquest tipus pot funcionar amb un cable de 8 mm de diàmetre; a fi d'evitar una flexió excessiva del cable sobre l'enrotllament, s'adopta un diàmetre del tambor, d_T , d'unes 30 vegades el diàmetre del cable $d_{\text{cable}} = 8 \cdot 30 = 240 \text{ mm} = 0,240 \text{ m}$.

La relació de transmissió del cable-tambor és:

$$i_{\text{tamb}} = \omega_m / v_{\text{tamb}} = \omega_m / (\omega_m \cdot (d_{\text{tamb}} / 2)) = 2 / d_{\text{tamb}} = 2 / 0,240 = 4,166 \text{ rad/m}$$

La relació de transmissió del reductor haurà de cobrir la resta de la relació de transmissió:

$$i_{\text{red}} = i_T / i_{\text{tamb}} = 99,8 \text{ (rad/m)} / 4,166 \text{ (rad/m)} = 23,96 \text{ (rad/rad)}$$

d. *Estimeu el rendiment de la transmissió*

La transmissió es compon d'un reductor de relació de transmissió 23,96, seguida d'una transmissió tambor-cable.

Un reductor de relació de transmissió 23,96 és al límit de dues etapes ($< 5^2$). Junt amb la transmissió tambor-cable, el rendiment del conjunt de la transmissió es pot estimar com el d'una transmissió de tres etapes, amb unes pèrdues del 5 % per etapa; per tant, $\eta_T = 0,85$.

e. *Potència que absorbeix el receptor (la càrrega que s'eleva)*

La potència que absorbeix el receptor és:

$$P_r = (m_r \cdot g) \cdot v_r = (300 \cdot 9,81) \cdot 1,5 = 4.414,5 \text{ W} = 4,415 \text{ kW}$$



f. Potència mínima que hauria de proporcionar el motor. Elegiu el motor d'accionament entre els de la taula

L'elevació d'una càrrega pot requerir un temps suficientment llarg que requereixi dimensionar-lo a partir de la potència nominal. La potència nominal mínima que ha de proporcionar el motor és la potència del receptor, majorada a través de la inversa del rendiment de la transmissió:

$$P_m = P_r / \eta_T = 4,415/0,85 = 5,193 \text{ kW}$$

El primer motor de la taula que compleix aquestes condicions és MBT 132 SA.

3.3.2 Accionament d'un agitador

Un element agitador gira dintre d'una massa pastosa per tal d'uniformar-la. La característica mecànica d'aquest receptor és de tipus "viscós" i el parell resistent és de 40 N·m quan gira a 480 revolucions per minut.

A partir de les dades del conjunt de motors del problema anterior (3.3.1), es demana:

a. Potència absorbida pel receptor si gira a 600 revolucions per minut

Un parell viscós és proporcional a la velocitat. Per tant, el parell a 600 min⁻¹ és:

$$M_{(600)} = M_{(480)} \cdot (600/480) = 40 \cdot (600/480) = 50 \text{ N}$$

La potència absorbida pel receptor a aquesta velocitat és:

$$P_{(600)} = M_{(600)} \cdot \omega = 50 \cdot (480 \cdot \pi/30) = 2.513,3 \text{ W} = 2,513 \text{ kW}$$

b. Partint dels motors de l'enunciat, quina és la relació de transmissió entre el motor i el receptor?

Encara que no sabem quin serà el motor elegit, tots ells tenen velocitats semblants. Es pren 1.430 min⁻¹ = 149,75 rad/s.

Atès que el receptor gira a 600 min⁻¹, una primera estimació de la relació de transmissió és:

$$i = n_m/n_r = 1.430/600 = 2,383$$

c. Descriu els elements que podria tenir la transmissió entre el motor i el receptor. Estimeu el rendiment de la transmissió

Atès que un agitador no té cap requeriment de sincronisme i que les velocitats del motor i del receptor són relativament elevades, es pot utilitzar una corretja trapezoidal d'una sola etapa.

El rendiment pot ser de l'ordre de $\eta = 0,95$ (pèrdues d'un 5%).

d. Calculeu la potència mínima del motor per arrossegar l'element agitador

La potència del motor ha de ser, com a mínim, la del receptor, majorada per la inversa del rendiment de la transmissió:

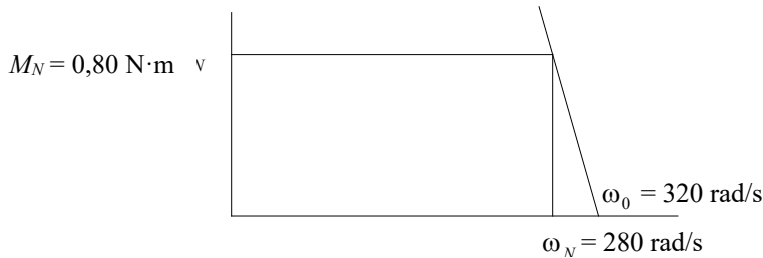
$$P_m = P_r / \eta = 2.513,3 / 0,95 = 2.645,55 \text{ W} = 2,645 \text{ kW}$$

e. *Elegiu el motor d'accionament*

D'entre els motors de l'enunciat, el primer que compleix amb la potència mínim calculada a l'apartat anterior és el MBT 100 LB (3.000 W = 3 kW).

3.3.3 Motorització d'un carretó de magatzem

Es vol motoritzar un carretó de magatzem de 32 kg de massa pròpia i que pot portar càrregues de 150 kg. Les rodes, de 180 mm de diàmetre, tenen un coeficient de rodolament aparent amb el terra de $\rho_a = 0,025$. S'acciona amb un motor de corrent continu que té la característica mecànica de la figura.



Es demana:

a. *Potència que absorbeix el carretó carregat quan supera un pendent del 3,5 % a una velocitat d'1,6 m/s*

Per desplaçar el vehicle, la força en la direcció del moviment ha de vèncer la resistència al rodolament (ρ_a) i el pendent (p , en fracció). La seva expressió és:

$$F_r = (m \cdot g) \cdot (\rho_a + p) = ((32 + 150) \cdot 9,81) \cdot (0,025 + 0,035) = 107,13 \text{ N}$$

La potència que absorbeix el carretó és el producte de la força per la velocitat:

$$P_r = F_r \cdot v_r = 107,13 \cdot 1,6 = 171,4 \text{ W}$$

Per a un càlcul més exacte, caldria haver projectat la força del pes en la direcció perpendicular al pla inclinat. Els resultats són quasi els mateixos:

$$F = 107,06 \text{ N}; P = 171,3 \text{ W}$$

b. *Descriviu els elements que podria tenir la transmissió entre el motor i receptor*

En aquest tipus de sistemes (tracció d'un vehicle), hi sol haver un reductor entre l'eix del motor i l'eix de les rodes, seguit de la transmissió rodes-terra (o rodes-vehicle).



c. Calculeu la relació de transmissió i estimeu-ne el rendiment

La relació de transmissió global entre el motor i el receptor (el vehicle) és:

$$i_T = \omega_m / v_r = 280 / 1,6 = 175 \text{ rad/m}$$

La relació de transmissió rodes-terra (o rodes-vehicle) és:

$$i_{roda-r} = \omega_{roda} / v_r = \omega_{roda} / (\omega_{roda} \cdot (d_{roda} / 2)) = 2 / d_{roda} = 2 / 0,180 = 11,111 \text{ rad/m}$$

La relació de transmissió del reductor haurà de cobrir la resta de la relació de transmissió:

$$i_{red} = i_T / i_{roda-r} = 175 \text{ (rad/m)} / 11,111 \text{ (rad/m)} = 15,75 \text{ (rad/rad)}$$

El reductor és de dues etapes ($4,5^1 < i < 4,5^2$); el rendiment de la transmissió de dues etapes es pot estimar en (pèrdua del 5 % per etapa): $\eta_T = 0,90$. El rendiment de la transmissió rodes-terra ja s'ha tingut en compte amb el coeficient de rodolament.

d. Calculeu el parell i la potència del motor quan mou el carretó carregat en pujada

La potència del motor s'obté a partir de la potència del receptor, augmentada per un factor igual a la inversa del rendiment:

$$P_m = P_r / \eta = 171,4 / 0,90 = 190,44 \text{ W}$$

e. Calculeu el parell del motor quan el carretó carregat es mou en el pla

Quan el carretó es mou en el pla, el pendent és nul ($p = 0$). L'expressió de la força i la potència del receptor és:

$$F_r = (m \cdot g) \cdot (\rho_a + p) = ((32 + 150) \cdot 9,81) \cdot (0,025 + 0) = 44,64 \text{ N}$$

$$P_r = F_r \cdot v_r = 44,64 \cdot 1,6 = 71,42 \text{ W}$$

i l'expressió del parell i de la potència del motor és:

$$M_m = F_r / (i_T \cdot \eta) = 44,64 / (175 \cdot 0,90) = 0,283 \text{ N}\cdot\text{m}; P_m = P_r / \eta = 71,42 / 0,90 = 79,35 \text{ W}$$

f. Calculeu la velocitat del carretó carregat en el pla (per interpolació)

El parell nominal del motor és $M_{mN} = 0,50 \text{ N}\cdot\text{m}$ i la velocitat nominal és $\omega_{mN} = 280 \text{ rad/s}$.

El parell del motor de funcionament en el pla és $M_{m(pla)} = 0,283 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Interpolant a la figura, dona:

$$\omega_{m(pla)} = \omega_{m0} - (\omega_{m0} - \omega_{mN}) \cdot \frac{M_{m(pla)}}{M_{mN}} = 320 - (320 - 280) \cdot \frac{0,283}{0,8} = 305,83 \text{ rad/s}$$

3.3.4 Ventilador

La característica mecànica d'un ventilador és $M_r = A \cdot \omega^2$, en què el moment receptor s'expressa en $\text{N}\cdot\text{m}$ i la velocitat angular, en rad/s ($A = 0,000025 (\text{N}\cdot\text{m})/(\text{rad/s})^2$).

S'acciona directament (el ventilador acoblat sobre l'eix del motor) per mitjà d'un motor asíncron de dos pols, que té un moment nominal de $M_{mN} = 3,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ i una velocitat nominal de $n_N = 2.800 \text{ min}^{-1}$.

Es demana:

a. *Potència que proporciona el motor en el punt nominal*

La potència del motor en el punt nominal és el producte del parell nominal per la velocitat angular en el punt nominal:

$$P_N = M_N \cdot \omega_N = M_N \cdot \left(n_N \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \right)^2 = 3,2 \cdot \left(2.800 \cdot \frac{3,141592}{30} \right)^2 = 938,3 \text{ N}$$

b. *Punt d'equilibri (M_e , ω_e) del sistema motor-ventilador*

Les equacions de les característiques mecàniques del motor i del receptor són les següents:

$$M_m = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_N} \cdot M_N \quad M_r = A \cdot \omega^2$$

El punt d'equilibri (ω_e , M_e) s'assoleix quan el parell motor s'iguala al parell receptor. Aquesta igualtat s'expressa a través de:

$$A \cdot \omega_e^2 \cdot P \cdot \omega - P \cdot \omega_0 \quad P = \frac{M_n}{\omega_0 - \omega_N}$$

$$\omega_e = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4 \cdot A \cdot P \cdot \omega_0}}{2 \cdot A} \quad M_e = A \cdot \omega_e^2$$

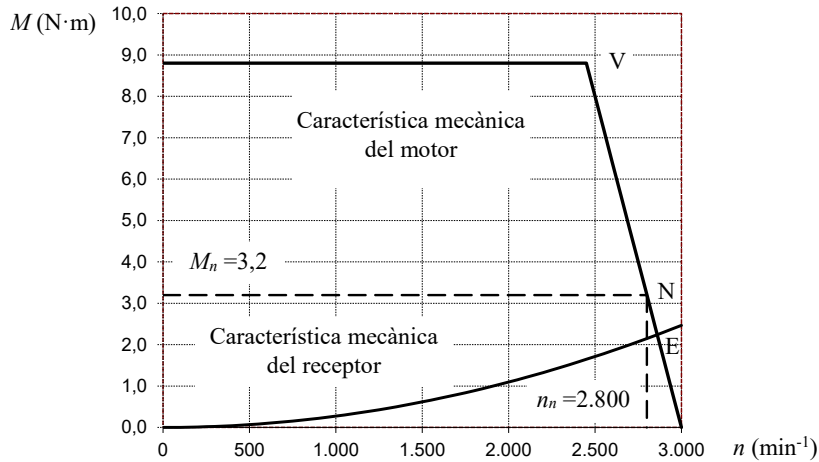
Aplicant-hi valors:

$$P = \frac{3,2}{314,2 - 293,2} = 0,1528 \text{ N m / (rad / s)}$$

$$\omega_e = \frac{-0,1528 + \sqrt{0,1528^2 + 4 \cdot 0,000025 \cdot 0,1528 \cdot 314,2}}{2 \cdot 0,000025} = 299,48 \text{ rad / s (2.860 min}^{-1}\text{)}$$

$$M_e = 0,000025 \cdot 299,48^2 = 2,242 \text{ N m}$$

c. *El punt d'equilibri se situa per sobre o per sota del punt nominal? Quina és la potència del sistema en el punt d'equilibri?*



El punt d'equilibri es troba per sota del punt nominal de funcionament:

$$\omega_N = 293,2 \text{ rad/s (} 2.800 \text{ min}^{-1}\text{); } M_N = 3,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

La potència que proporciona el motor i absorbeix el receptor (en cas de rendiment 1) és:

$$P_m = P_r = M_e \cdot \omega_e = 671,52 \text{ W}$$

3.3.5 Grua

Una grua ha de pujar 125 kg de càrrega a una velocitat de 0,5 m/s. Es preveu que s'accioni amb un motor asíncron de quatre pols (estimació de la velocitat nominal, 1.400 min⁻¹).

Es demana:

a. *Potència del receptor*

La potència del receptor és el producte de la força necessària per aixecar la càrrega per la velocitat d'ascensió de la càrrega:

$$P_r = F_r \cdot v_r = 125 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 613,1 \text{ W}$$

b. *Relació de transmissió global entre el motor i el receptor*

Serà el quocient entre la velocitat angular del motor i la velocitat lineal del receptor:

$$i_r = \frac{\omega_m}{v_r} = \frac{1.400 \cdot (\pi / 30)}{0,5} = 293,22 \text{ rad/s}$$

c. *Suposant que el tambor d'enrotllament del cable té un diàmetre de 200 mm, quina és la relació de transmissió necessària en el reductor?*

La relació de transmissió d'un sistema de cable-tambor és:

$$i_{tam} = \frac{\omega_{tam}}{v_{cab}} = \frac{\omega_{tam}}{\omega_{tam} \cdot (d_{tam} / 2)} = \frac{2}{d_{tam}} = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ rad / s}$$

La relació de transmissió del reductor serà, per tant:

$$i_{red} = \frac{i_T}{i_{tam}} = \frac{293,22}{10} = 29,32 \text{ (rad / rad)}$$

3.3.6 Vehicle sobre rails

Es vol motoritzar un vehicle elèctric de 10.000 kg de massa que es mou sobre rails. La resistència al rodolament de les rodes sobre les vies en el pla és equivalent a un coeficient de fricció de $\mu = 0,005$.

Es demana:

a. Força resistent en el pla i per a un pendent ascendent d'un 1 %

La resistència al rodolament és $(m \cdot g) \cdot \mu = 10.000 \cdot 9,81 \cdot 0,005 = 490,5 \text{ N}$.

La resistència al pendent és $(m \cdot g) \cdot p = 10.000 \cdot 9,81 \cdot 0,01 = 981,0 \text{ N}$.

La resistència total en el pendent serà la suma dels dos valors anteriors: 1.471,5 N

b. Si la velocitat del vehicle és de 25,2 km/h, calculeu la relació de transmissió entre el motor asíncron de quatre pols i les rodes de 500 mm de diàmetre

La velocitat del vehicle és de $25,2/3,6 = 7 \text{ m/s}$ i la velocitat angular d'un motor asíncron de quatre pols és, aproximadament, de 140 rad/s. Per tant, la relació de transmissió total és $i_T = 140/7 = 20 \text{ rad/m}$.

La relació de transmissió de rodes/carril és de $i_{rc} = \omega_r / (\omega_r \cdot (d_r/2)) = 2/d_r = 2/0,5 = 4 \text{ rad/m}$.

La relació de transmissió del reductor és $i_{red} = i_T / i_{rc} = 20 \text{ rad/m} / 4 \text{ rad/m} = 5 \text{ (rad/rad)}$.

c. Determineu el motor elèctric asíncron per moure el vehicle en cas de pujada

La potència del receptor en cas de pujada és $P_r = F_r \cdot v = 1.471,5 \cdot 7 = 10.300,5 \text{ W}$.

El reductor pot ser d'una etapa: $\eta = 0,95$

La potència del motor serà $P_m = P_r / \eta = 10.300,5 / 0,95 = 10.842,6 \text{ W}$.

Elegirem el motor de quatre pols M3BP 160 MLA, d'11 kW de potència nominal.

3.3.7 Arrencada d'un ventilador

Es mesura la potència que absorbeix un ventilador a 1.000 min^{-1} i que resulta ser de 3,2 kW.

Suposant la característica mecànica del receptor de tipus ventilador, es demana:



a. Potència absorbida pel ventilador a 1.400 min^{-1}

En un ventilador, el parell segueix una llei parabòlica $M_r = A \cdot \omega^2$. Per tant, la potència segueix una llei cúbica: $P = M_r \cdot \omega = A \cdot \omega^3$

Coneixent la velocitat ($1.000 \text{ min}^{-1} = 104,72 \text{ rad/s}$) i la potència (3.200 W), es pot determinar el factor A :

$$A = P/\omega^3 = 3.200/(104,72)^3 = 0,002787 \text{ W}/(\text{rad/s})^3$$

La potència a 1.400 min^{-1} ($= 146,61 \text{ rad/s}$) és:

$$P = 0,002787 \cdot 146,61^2 = 8.780,8 \text{ W}$$

El ventilador és mogut per un motor asíncron que té les característiques següents: potència nominal, 11 kW; parell nominal, 74 N·m; velocitat nominal, 1.420 min⁻¹; parell d'arrencada, 2,3 vegades el parell nominal; parell màxim, 2,7 vegades el parell nominal; moment d'inèrcia del motor, $J_m = 0,080 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. El moment d'inèrcia del ventilador és de $J_v = 0,380 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

b. Acceleració del conjunt en el moment inicial de l'arrencada

El ventilador i el motor estan sobre el mateix eix; per tant, les inèrcies se sumen:

$$J_T = J_m + J_r = 0,080 + 0,380 = 0,460 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El parell d'arrencada del motor és $M_a = M_N \cdot 2,30 = 74 \cdot 2,30 = 170,2 \text{ N}\cdot\text{m}$

Atès que el parell receptor del ventilador és nul a l'arrencada, tot el parell motor s'utilitza per accelerar el conjunt. L'acceleració és, doncs:

$$\alpha = M_m/J_T = 170,2 / 0,460 = 370,0 \text{ rad/s}$$

c. Temps d'arrencada

Una forma ràpida (i aproximada) d'obtenir aquest valor consisteix a simplificar la característica mecànica del motor en dos trams: un tram horitzontal de parell mitjà entre el parell d'arrencada i el parell màxim, i un tram recte inclinat que passi pel punt de funcionament en buit i el punt nominal.

Els dos trams (que permeten determinar el punt P) són:

$$M_m = \frac{M_a + M_{m\max}}{2} = \frac{(2,3 + 2,7) \cdot M_n}{2} = \frac{(2,3 + 2,7) \cdot 74}{2} = 185,0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_m = M_n \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_n} = 74 \cdot \frac{157,08 - \omega}{157,08 - 148,70} = 8,833 - 1,387,5 \cdot \omega$$

El punt d'equilibri E s'obté de la intersecció del parell motor (al segon tram de la característica mecànica) i el parell receptor (el ventilador). És a dir, de les corbes:

$$M_m = M_n \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_n} = 8,833 - 1.387,5 \cdot \omega$$

$$M_r = A \cdot \omega^2 = 0,002787 \cdot \omega^2 \text{ N m}$$

La taula següent resumeix els valors de parell i velocitat dels punts V, nominal N i d'equilibri E:

		Punt E	Punt N	Punt V
Velocitat angular	min ⁻¹	1.432,2	1.420	1.300
	rad/s	149,98	148,70	136,14
Parell	N·m	62,68	74,0	185,0

Aquests punts es representen al gràfic de més endavant.

Càlcul simplificat del temps d'arrencada:

Al punt V, el parell receptor és:

$$M_{r(V)} = A \cdot \omega_v^2 = 0,002787 \cdot 136,142 = 51,64 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El parell accelerador fins al punt V és la diferència entre el parell motor (constant) i el parell receptor (variable); de forma simplificada, per a aquest darrer es pren la meitat de $M_{r(V)}$:

$$M_{acc} = M_m - M_{r(V)}/2 = 185,0 - 51,64/2 = 159,18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

L'acceleració mitjana aproximada durant l'engegada fins al punt V és:

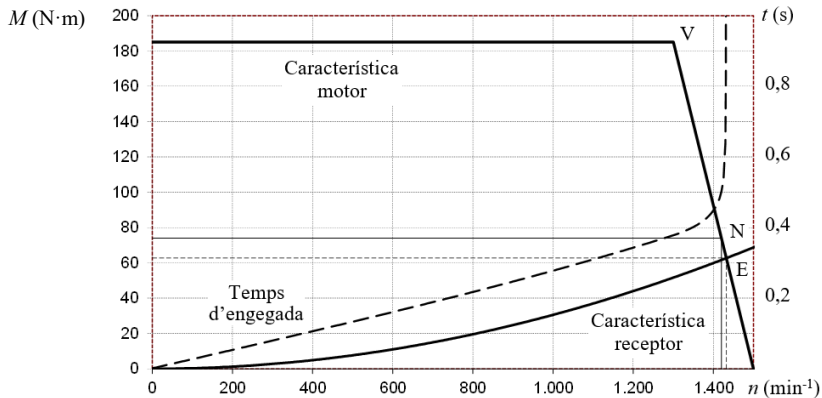
$$\alpha = M_{acc} / J_T = 159,18/0,460 = 346,04 \text{ rad/s}^2$$

El temps aproximat d'engegada fins al punt V és:

$$t = \Delta\omega / \alpha = 136,14 / 346,04 = 0,393 \text{ s}$$

Amb un càlcul precís, el temps de l'engegada fins al punt V és de 0,378 s. La gràfica proporciona el valor del temps amb l'increment de velocitat. S'observa que, a prop del punt d'equilibri E, el temps teòric tendeix a infinit, ja que el parell accelerador tendeix a zero.

S'observa que el càlcul simplificat del temps d'arrencada és prou significatiu ja que: 1) dona l'ordre de dimensió del temps d'engegada, suficient per comprovar si hi ha un perill d'escalfament excessiu (en el present cas, s'està molt lluny de 10 s); 2) a partir del punt V (1.300 min⁻¹), les intensitats elèctriques es moderen i l'efecte Joule és molt més baix; 3) a efectes pràctics, la velocitat d'equilibri s'estableix en un temps no molt superior al temps fins al punt V: s'arriba a 1.430 min⁻¹ en 0,640 s, quan la velocitat d'equilibri és 1.432,2 min⁻¹.



3.3.8 Tren de carbó

Un tren de càrrega està format per 20 vagons de carbó de 20 tones de pes propi i 80 tones de càrrega, moguts per una locomotora. El coeficient de rodolament de les rodes sobre les vies (vagons i locomotora) és $\mu_{rod} = 0,004$. La secció frontal de la locomotora és de 5 m d'altura i 3,5 m d'amplada i la dels vagons, de 4 m d'altura i 3 m d'amplada. El coeficient aerodinàmic de la locomotora és $C_{X(L)} = 0,8$ i el de cada un dels vagons, $C_{X(L)} = 0,4$ (cada vagó rep l'ombra del vent de l'anterior). L'adherència màxima de les rodes de la locomotora amb les vies és de $\mu_0 = 0,18$.

Es demana:

a. Resistència al rodolament que ofereixen els vagons en el pla i potència absorbida

La massa d'un vagó carregat és: $m_{vc} = 20.000 + 80.000 = 100.000 \text{ kg} = 100 \text{ Mg}$

La velocitat del tren (en m/s) és: $v = 50/3,6 = 13,89 \text{ m/s}$

Resistència al rodolament del vagó buit (v):

$$F_{R(v)} = \mu_{rod} \cdot m_v \cdot g = 0,004 \cdot 20.000 \cdot 9,81 = 784,8 \text{ N}$$

Resistència al rodolament del vagó carregat (vc):

$$F_{R(vc)} = \mu_{rod} \cdot m_{vc} \cdot g = 0,004 \cdot 100.000 \cdot 9,81 = 3.924,0 \text{ N}$$

Resistència al rodolament dels 20 vagons carregats (20vc):

$$F_{R(20vc)} = 20 \cdot F_{R(vc)} = 20 \cdot 3.924,0 = 78.480,0 \text{ N}$$

Potència absorbida pel rodolament dels 20 vagons carregats (20vc):

$$P_{R(20vc)} = F_{R(20vc)} \cdot v = 78.480,0 \cdot 13,89 = 1.090.000,0 \text{ W} = 1.090,0 \text{ kW}$$

b. Resistència a un pendent del 0,5 % que ofereix un vagó buit (v) i un vagó carregat (vc)

Resistència al pendent d'un vagó buit (v) ($p = 0,005$):

$$F_{P(v)} = m_v \cdot g \cdot p = 20.000 \cdot 9,81 \cdot 0,005 = 981,0 \text{ N}$$

Resistència al pendent d'un vagó carregat (vc)

$$F_{P(vc)} = m_{vc} \cdot g \cdot p = 100.000 \cdot 9,81 \cdot 0,005 = 4.905,0 \text{ N}$$

Resistència al pendent dels 20 vagons carregats (20vc):

$$F_{P(20vc)} = 20 \cdot F_{P(vc)} = 20 \cdot 4.905,0 = 98.100,0 \text{ N}$$

Potència absorbida pel rodolament dels 20 vagons carregats (20vc):

$$P_{R(20vc)} = F_{R(20vc)} \cdot v = 78.480,0 \cdot 13,89 = 1.362.500,0 \text{ W} = 1.362,5 \text{ kW}$$

Resistència a l'aire que ofereixen la locomotora, els vagons i el tren complet quan circulen a 50 km/h sense vent (densitat de l'aire a nivell del mar, $\delta = 1,293 \text{ kg/m}^3$)

La resistència a l'aire de la locomotora és:

$$F_{A(L)} = \frac{1}{2} S_L \cdot Cx_L \cdot \delta \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3,5) \cdot 0,8 \cdot 1,293 \cdot 13,89^2 = 1.745,9 \text{ N}$$

La resistència a l'aire d'un vagó és:

$$F_{A(v)} = \frac{1}{2} S_v \cdot Cx_v \cdot \delta \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3) \cdot 0,4 \cdot 1,293 \cdot 13,89^2 = 598,6 \text{ N}$$

La resistència a l'aire del tren complet és:

$$F_{A(L+20v)} = F_{A(L)} + 20 \cdot F_{A(v)} = 1.745,9 + 20 \cdot 598,6 = 13.718,2 \text{ N}$$

La potència que absorbeix el tren complet a 50 km/h és:

$$P_{A(L+20v)} = F_{A(L+20v)} \cdot v = 13.718,2 \cdot 13,89 = 190.530,2 \text{ W} = 19,53 \text{ kW}$$

c. *Massa mínima de la locomotora, m_L , per assegurar l'arrossegament de 20 vagons carregats amb un pendent de 0,005 a una velocitat de 50 km/h, sabent que l'adherència màxima entre les rodes de la locomotora amb la via és de $\mu_0 = 0,18$*

L'equació que relaciona la força de tracció del tren (inclosa la locomotora), $F_{T(L+20v)}$, amb les diferents forces resistents (rodolament, pendent i aire) és:

$$F_{T(L+20v)} = m_L \cdot g \cdot \mu_0 = F_{R(20vc)} + F_{R(20vc)} + m_L \cdot g \cdot (\mu_{rod} + p) + F_{A(L+20v)}$$

En aquesta equació, l'únic paràmetre que es desconeix és la massa de la locomotora, m_L . Aïllant aquesta variable, s'obté:

$$m_L = \frac{F_{R(20vc)} + F_{P(20vc)} + F_{A(L+20v)}}{g(\mu_a - \mu_{rod} - p)} = \frac{78.480 + 98.100 + 13.718,2}{9,81(0,2 - 0,004 - 0,005)} = 101.562,2 \text{ kg}$$

d. *Per al conjunt del tren (inclosa la locomotora), el repartiment de la força de tracció i de la potència, $F_{T(L+20v)}$ i $P_{T(L+20v)}$, entre la locomotora i els vagons, segons les diferents resistències (rodolament, pendent i aire)*

La massa del tren (locomotora i vagons) és:

$$m_T = m_L + 20 \cdot m_{vc} = 101.562,2 + 20 \cdot 100.000 = 2.101.562,2 \text{ kg} = 2.101,6 \text{ Mg}$$

Les dades es presenten en forma de taula:



	Forces de tracció (N)	Potències (kW)	%
Tren complet	$F_{R+P+A(L+20v)} = 199.265,1$	$P_{R+P+A(L+20v)} = 2.767,57$	100,0%
Locomotora	$F_{R+P+A(L)} = 10.712,9$	$P_{R+P+A(L)} = 148,79$	5,4%
20 vagons	$F_{R+P+A(20v)} = 188.552,2$	$P_{R+P+A(20v)} = 2.618,78$	94,6%
Resist. al rodolament	$F_{R(L+20v)} = 82.465,3$	$P_{R(L+20v)} = 1.145,35$	41,4%
Resistència al pendent	$F_{P(L+20v)} = 103.081,6$	$P_{P(L+20v)} = 1.431,69$	51,7%
Resistència a l'aire	$F_{A(L+20v)} = 13.718,2$	$P_{A(L+20v)} = 190,53$	6,9%

Observacions:

1. La força total de tracció per arrossegar el tren és de 199.265 N (equivalent al pes d'unes 20 tones), el 94,6 % de la qual s'esmerça per arrossegar els 20 vagons (20.000 tones) i el 5,4 % restant, per moure la pròpia locomotora (101,6 tones).
2. La força total de tracció es reparteix entre 82.465 N (41,4 %) per vèncer el rodolament, 103.082 N (51,7 %) per vèncer el pendent i 13.718 N (6,9 %) per vèncer la resistència a l'aire. Aquest darrer component és molt petit gràcies a la baixa velocitat del comboi i a l'efecte parcial de túnel entre els vagons ($C_{xv} = 0,04$).
3. La potència mínima necessària en la locomotora és de 2.768 kW i es reparteix en les mateixes proporcions que les forces de tracció.
4. Com a terme de comparació: per traslladar la mateixa càrrega per carretera, s'haurien necessitat 64 camions de 25 tones. Suposant que el pes propi de cada camió és de 8 tones, el coeficient de rodolament pneumàtics-terra és de $\mu_{rod} = 0,010$, més un coeficient $C_{xc} = 0,65$, tot mantenint la mateixa velocitat, la força de tracció sumada de tots els vehicles seria $F_{T(65c)} = 362,7$ kN i la potència necessària $P_{T(65c)} = 5.037$ kW (un 82,0 % més en ambdós casos).
5. Si la circulació fos en el pla (pendent $p = 0$), tindrien molta més importància tant la resistència al rodolament com la resistència a l'aire (del 85,4 % i e 14,6 % en el tren, i del 80 % i el 20 % en els camions) i els resultats serien encara molt més favorables al tren: $F_{R+A(L+20v)} = 94,1$ kN i $F_{R+A(L+20v)} = 1.306,7$ kW; camions: $F_{R+A(65c)} = 259,1$ kN i $F_{R+A(65c)} = 3.598,2$ kW (un 175,4 % més en ambdós casos).

e. *Pendent negatiu mínim perquè un vagó comenci a baixar per l'acció de la gravetat*

La condició perquè els vagons del tren comencin a baixar sols, sense tracció, en una baixada és que el pendent com a mínim iguali el coeficient de rodolament:

$$p_{min} \geq \mu_{rod} = 0,004 \text{ (0,4 \%)}$$

3.3.9 Cinta transportadora inclinada

Una cinta transportadora de 30° d'inclinació i de 60 m de longitud absorbeix, a causa dels freds interiors, una potència d'1,2 kW quan es mou al buit a una velocitat de 0,8 m/s. El motor és de quatre pols i la seva velocitat nominal és de 1.400 min⁻¹.

Es demana:

a. *Relació de velocitats entre la velocitat nominal del motor i el receptor*

La velocitat del motor és de $1.400 \text{ min}^{-1} = 146,61 \text{ rad/s}$

La velocitat lineal del receptor és $0,8 \text{ m/s}$

La relació de velocitats és $i = 146,61 / 0,8 = 183,3 \text{ rad/m}$

b. *Si tota la cinta va carregada amb 12 kg de material per metre i el coeficient de frec equivalent de la cinta amb el seu suport és de $\mu = 0,1$, la força suplementària que ha de fer la cinta per arrossegar el material a la pujada*

Càrrega total sobre la cinta: $W_{(12 \text{ kg/m})} = 60 \cdot 12 \cdot 9,81 = 7.063,2 \text{ N}$

Força normal de la càrrega damunt sobre la cinta:

$$F_{N(12\text{kg/m})} = W_{(12 \text{ kg/m})} \cdot \cos(30^\circ) = 6.116,9 \text{ N}$$

Força de fricció entre la cinta i el suport: $F_{fric(12\text{kg/m})} = \mu \cdot F_{N(12\text{kg/m})} = 0,1 \cdot 6.116,9 = 611,7 \text{ N}$

Força tangencial de la càrrega damunt la cinta: $F_{T(12\text{kg/m})} = W_{(12 \text{ kg/m})} \cdot \sin(30^\circ) = 3.532,6 \text{ N}$

Força suplementària per arrossegar la cinta:

$$F_{tan(12\text{kg/m})} = \mu \cdot F_{N(12\text{kg/m})} + F_{T(12\text{kg/m})} = 611,7 + 3.532,6 \text{ N} = 4.143,3 \text{ N}$$

c. *Si el rendiment de les transmissions és de 0,75, l'increment de potència del motor*

L'increment de potència per elevar la càrrega (12 kg/m) és:

$$\Delta P_{(12\text{kg/m})} = F_{tan(12\text{kg/m})} \cdot v / \eta = 4.143,3 \cdot 0,8 / 0,75 = 4.419,5 \text{ W}$$

Potència total (12 kg/m): $P_{tot(12\text{kg/m})} = 4.419,5 + 1.200,0 = 5.619,5 \text{ W}$

És al límit (lleugerament per sobre) de la potència nominal.

d. *Essent la potència nominal del motor de 5,5 kW, si la cinta va carregada amb 16 kg de material per metre, el motor treballa per sobre o per sota del seu punt nominal?*

La càrrega sobre la cinta és 4/3 de la càrrega de l'apartat 2. Per tant:

Força suplementària per arrossegar la cinta: $F_{tan(16\text{kg/m})} = 4/3 \cdot F_{tan(12\text{kg/m})} = 5.524,4 \text{ N}$

Potència suplementària per arrossegar la cinta:

$$\Delta P_{(16\text{kg/m})} = 16/12 \cdot F_{tan(12\text{kg/m})} = 16/12 \cdot 4.419,5 = 5.892,7 \text{ W}$$

Potència total (16 kg/m): $P_{tot(16\text{kg/m})} = 5.892,7 + 1.200,0 = 7.092,7 \text{ W}$

Així doncs, el motor de 5,5 kW treballaria molt per sobre del punt nominal i, per tant, acabaria fallant (es "cremaria") a partir d'un cert temps, si treballés de forma contínua.

3.3.10 Escala mecànica

Una escala mecànica de 650 mm d'amplada (1 viatger per graó) supera un desnivell de 3.200 mm: l'altura del graó desplegat és de 200 mm i la profunditat, de 320 mm. En el punt d'embarcament, s'observa que apareixen 120 graons per minut.

Es demana:



- a. *Velocitat de desplaçament vertical dels graons (i dels viatgers) i càrrega màxima que suporta l'escala, suposant que els viatgers pesen, de mitjana, 70 kg (per al càlcul, es pot considerar una escala amb graons d'altures iguals). Potència requerida del receptor*

A 120 graons per minut (2 graons per segon), la velocitat de desplaçament vertical és:

$$v_v = 2 \cdot h_e / t = 2 \cdot 0,2 / 1 = 0,4 \text{ m/s}$$

El nombre de graons de l'escala (teòric, com si tots tinguessin la mateixa altura) és:

$$N_e = H / h_e = 3,2 \text{ m} / 0,2 \text{ m} = 16 \text{ graons}$$

La càrrega màxima vertical que pot suportar l'escala és d'un viatger per graó.

$$F_{v.màx} = N_e \cdot (1 \cdot m_{viatger} \cdot 9,81) = 16 \cdot (1 \cdot 70 \cdot 9,81) = 10.987,2 \text{ N}$$

La potència necessària per elevar els viatgers en el receptor (graons) és de:

$$P_v = F_{v.màx} \cdot v_v = 10.987,2 \cdot 0,4 \text{ m/s} = 4.394,9 \text{ W}$$

- b. *Partint d'un motor asíncron de quatre pols (velocitat nominal de 1.400 min⁻¹) i sabent que la roda que arrossega la cadena és de 600 mm de diàmetre, la relació de transmissió necessària. Quin rendiment aproximat de la transmissió es pot estimar?*

La velocitat horitzontal dels graons en el punt d'embarcament és de:

$$V_h = 2 \cdot L_e / t = 2 \cdot 0,32 / 1 = 0,64 \text{ m/s}$$

Atès que la roda d'arrossegament de la cadena té un diàmetre de 600 mm, la seva velocitat angular és:

$$\omega_{rod.arros} = V_h / (d_{rod.arros}/2) = 0,64 \text{ m/s} / (0,6/2) = 2,133 \text{ rad/s} (20,37 \text{ min}^{-1})$$

Per tant, la relació de transmissió ha de ser:

$$i = \omega_m / \omega_{rod.arros} = 1.400 \text{ min}^{-1} / 20,37 \text{ min}^{-1} = 68,72 \text{ (sense unitats; o rad/rad)}$$

En nombre d'etapes entre el reductor i l'eventual transmissió per cadena (considerant la i màxima per etapa de 4,5) serà:

$$4,5^2 = 20,25 < i = 68,72 < 4,5^3 = 91,13$$

Per tant, són tres etapes i el rendiment estimat és de $\eta = 0,85$ (disminució de 0,05 per etapa).

- c. *Suposant que, per moure l'escala en buit, el motor proporciona una potència d'1,5 kW (a causa dels frecs interiors) i que es poden menystenir els frecs suplementaris de la càrrega dels viatgers, quina és la potència del motor necessària a plena càrrega?*

La potència total absorbida pel receptor és la suma de la potència absorbida pel moviment de la cadena en buit, més la potència necessària per elevar els viatgers:

$$P_m = P_{m.buit} + P_r / \eta = 1.500,0 + 4.394,9 / 0,85 = 6.670,4 \text{ W}$$

- d. Per moure l'escala mecànica, trieu un motor entre els següents (se'n dona la velocitat nominal, en min^{-1} , i el parell nominal, en $\text{N}\cdot\text{m}$): motor 1 (1.450; 49,3), motor 2 (1.466; 71,6), motor 3 (1.470; 97,4) i motor 4 (1.477; 119,0)

El quadre següent proporciona les potències nominals dels motors de l'enunciat:

	Velocitat angular nominal		Parell nominal	Potència nominal
	$n_N (\text{min}^{-1})$	$\omega_N (\text{rad/s})$	$M_N (\text{N}\cdot\text{m})$	$P_N (\text{W})$
Motor 1	1.450	151,8	49,3	7.486
Motor 2	1.466	153,5	71,7	10.992
Motor 3	1.470	153,9	97,4	14.994
Motor 4	1.477	154,7	119,0	18.406

Per tant, s'elegirà el primer motor, ja que és suficient.

3.3.11 Potència necessària en un camió

Un camió de tres eixos (un al davant i dos al darrere) té una tara (massa pròpia) de 6.750 kg i pot dur una càrrega de 24.000 kg.

L'equació de la resistència a l'aire és: $F_{\text{aire}} = (1,293/2) \cdot S \cdot C_x \cdot v^2$. S (m^2) és la secció frontal del vehicle (en aquest cas, l'àrea frontal del camió és de 2,6 m d'amplada i 4,10 m d'alçada), C_x és el coeficient aerodinàmic (en aquest cas $C_x = 0,7$) i v és la velocitat (m/s),

Es demana:

- a. La potència necessària en el vehicle per superar un pendent del 20 % a càrrega màxima i a 12 km/h (considereu tan sols la resistència al pendent)

Un pendent de 20 % correspon a un angle d'inclinació de:

$$\alpha = \text{atan}(0,2) = 0,1974 \text{ rad} = 11,31^\circ$$

Velocitat del camió en el pendent: $v = 12 \text{ km/h} = (12/3,6) = 3,333 \text{ m/s}$.

Pes del camió carregat:

$$W_{cc} = m_{cc} \cdot g = (6.750 + 24.000) \cdot 9,81 = 301.658 \text{ N}$$

Força normal al terra i resistència al rodolament:

$$F_{N(20\%)} = W_{cc} \cdot \cos(\alpha) = 301.658 \cdot \cos(11,31^\circ) = 295.800 \text{ N}$$

$$F_{rod(20\%)} = F_{Ncc} \cdot \mu_{rod} = 295.800 \cdot 0,011 = 3.254 \text{ N}$$

Força tangencial al terra (resistència al pendent):

$$F_{pend(20\%)} = W_{cc} \cdot \sin(\alpha) = 301.658 \cdot \sin(11,31^\circ) = 59.160 \text{ N}$$

Resistència a l'aire:

$$F_{\text{aire}(20\%)} = (1,293/2) \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = 0,6465 \cdot (2,6 \cdot 4,1) \cdot 0,70 \cdot 3,333^2 = 53,6 \text{ N}$$



Potència necessària en el vehicle (receptor) per superar el pendent del 20 % a 12 km/h:

$$P_{(20\%)} = (F_{rod(20\%)} + F_{pend(20\%)} + F_{aire(20\%)}) \cdot v = (3.254 + 59.160 + 53,6) \cdot 3,333 = 208.224 \text{ W (282,9 CV)}$$

En aquest cas, la incidència de les resistències al rodolament, al pendent i a l'aire són, respectivament, del 5,2 %, el 94,7 % i el 0,1 %. Predomina la resistència al pendent.

b. Calculeu les forces resistents i la potència absorbida pel vehicle carregat quan circula en el pla a la velocitat de 100 km/h

La velocitat de creuer del vehicle és $v_{creuer} = 100 \text{ km/h} = (100/3,6) = 27,78 \text{ m/s}$

Resistència al rodolament:

$$F_{rod(100km/h)} = W_{cc} \cdot \mu_{rod} = 301.658 \cdot 0,011 = 3.318 \text{ N}$$

Resistència al pendent:

$$F_{pend(100km/h)} = W_{cc} \cdot p = 301.658 \cdot 0 = 0$$

Resistència a l'aire:

$$F_{aire(100km/h)} = (1,293/2) \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = 0,6465 \cdot (2,6 \cdot 4,1) \cdot 0,70 \cdot 27,78^2 = 3.719 \text{ N}$$

Potència necessària en el vehicle (receptor) carregat en el pla a 100 km/h:

$$P_{(100km/h)} = (F_{rod(100km/h)} + F_{pend(100km/h)} + F_{aire(100km/h)}) \cdot v = (3.318 + 0 + 3.719) \cdot 27,78 = 208.224 \text{ W (282,9 CV)}$$

En aquest segon cas, la incidència de les resistències al rodolament, al pendent i a l'aire són, respectivament, del 47,1%, el 0 % i el 52,9 %. Les resistències al rodolament i a l'aire estan relativament equilibrades, amb predomini de la segona.

c. Calculeu les forces resistents i la potència absorbida pel vehicle descarregat (viatge de tornada) quan circula en el pla a la velocitat de 120 km/h

La velocitat de creuer del vehicle és:

$$v_{creuer} = 120 \text{ km/h} = (120/3,6) = 33,33 \text{ m/s}$$

Pes del camió descarregat:

$$W_{cd} = m_{cd} \cdot g = 6.750 \cdot 9,81 = 66.218 \text{ N}$$

Resistència al rodolament:

$$F_{rod(120km/h)} = W_{cd} \cdot \mu_{rod} = 66.218 \cdot 0,011 = 728 \text{ N}$$

Resistència al pendent:

$$F_{pend(100km/h)} = W_{cc} \cdot p = 66.218 \cdot 0 = 0$$

Resistència a l'aire:

$$F_{aire(100km/h)} = (1,293/2) \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = 0,6465 \cdot (2,6 \cdot 4,1) \cdot 0,70 \cdot 33,33^2 = 5.360 \text{ N}$$

Potència necessària en el vehicle (receptor) descarregat en el pla a 120 km/h:

$$P_{(100\text{km/h})} = (F_{rod(100\text{km/h})} + F_{pend(100\text{km/h})} + F_{aire(100\text{km/h})}) \cdot v = (728 + 0 + 5.360) \cdot 33,33 = 202.953 \text{ W (275,8 CV)}$$

En aquest tercer cas, la incidència de les resistències al rodolament, al pendent i a l'aire són, respectivament, del 12,0 %, el 0 % i el 88,0 %. La resistència a l'aire és predominant, tot i que no porta càrrega.

d. *Quines serien les forces resistents i la potència absorbida pel vehicle descarregat si al viatge de tornada circulés a 90 km/h?*

La velocitat de creuer del vehicle és:

$$v_{creuer} = 90 \text{ km/h} = (120/3,6) = 25,0 \text{ m/s}$$

Resistència al rodolament:

$$F_{rod(120\text{km/h})} = W_{cd} \cdot \mu_{rod} = 66.218 \cdot 0,011 = 728 \text{ N}$$

Resistència al pendent:

$$F_{pend(100\text{km/h})} = W_{cc} \cdot p = 66.218 \cdot 0 = 0$$

Resistència a l'aire:

$$F_{aire(100\text{km/h})} = (1,293/2) \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 = 0,6465 \cdot (2,6 \cdot 4,1) \cdot 0,70 \cdot 25,0^2 = 3.015 \text{ N}$$

Potència necessària en el vehicle (receptor) descarregat en el pla a 90 km/h:

$$P_{(100\text{km/h})} = (F_{rod(100\text{km/h})} + F_{pend(100\text{km/h})} + F_{aire(100\text{km/h})}) \cdot v = (728 + 0 + 3.015) \cdot 25,0 = 93.588 \text{ W (127,2 CV)}$$

En aquest quart cas, la potència necessària és menys de la meitat del cas anterior. La incidència de les resistències al rodolament, al pendent i a l'aire són, respectivament, del 19,5 %, el 0 % i el 80,5 %. La resistència a l'aire continua essent predominant, tot i ser molt més baixa.

e. *Establiu una comparació entre l'energia requerida pel vehicle en els tres casos anteriors per a un trajecte de 100 km*

Les energies requerides resulten del producte de les forces resistents pel desplaçament comú ($d = 100.000 \text{ m}$):

$$E_{cc(100\text{km/h})} = F_{cc(100\text{km/h})} \cdot d = 7.041 \cdot 10^5 = 704,1 \text{ MJ} = 195,6 \text{ kWh}$$

$$E_{cd(120\text{km/h})} = F_{cd(120\text{km/h})} \cdot d = 6.089 \cdot 10^5 = 608,9 \text{ MJ} = 169,1 \text{ kWh}$$

$$E_{cd(90\text{km/h})} = F_{cd(90\text{km/h})} \cdot d = 3.744 \cdot 10^5 = 373,4 \text{ MJ} = 104,4 \text{ kWh}$$

El camió carregat a 100 km/h en un trajecte de 100 km és el que requereix més energia: 704,1 MJ (195,6 kWh); el camió descarregat circulant a 120 km/h en el trajecte de tornada requereix poca energia menys: 608,9 MJ (169,1 kWh); si aquest viatge de tornada es fa a 90 km/h, el camió requereix tan sols el 61,5 % de l'energia a 120 km/h: 374,4 MJ (104,0 kWh).

Conclusions:



1. Pujar el pendent màxim (20 %) a plena càrrega i a 12 km/h, circular a plena càrrega en el pla a 100 km/h i circular descarregat en el pla a 120 km/h requereixen en el vehicle unes potències semblants (208,2, 195,6 i 202,6 kW, respectivament). D'aquesta manera, s'equilibren les potències en situacions de funcionament extremes.
2. S'observa que, amb el camió descarregat a gran velocitat, la potència absorbida per la resistència a l'aire és entre 7 i 8 vegades l'absorbida per la resistència al rodament. Això fa que, sorprenentment, els recorreguts de tornada en el pla a gran velocitat poden requerir més potència que els recorreguts d'anada en el pla amb la càrrega, a causa de la resistència més gran a l'aire per la major velocitat.
3. Els viatges de tornada amb el camió buit consumeixen una quantitat gens negligible d'energia, especialment si es fan a alta velocitat, aprofitant la potència del motor.
4. La transmissió mecànica del motor a les rodes d'un camió pot tenir un rendiment de l'ordre de 0,95. Per tant, les potències dels motors no són molt superiors a les calculades als apartats anteriors (219,2 kW, 205,9 kW, 213,6 kW i 98,5 kW o, en cavalls, 297,8 CV, 279,7 CV, 290,3 CV i 133,8 CV). Un altra cosa és el rendiment del motor entre l'energia potencial del combustible i l'energia mecànica a l'eix del motor, que es pot situar entre el 20 i 25 %.

3.3.12 Arrossegament d'una caixa per un pendent

Per mitjà d'un cable, es vol arrossegar una caixa de massa $m = 120$ kg amunt per un pla inclinat per un pendent del 20 %, essent el coeficient de fricció entre la caixa i el terra de $\mu = 0,3$. La caixa s'ha d'eleva 4 metres en 20 s.

Es demana:

- a. *Velocitat del moviment de lliscament de la caixa damunt del pla inclinat. Força que exerceix el cable. Potència absorbida pel receptor*

L'angle del pla inclinat és $\alpha = \text{atan}(0,2) = 11,31^\circ$.

La velocitat de desplaçament vertical de la caixa és:

$$v_v = h / t = 4 / 20 = 0,2 \text{ m/s}$$

I la seva projecció sobre el pla inclinat:

$$v_{tan} = v_v / \sin(\alpha) = 0,2 / \sin(11,31^\circ) = 1,02 \text{ m/s}$$

La força que exerceix el cable sobre la caixa és la suma del component del pes de la caixa sobre el pla inclinat més la força de fricció que cal vèncer a causa de la força normal del pes de la caixa sobre el pla inclinat.

Projecció del pes sobre el pla inclinat:

$$F_T = (m \cdot g) \cdot \sin(\alpha) = (120 \cdot 9,81) \cdot \sin(11,31^\circ) = 230,9 \text{ N}$$

Força de fricció:

$$F_{fric} = (m \cdot g) \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu = (120 \cdot 9,81) \cdot \cos(11,31^\circ) \cdot 0,3 = 346,3 \text{ N}$$

La força que exerceix el cable sobre la caixa és la suma de les dues anteriors:

$$F_{cab} = F_T + F_{fric} = 230,9 + 346,3 = 577,2 \text{ N}$$

Finalment, la potència absorbida per receptor és:

$$P_r = F_{cab} \cdot v_{tan} = 577,2 \cdot 1,02 = 588,6 \text{ W}$$

b. *Suposant que el motor és asíncron de quatre pols (sincronisme de 1.500 min^{-1}), estimeu la relació de transmissió total entre el motor i la caixa arrossegada (receptor)*

La velocitat nominal (estimada) del motor asíncron de quatre pols pot ser de 1.440 min^{-1} ($150,8 \text{ rad/s}$). La velocitat del receptor (la caixa) sobre el pla inclinat és de $1,02 \text{ m/s}$. La relació de transmissió global és:

$$i_{tot} = \omega_m / v_r = 150,8 \text{ (rad/s)} / 1,02 \text{ (m/s)} = 147,9 \text{ rad/m}$$

c. *Si el cable s'enrotlla en un tambor de diàmetre 150 mm , determineu la relació de transmissió del reductor entre el motor i el tambor. Estimeu el rendiment global de la transmissió (reductor i cable-tambor).*

La relació de transmissió cable-tambor és:

$$i_{ct} = \omega_{amb} / v_{cab} = \omega_{amb} / (\omega_{amb} \cdot (d_{tamb} / 2)) = 2 / d_{tamb} = 2 / 0,150 = 13,33 \text{ rad/m}$$

La relació de transmissió del reductor serà:

$$i_{red} = i_{tot} / i_{ct} = 147,9 \text{ (rad/m)} / 13,33 \text{ (rad/m)} = 11,31 \text{ (rad/rad)}$$

El reductor serà de dues etapes ($4,5 \leq i_{red} = 11,31 \leq 4,5^2$) i el seu rendiment aproximat, de $0,90$. El rendiment global (amb l'etapa de cable-tambor) serà de $\eta = 0,85$.

d. *Es parteix de diversos motors asíncrons de quatre pols amb les característiques següents (velocitat nominal en min^{-1} , parell nominal en $\text{N}\cdot\text{m}$): motor 1 (1.430 ; $5,0$), motor 2 (1.430 ; $7,3$), motor 3 (1.430 ; $10,0$), motor 4 (1.450 ; $14,4$), motor 5 (1.450 ; $19,7$) i motor 6 (1.440 ; $26,5$). Trieu el motor per arrossegar la caixa.*

La potència necessària en el motor és:

$$P_m = P_r / \eta = 588,6 / 0,85 = 692 \text{ W}$$

Cal elegir el motor de potència més baixa que sigui suficient. A partir de les dades de l'enunciat, el quadre següent proporciona les potències nominals dels motors:

	Velocitat angular nominal		Parell nominal M_N (N·m)	Potència nominal P_N (W)
	n_N (min^{-1})	ω_N (rad/s)		
Motor 1	1.430	149,7	5,0	749
Motor 2	1.430	149,7	7,3	1.093
Motor 3	1.430	149,7	10,0	1.497
Motor 4	1.450	151,8	14,4	2.187
Motor 5	1.450	151,8	19,7	2.991
Motor 6	1.440	150,8	26,5	3.996



Per tant, són vàlids tots els motors. S'elegeix el motor 1.

3.3.13 Accionament d'un reactor químic

Un reactor químic és un equip dissenyat per fer una reacció química de forma controlada i eficaç. Sol consistir en un dipòsit amb un agitador d'eix vertical, mogut per un sistema motor-reductor.

El motor és asíncron (velocitat nominal, 1.460 min^{-1} ; parell nominal, $35,9 \text{ N}\cdot\text{m}$) i el rotor de l'agitador es mou a una velocitat de 40 min^{-1} .

Es demana:



a. Relació de transmissió i rendiment aproximat del reductor

La relació de transmissió del reductor s'obté directament de les dades de l'enunciat:

$$i = \omega_m / \omega_r = n_m / n_r = 1.460 / 40 = 36,50$$

Per avaluar el rendiment, cal determinar prèviament el nombre d'etapes: 2 etapes: $i \leq 4,5^2 = 20,25$; 3 etapes: $i \leq 4,5^3 = 91,125$. Per tant, ha de ser de 3 etapes.

En aquest cas, el rendiment es pot estimat en $\eta = 0,85$.

b. Per a una reacció química determinada s'han fet mesuraments i el parell que requereix l'agitador és de $600 \text{ N}\cdot\text{m}$. El motor treballa per sobre o per sota del punt nominal?

El parell receptor reduït a l'eix motor és:

$$M_{r(m)} = M_r / (\eta \cdot i) = 600 / (0,85 \cdot 36,50) = 19,34 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Per tant, treballa per sota del punt nominal (53,9 % del valor del parell nominal del motor).

c. Es vol adaptar el reactor a una nova reacció química, que requereix un parell a l'agitador de $350 \text{ N}\cdot\text{m}$, a una velocitat de 180 min^{-1} . Per al nou motor (quatre pols), es demana fer una estimació de la relació de transmissió i del rendiment del nou reductor.

La relació de transmissió aproximada pot ser:

$$i_2 = \omega_m / \omega_r = n_m / n_r = 1.460 / 180 = 8,11$$

Per avaluar el rendiment, cal determinar prèviament el nombre d'etapes: 1 etapa: $i \leq 4,5^1 = 4,5$; 2 etapes: $i \leq 4,5^2 = 20,25$. Per tant, ha de ser de 2 etapes.

En aquest cas, el rendiment es pot estimar en $\eta = 0,90$.

- d. *Potència del nou motor. Elecció del motor entre (potència nominal, en W): motor 1 (1.100), motor 2 (1.500), motor 3 (2.200), motor 4 (3.000), motor 5 (4.000), motor 6 (5.500), motor 7 (7.500) i motor 8 (11.000)*

La potència del receptor traduïda a l'eix motor és:

$$P_{r(m)} = (M_r \cdot \omega_r) / \eta = (350 \cdot (180 \cdot \pi / 30)) / 0,90 = 7.330 \text{ W}$$

Per tant, s'elegeix el motor 7 (potència nominal, 7.500 W).

3.3.14 Arrossegament d'un vagoneta en pendent

Una vagoneta de 500 kg de massa pròpia es mou per un pendent del 4 % a una velocitat de 2 m/s, estirada per un cable que s'enrotlla en un tambor de 320 mm de diàmetre. El tambor es mou gràcies a un motor asíncron de quatre pols ($n_N = 1.450 \text{ min}^{-1}$; $P_N = 2,2 \text{ kW}$; $M_N = 14,4 \text{ N}\cdot\text{m}$) i un reductor. El coeficient de rodolament de les rodes sobre els carrils és de $\mu_{rod} = 0,005$.

Es demana:

- a. *Calculeu la relació de transmissió entre el motor i la vagoneta, i la relació de transmissió del reductor.*

La velocitat angular del motor és de 1.450 min^{-1} , és a dir, $1.450 \cdot \pi / 30 = 151,8 \text{ rad/s}$

Les relacions de transmissió són:

Entre motor i vagoneta: $i_T = \omega_m / v_r = 151,8 / 2 = 75,92 \text{ rad/s}$

Transmissió tambor-cable: $i_{tc} = \omega_{tamb} / v_{cab} = 2 / d_{tamb} = 2 / 0,32 = 6,25 \text{ rad/s}$

Reductor d'engranatges: $i_{red} = i_T / i_{tc} = 75,92 / 6,25 = 12,15 \text{ (rad/rad)}$

- b. *Rendiment del conjunt de la transmissió (reductor + tambor-cable)*

La transmissió consta d'un reductor de dues etapes ($i_{red} = 12,1 < 4,5^2 = 20,25$) i d'una etapa de tambor-cable; per tant, tres etapes en total: $\eta_T = 0,85$

- c. *Parell que ha d'exercir el motor quan la vagoneta puja buida*

Essent el pendent molt petit, és suficient un càlcul simplificat de la força receptora de la vagoneta.

Força receptora: $F_{r0} = m_v \cdot g \cdot (p + \mu_{rod}) = 500 \cdot 9,81 \cdot (0,04 + 0,005) = 220,73 \text{ N}$

Parell del motor: $M_{r(m)0} = F_{r0} / (i_T \cdot \eta_T) = 220,7 / (75,92 \cdot 0,85) = 3,420 \text{ N}\cdot\text{m}$

Potència del motor: $P_{r(m)0} = F_{r0} \cdot v_v / \eta_T = 220,7 \cdot 2 / 0,85 = 520,65 \text{ W}$

El càlcul exacte projecta les forces en funció de l'angle del pendent ($\alpha = \text{atan}(p) = \text{atan}(0,04) = 0,03398 \text{ rad} = 0,3818^\circ$).



Força receptora: $F_{r0} = m_v \cdot g \cdot (\sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \mu_{rod}) = 500 \cdot 9,81 \cdot (0,03997 + 0,9992 \cdot 0,005) = 220,55 \text{ N}$

Parell del motor: $M_{r(m)0} = F_{r0} / (i_T \cdot \eta_T) = 220,55 / (75,92 \cdot 0,85) = 3,418 \text{ N}\cdot\text{m}$

Potència del motor: $P_{r(m)0} = F_{r0} \cdot v_v / \eta_T = 220,55 \cdot 2 / 0,85 = 518,94 \text{ W}$

Com es pot comprovar, les diferències en els resultats entre el càlcul aproximat i el càlcul exacte són quasi imperceptibles.

d. *Quan la vagoneta va carregada amb 2.200 kg, el motor treballa per sobre o per sota del punt nominal?*

En el cas de la vagoneta carregada, es donen els resultats següents:

Força receptora: $F_r = (m_v + m_c) \cdot g \cdot (p + \mu_{rod}) = (500 + 2.200) \cdot 9,81 \cdot (0,04 + 0,005) = 1.191,9 \text{ N}$

Parell del motor: $M_{r(m)} = F_{r0} / (i_T \cdot \eta_T) = 1.191,9 / (75,92 \cdot 0,85) = 18,47 \text{ N}\cdot\text{m}$

Potència del motor: $P_{r(m)} = F_{r0} \cdot v_v / \eta_T = 220,7 \cdot 2 / 0,85 = 2.804,5 \text{ W}$

Per tant, quan el motor arrossega la vagoneta carregada en la pujada, treballa per sobre del seu punt nominal ($P_N = 2,2 \text{ kW}$; $M_N = 14,4 \text{ N}\cdot\text{m}$).

3.3.15 Bomba centrífuga

Una bomba centrífuga mou un cabal d'aigua de $6 \text{ m}^3/\text{h}$ a 50 m d'altura, impulsada per un motor síncron que funciona en el seu punt nominal ($n_N = 1.450 \text{ min}^{-1}$, $M_N = 14,5 \text{ N}\cdot\text{m}$).



El motor està connectat directament al rotor de la bomba.

Es demana:

a. *Potència absorbida pel fluid que mou la bomba*

L'expressió de la potència hidràulica absorbida és:

$$P_r = Q(\text{m}^3/\text{h}) \cdot 1.000(\text{L}/\text{m}^3) / 3.600(\text{s}/\text{h}) \cdot 1(\text{kg}/\text{L}) \cdot 9,81(\text{m}/\text{s}^2) \cdot H(\text{m}) = \\ = 6 \cdot (1.000 / 3.600) \cdot 1 \cdot 9,81 \cdot 50 = 817 \text{ W}$$

b. *Potència proporcionada pel motor en el seu punt nominal*

L'expressió de la potència del motor en el seu punt nominal és:



$$P_{mN} = M_N (\text{N} \cdot \text{m}) \cdot n_N \cdot (\pi/30) (\text{rad/s}) = 14,5 \cdot 1.450 \cdot (\pi/30) = 2.202 \text{ W (2,2 kW)}$$

c. *Rendiment global entre la potència absorbida pel fluid de la bomba i la potència proporcionada pel motor*

El rendiment global entre la potència absorbida pel fluid impulsat per la bomba i la potència proporcionada pel motor és:

$$\eta = P_r / P_{mN} = 817 / 2.202 = 0,371 \text{ (37,1 \%)}$$

Si la potència absorbida pel sistema de suport del rotor de la bomba i el sistema de segellament (per evitar la fuga d'aigua) és de 250 W, es demana:

d. *Rendiment de la bomba respecte a la potència disponible per elevar l'aigua*

Primer, se sostreu de la potència del motor la potència absorbida pels suports del rotor i pel sistema de segellament:

$$P_{m.efectiu} = P_{mN} - 150 = 2.202 - 250 = 1.952 \text{ W}$$

El rendiment entre la potència absorbida pel fluid de la bomba i la potència proporcionada pel motor, descomptades les pèrdues en els suports i el segellament, és:

$$\eta = P_r / P_{m.efectiu} = 817 / 1.952 = 0,418 \text{ (41,8\%)}$$

→ 4



Mecanismes de frec

Aquest capítol es correspon amb l'assignatura Mecanismes i Màquines de la carrera d'Enginyeria Industrial de l'ETSEIB per als alumnes d'intensificació mecànica, que, al seu torn, provenia del desdoblament en quadrimestres (segona part) de l'anterior assignatura anual Cinemàtica i Dinàmica de Màquines.

La pràctica de l'autor en l'ensenyament d'aquesta matèria li ha fet veure que el *frec* (o fregament) és clau en l'anàlisi i la comprensió de molts elements i dispositius dels mecanismes i de les màquines. Els fenòmens de frec es manifesten com a forces que tendeixen a oposar-se al moviment tangencial entre dues superfícies en contacte que s'exerceixen una força normal mútua, i comprenen, fonamentalment: la *fricció* (o frec dinàmic, amb moviment tangencial relatiu entre les superfícies), l'*adherència* (o frec estàtic, sense moviment relatiu entre les superfícies) i la *resistència al rodolament* (o resistència al moviment de rodolament relatiu entre les superfícies).

Hi ha molts efectes quotidians del frec, com ara la fricció d'un tronc sobre el terra, que obliga a exercir una important força d'arrossegament; l'adherència de les sabates amb el terra, que permet caminar, o l'adherència entre segments d'una mateixa corda, que permet fer nusos. També hi ha molts dispositius tècnics que es basen en el frec: en els vehicles terrestres, la tracció de les rodes amb l'asfalt o amb les vies (adherència i rodolament), els frens i embragatges (fricció) o les corretges i les bandes (adherència).

L'any 1999, l'autor va publicar el text *Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines* (referenciat a la bibliografia), que constitueix la base conceptual de les qüestions i dels exercicis d'aquest capítol.

El breu qüestionari de l'apartat 4.1 procedeix dels exàmens de l'assignatura Mecanismes i Màquines dels anys 1999 a 2011. Concretament, la qüestió 4.1.1, de l'examen de novembre del 1999; la 4.1.2, de gener del 2002; la 4.1.3, de gener del 2003; la 4.1.4, de gener del 2005, i de la 4.1.5 a la 4.1.7, de febrer del 2006.

I els exercicis de l'apartat 4.2 procedeixen, també, dels exàmens de l'assignatura Mecanismes i Màquines dels mateixos anys. Concretament, els exercicis 4.2.1 i 4.2.2, de l'examen de novembre del 1999; el 4.2.3, de gener del 2000; el 4.2.4, de novembre del 2000; el 4.2.5, de gener del 2001; el 4.2.6 i el 4.2.7, de novembre del 2001; el 4.2.8 i el 4.2.9,



de novembre del 2002; el 4.2.10, de gener del 2003; el 4.2.11 i el 4.2.12, de novembre del 2003; el 4.2.13, de novembre del 2004; el 4.2.14, de gener del 2005; el 4.2.15 i el 4.2.16, de novembre del 2005; el 4.2.17, de gener del 2006; el 4.2.18 i el 4.2.19, de novembre del 2006; el 4.2.20, de novembre del 2007; el 4.2.21 i el 4.2.22, de novembre del 2008; el 4.2.23, de novembre del 2009; el 4.2.24 i el 4.2.25, de novembre del 2010, i el 4.2.26 i el 4.2.27, de novembre del 2011.

4.1 Mecanismes de frec: qüestionari

1. Té sentit aplicar la llei de desgast en un contacte puntual? Raoneu la resposta

La llei de desgast estableix que el desgast normal d'un element de la superfície de contacte és proporcional al producte de la pressió entre les superfícies i la velocitat de lliscament. Tan sols s'aplica en un contacte lliscant (no rodolant) sobre una superfície relativament gran, en què les pressions de contacte experimenten variacions importants entre els diferents punts.

Per tant, no té sentit que s'apliqui a un contacte puntual; en aquest cas, també hi ha una distribució de pressions en una superfície molt petita.

2. Què és una sabata simètrica? Com es pot aconseguir que una sabata sigui simètrica?

Una sabata simètrica és aquella en què la direcció de desgast coincideix amb l'eix de simetria de la zona de contacte de la sabata. Perquè una sabata sigui simètrica, cal que l'articulació (real o virtual) de la sabata estigui sobre una recta perpendicular a la direcció de desgast (o l'eix de simetria de la sabata) i que passi pel centre del tambor.

La condició anterior s'obté en dues circumstàncies, tant si la sabata és interior com si és exterior: *a*) quan la sabata està articulada físicament sobre una perpendicular a l'eix de simetria del contacte sabata-tambor que passi pel centre del tambor; *b*) quan està guiada per un parell prismàtic de direcció radial respecte al tambor, simètrica al contacte tambor-sabata (és equivalent a estar articulada a l'infinit en la direcció perpendicular del parell prismàtic).

3. En quines condicions hi ha autoretenció en un embragatge cònic, és a dir, no es desconnecta quan cessa la força axial? En quines aplicacions l'autoretenció pot ser convenient i en quines no? Hi ha autoretenció en un embragatge cònic de semiangle de con de 16° i un límit d'adherència de 0,30?

Condició d'autoretenció

En un embragatge cònic, es produeix la situació d'autoretenció quan el semiangle del con, α , és igual o inferior a l'angle del con d'adherència, $\rho_0 = \text{atan}(\mu_0)$.

Aplicacions i autoretenció

En un embragatge cònic, convé que mai no es doni autoretenció ja que, en cas contrari, en cessar la força d'actuació, no es desconnectarien les parts i no funcionaria com un

embragatge. L'autoretenció pot ser interessant en acoblaments permanents (manegaments), encara que siguin desmuntables, ja que aleshores s'assegura un parell elevat transmès per fricció, alhora que les parts s'autocentren. Per desfer el manegament, cal exercir una força axial per separar les parts.

Cas concret

L'angle del con d'adherència per un límit d'adherència de 0,30 és $\rho_0 = \text{atan}(0,30) = 16,7^\circ$; per tant, encara que està molt al límit, hi ha autoretenció.

4. És aplicable el concepte de radi de fricció a un rodament?

El concepte de radi de fricció també és aplicable a un rodament. En aquest cas, atès que no hi ha una única superfície de moviment relatiu, com en el cas dels coixinets de lliscament, es pren convencionalment el diàmetre del forat de l'anell interior, d , com a referència i s'assigna un valor equivalent de coeficient de fricció μ_a :

$$r_f = \mu_a \cdot \frac{d}{2}$$

En els rodaments, el valor resultant del radi de fricció sol ser molt petit (proper a zero), pel fet que el coeficient de fricció aparent en el contacte rodolant és molt més baix que en el contacte lliscant.

5. En un coixinet radial de fricció, com actuaríeu sobre els paràmetres següents per disminuir el parell de fricció: diàmetre d , llargada B , límit d'adherència μ_0 , coeficient de fricció μ , resistència al desgast i duresa?

El parell de fricció és proporcional al radi de fricció r_f , el qual és funció del diàmetre de coixinet d i del coeficient de fricció μ , segons l'expressió següent:

$$M_f = F_r \cdot r_f \quad r_f \approx \frac{d}{2} \cdot \mu$$

Per tant, convé reduir al màxim aquests dos paràmetres.

Els altres paràmetres de l'enunciat (límit d'adherència μ_0 , resistència al desgast i duresa) no intervenen directament en el parell de fricció.

6. Es pot produir autoretenció en el moviment directe (l'element motor és el que gira) d'una transmissió cargol-femella?

En les transmissions cargol-femella, l'angle d'hèlice γ sol ser petit (normalment, inferior a 20°). En aquests casos, el rendiment de la transmissió directa (l'element giratori és motor) té l'expressió següent:

$$\eta_{dir} = \frac{F_A \cdot v_A}{F_{Te} \cdot v_T} = \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma + \rho')}$$

Com s'observa, per més que l'angle de fricció ρ' sigui elevat, el rendiment mai no s'anul·larà o es farà negatiu (cas d'autoretenció).



Tan sols en rosques no convencionals amb angles d'hèlice molt elevats (més de 75°) i angles de fricció també elevats, la suma pot ser més de 90° i el rendiment esdevenir negatiu (equivalent a la condició d'autoretenció).

7. Compareu les corretges planes amb les corretges trapezials, i indiqueu els avantatges i els inconvenients de cadascuna d'elles. Quin tipus de corretja faríeu servir per accionar un ventilador?

Les corretges planes estableixen un contacte radial amb la politja, mentre que les corretges trapezials estableixen un contacte oblic que produeix un efecte de tascó.

Com a conseqüència d'això, les corretges planes poden ser de gruix molt prim i, per tant, oferir una gran flexibilitat lateral i presentar radis de politja molt petits. Les corretges trapezials, amb contacte lateral, han de tenir forçosament un gruix elevat i una secció trapezoidal, amb una direcció de curvatura preferent (cap al costat més estret).

Elegiria una corretja trapezoidal perquè convé transmetre una potència amb el menor espai possible, més que una gran flexibilitat de la corretja en ambdós sentits.

4.2 Mecanismes de frec: exercicis

4.2.1 Solucions alternatives d'embragatge

S'ha de dissenyar un embragatge, que pot adoptar una de les tres configuracions següents en els espais disponibles corresponents: *a*) embragatge multidisc (acer-ferodo) amb discs de 160 mm de diàmetre exterior màxim i 110 mm de diàmetre interior mínim, essent la profunditat suficient per a cinc discs que treballen per les dues cares; *b*) embragatge cònic (acer-bronze) amb les mateixes limitacions de diàmetre exterior i interior que el cas anterior; *c*) embragatge d'un sol disc que treballa per les dues cares (acer-ferodo) amb un diàmetre exterior màxim de 250 mm i sense limitacions en el diàmetre interior.

Es demana:

- a. En un embragatge segons la configuració a, amb quatre molles que comprimeixen els discs entre si amb una força de 200 N, s'ha comprovat que l'embragatge rellisca quan s'aplica un parell de 73,8 N·m entre les dues parts. Quin és el coeficient de fricció del material, μ ?*

La relació entre els diàmetres exterior i interior dels discs és (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89): $\xi = d_e/d_i = 160/110 = 1,4545$.

$$M_f = z \cdot \frac{\xi + 1}{4 \cdot \xi} \cdot \mu \cdot d_e \cdot F_A$$

$$\mu = \frac{M_f}{z \cdot d_e \cdot F_A} \cdot \frac{4 \cdot \xi}{\xi + 1} = \frac{73,8}{10 \cdot 0,160 \cdot 200} \cdot \frac{4 \cdot 1,4545}{1,4545 + 1} = 0,35$$

- b. Suposant que, en el cas a, el material treballa fins al límit quan transmet un parell de 185 N·m, avalueu la força axial F_{A2} que cal exercir i la pressió admissible del material p_{adm} .*

Si els altres paràmetres es mantenen iguals, la força axial és proporcional al parell. Per tant, la força axial és:

$$F_{A2} = \frac{M_{f2}}{M_f} \cdot F_A = \frac{185}{73,8} \cdot 200 = 501,4 \text{ N}$$

La pressió màxima es pot deduir del parell transmès a partir de la fórmula (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89):

$$F_{Ab} \leq \pi \cdot \frac{\xi - 1}{2 \cdot \xi^2} \cdot p_{\max} \cdot d_e^2$$

$$p_{\max} \geq \frac{F_{Ab}}{\pi d_e^2} \cdot \frac{2 \cdot \xi^2}{\xi - 1} = \frac{501,4}{3,1416 \cdot 0,160^2} \cdot \frac{2 \cdot 1,4545^2}{1,4545 - 1} = 58.031 \text{ Pa} = 0,05803 \text{ MPa}$$

- c. *Quin semiangle del con ρ recomanarieu per a l'embragatge cònic de la configuració b, essent el coeficient de fricció acer-bronze de $\mu = 0,14$? Amb aquest semiangle del con, quina profunditat requereix l'embragatge cònic?*

L'angle límit entre la fricció i l'adherència és:

$$\rho = \text{atan}(\mu) = \text{atan}(0,14) = 0,1391 \text{ rad} = 7,97^\circ$$

Es pren un angle lleugerament superior a fi d'evitar l'autoretenció a l'embragatge (no es desacoblaria quan cessa la força axial); per exemple $\alpha = 0,145 \text{ rad} = 8,31^\circ$

La profunditat de l'embragatge cònic entre els diàmetres exterior i interior de 160 i 110 mm, respectivament, serà:

$$b = \frac{d_e - d_i}{2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{160 - 110}{2 \cdot \sin(0,145)} = 173,02 \text{ mm}$$

- d. *Partint del coeficient de fricció i del semiangle del con de l'apartat anterior i d'una pressió admissible en el material de $p_{adm} = 0,4 \text{ N/mm}^2$, establiu el parell M_{fb} que pot transmetre i la força axial F_{Ab} que cal exercir en l'embragatge cònic de la configuració b.*

Les expressions del parell que pot transmetre un embragatge cònic i de la força axial que cal aplicar per actuar-lo (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89) són:

$$M_f = z \cdot \pi \cdot \frac{\xi^2 - 1}{8 \cdot \xi^3} \cdot \frac{\mu \cdot p_{\max} \cdot d_e^3}{\sin(\alpha)} = 1 \cdot \pi \cdot \frac{1,4545^2 - 1}{8 \cdot 1,4545^3} \cdot \frac{0,14 \cdot (4 \cdot 10^5) \cdot 0,160^3}{\sin(8,31^\circ)} = 226,01 \text{ N m}$$

$$F_A \leq \pi \cdot \frac{\xi - 1}{2 \cdot \xi^2} \cdot p_{\max} \cdot d_e^2 = \pi \cdot \frac{1,4545 - 1}{2 \cdot 1,4545^2} \cdot (4 \cdot 10^5) \cdot 0,160^2 = 3.455,75 \text{ N}$$

- e. *Partint del coeficient de fricció i la pressió admissible en el material determinats en els dos primers apartats, establiu el parell M_{fc} que pot transmetre i la força axial F_{Ac} que cal exercir en l'embragatge d'un disc de dues cares de la configuració c.*

En aquest darrer cas, s'apliquen les expressions de la geometria òptima (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89):

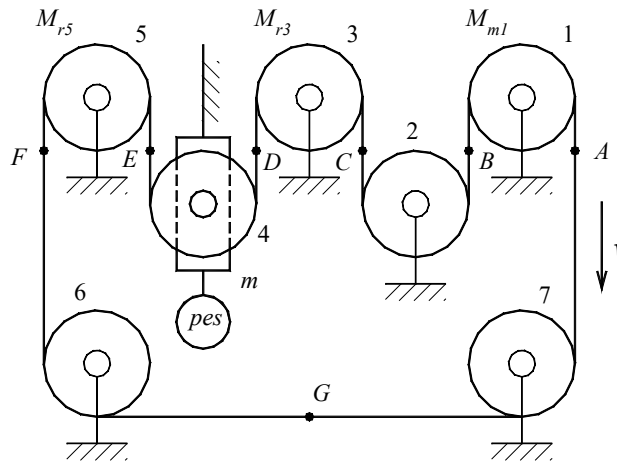
$$M_f \leq z \cdot 0,1511 \cdot \mu \cdot p_{m\dot{a}x} \cdot d_e^3 = 2 \cdot 0,1511 \cdot 0,35 \cdot 400.000 \cdot 0,160^3 = 173,29 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$F_A \leq 0,3833 \cdot p_{m\dot{a}x} \cdot d_e^2 = 0,3833 \cdot 400.000 \cdot 160^2 = 3.925,00 \text{ N}$$

4.2.2 Sistema de banda plana sobre múltiples corrns

La figura mostra un sistema de transmissió per banda plana que se suporta sobre 7 corrns iguals de diàmetre $d = 40 \text{ mm}$. La polijta (1) és motora, els dos corrns (3 i 5) són receptors, mentre que els corrns restants giren bojos.

El corró (4) pot desplaçar-se verticalment guiat per una corredora i actua com a corró tensor gràcies a un pes (la massa del conjunt de la corredora, el corró i el pes és de m). El corró receptor (3) absorbeix una potència de $P_{r3} = 240 \text{ W}$, el parell resistent sobre el corró (5) és de $M_{r5} = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$ i la banda té una massa lineal, de $m_l = 120 \text{ g/m}$ i es mou a una velocitat tangencial de $v = 3,2 \text{ m/s}$.



Se suposa que no hi ha pèrdues de rendiment en la transmissió de la banda, i que el límit d'adherència entre la banda i els corrns és de $\mu_0 = 0,3$.

Es demana:

a. Parell M_{m1} i potència P_{m1} que cal proporcionar al corró motor (1)?

Atès que es considera que no hi ha pèrdues en la transmissió de la banda, la potència que ha de proporcionar el corró (1) és la suma de les potències absorbides pels corrns (2) i (3):

$$\omega = v/(d_c/2) = 3,2/(0,040/2) = 160 \text{ rad/s} = 1.527,9 \text{ min}^{-1}$$

$$P_{m1} = P_{r3} + P_{r5} = P_{r3} + M_{r5} \cdot \omega = 240 + 2 \cdot 160 = 560 \text{ W}$$

$$M_{m1} = \frac{P_{m1}}{\omega} = \frac{560}{160} = 3,5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Els parells i les potències dels tres corrons 1, 3 i 5 són (els valors positius són del corró motor i els valors negatius corresponen als corrons receptors):

	Corró 5	Corró 3	Corró 1
Parell	-1,5 N·m	-2,0 N·m	3,5 N·m
Potència	-240 W	-320 W	560 W

b. Diferències de tensions entre l'entrada i la sortida dels corrons

Tan sols hi ha diferències de tensions en els corrons que transmeten parell, és a dir, els corrons (1) T_A-T_B , (3) T_C-T_D i (5) T_F-T_E , que són:

$$T_B - T_A = M_{m1} / (d_c / 2) = 3,5 / (0,040 / 2) = 175 \text{ N}$$

$$T_C - T_D = M_{m3} / (d_c / 2) = 2,0 / (0,040 / 2) = 100 \text{ N}$$

$$T_E - T_F = M_{m5} / (d_c / 2) = 1,5 / (0,040 / 2) = 75 \text{ N}$$

Les altres diferències de tensions són nul·les:

$$T_B - T_C = T_D - T_E = T_G - T_F = T_A - T_G = 0 \text{ N}$$

c. Tensió centrífuga a la banda. És significativa respecte a les diferències de tensions calculades en els punts anteriors?

La tensió centrífuga és:

$$T_c = m_l \cdot v^2 = 0,12 \text{ (kg/m)} \cdot 3,2^2 \text{ (m/s)}^2 = 1,229 \text{ N}$$

Atès que la tensió centrífuga és molt petita, no es considerarà en els propers càlculs.

d. Tensions absolutes en els punts A, B, C, D, E, F, G, a fi que la banda no rellisqui sobre cap dels corrons (límit d'adherència entre corrons i bandes $\mu_0 = 0,3$).

A tots els corrons, la cinta abraça 180°. El corró que relliscarà primer és (1) i el parell que transmet és el més elevat. Cal que es compleixin les condicions següents:

$$T_B - T_A = 175 \text{ N}$$

$$T_B / T_A = e^{(\mu \cdot \gamma)} = e^{(0,3 \cdot \pi)} = 2,5563$$

Després de resoldre aquest sistema, s'obté:

$$T_B = 286,7 \text{ N} \quad T_A = 111,7 \text{ N}$$

Coneixent les diferències de tensions de la banda als extrems dels corrons, es pot establir:

$$T_B = T_C = 286,7 \text{ N} \quad T_D = T_E = 186,7 \text{ N} \quad T_F = T_G = T_A = 111,7 \text{ N}$$

e. Massa mínima del tensor, m, per assegurar les tensions absolutes anteriors

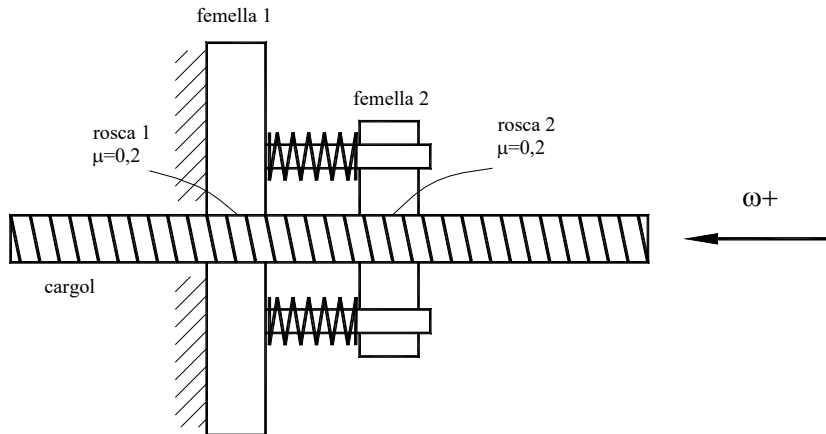
La massa ha de ser suficient perquè el seu pes compensi les tensions (iguals entre si) dels ramals D i E, és a dir:

$$m \cdot g = T_D + T_E = 373,5 \text{ N} \quad m = 30,1 \text{ kg} \quad (g = 9,81 \text{ m/s}^2)$$



4.2.3 Efecte de femella i contrafemella

Una barra roscada (rosca a dretes) enllaça amb dues femelles, 1 i 2. La femella 1 és solidària a la bancada de la màquina, mentre que la femella 2, guiada per unes tiges fixes a la femella 1, pot desplaçar-se axialment però no pot girar. Aquestes dues femelles tendeixen a separar-se axialment, accionades per unes molles que exerceixen conjuntament una força de $F_{molla} = 850 \text{ N}$. La barra roscada és d'un sol filet, el pas és de $p = 5 \text{ mm}$, el diàmetre mitjà de la rosca és de $d_m = 12 \text{ mm}$ i el coeficient de fricció estimat entre la barra roscada i les femelles és de $\mu = 0,2$.



Es demana:

- a. Angle d'hèlice de la rosca i angle de fricció en els enllaços entre la barra roscada i les femelles 1 i 2. Són enllaços reversibles o irreversibles?

L'angle d'hèlice de la rosca és:

$$\tan \gamma = \frac{z \cdot p}{\pi \cdot d_m} = \frac{1 \cdot 5}{3,1416 \cdot 12} = 0,13263 \quad \gamma = \text{atan}(0,13263) = 7,555^\circ$$

Els angles de fricció entre el cargol i les femelles és:

$$\rho = \text{atan}(\mu) = \text{atan}(0,20) = 11,310^\circ$$

En aquest cas, $\gamma > \rho$ i, per tant, el flux de potència en els enllaços de la transmissió és irreversible, és a dir, si l'element motor empeny axialment, no indueix el gir de l'element receptor.

- b. Suposant que la barra es fa girar en el sentit marcat per ω al dibuix, avalueu el parell necessari per fer girar la barra. Separeu aquest parell en els components corresponents als enllaços amb la femella 1 i amb la femella 2. Canvia aquest parell si s'inverteix el sentit de gir de la barra roscada?

En el sentit axial, tan sols actuen un conjunt de molles, que tendeixen a separar-se entre si. Una de les femelles (la 2) treballa tendint a enroscar-se (en el sentit del moviment), mentre que l'altra (la 1) treballa tendint a desenroscar-se (contra el sentit del moviment).

Els parells que cal exercir sobre la rosca per avançar o retrocedir, són:

$$M_{dir1} = F_A \cdot \tan(\gamma + \rho) \cdot d_m / 2 = 850 \cdot \tan(7,555 + 11,310) \cdot 0,012 / 2 = 1,743 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{inv2} = -F_A \cdot \tan(\gamma - \rho) \cdot d_m / 2 = 850 \cdot \tan(7,555 - 11,310) \cdot 0,012 / 2 = 0,335 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Per tant, el parell total que caldrà exercir sobre la barra roscada per avançar en el sentit marcat a la figura serà:

$$M_{total} = M_{dir1} + M_{inv2} = 1,743 + 0,335 = 2,078 \text{ N}\cdot\text{m}$$

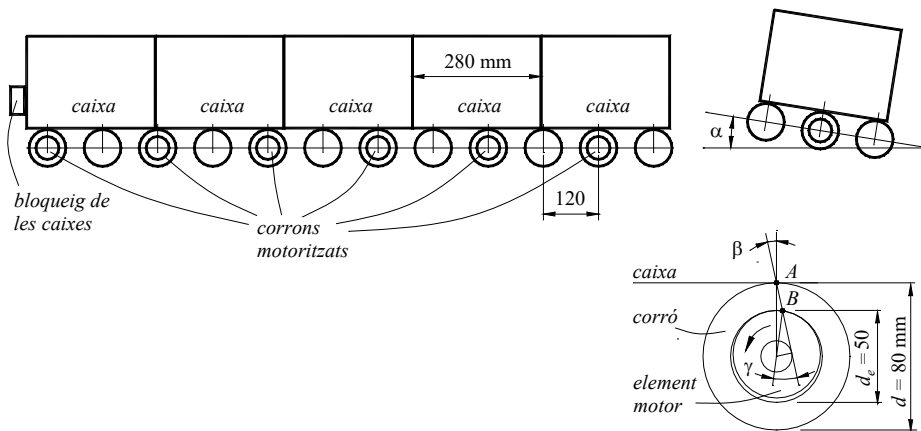
c. Si s'augmenta la força de les molles (F_{molla}), es pot produir autoretenció quan s'intenta fer girar la barra? En cas afirmatiu, avalueu la força de la molla

Els parells en un sentit i en l'altre que cal exercir sobre la barra roscada per fer-la girar són proporcionals a la força axial F_A i, per tant, mai no es produeix el fenomen de l'autoretenció.

4.2.4 Camí de corrons

Un camí de corrons motoritzats (un de cada dos) arrossega unes caixes de massa $m = 24$ kg en trajectes horitzontals i inclinats a una velocitat $v = 0,3$ m/s. Les caixes se suporten alternativament sobre dos corrons i sobre tres i, en tot moment, el pes es reparteix entre els corrons que les suporten.

A fi de gestionar el sistema, en determinats trams horitzontals, hi ha un element que pot bloquejar el moviment i produir una acumulació de fins a cinc caixes. En cas de retenció de les caixes, el contacte entre el corró i l'element motor funciona com un embragatge de fricció per tal d'evitar el lliscament i la fricció entre els corrons i les caixes.



Es demana:

a. A partir de l'esquema de la figura, establiu la condició perquè el lliscament es produeixi a l'embragatge (punt B) i no al contacte entre la caixa i el corró (punt A)



Si el pes del corró és negligible i els contactes corró-caixa (punt A) i element motor-corró (punt B) són puntuals, l'equilibri del corró s'estableix entre dues forces aplicades als punts A i B , que necessàriament tenen la direcció AB (cada una d'elles és el resultat d'una normal i una força de frec). Atès que els angles β i γ són petits, la geometria permet establir:

$$\frac{d}{2} \cdot \tan \beta = \frac{d_e}{2} \cdot \sin \gamma \approx \frac{d_e}{2} \cdot \tan \gamma \quad \tan \beta \approx \tan \gamma \cdot \frac{d_e}{d}$$

Si, per motius funcionals, cal imposar que el lliscament es produeixi en el contacte element motor-corró (punt B) i no en el contacte corró-caixa (punt A), quan la tangent de l'angle γ sigui igual al coeficient de fricció al punt B (μ_B) a fi que es produeixi el lliscament, la tangent de l'angle β ha de ser inferior al límit d'adherència al punt A (μ_{A0}) a fi d'assegurar-ne l'adherència.

Aquesta condició s'expressa:

$$\mu_{A0} \geq \tan \beta \approx \tan \gamma \cdot \frac{d_e}{d} = \mu_B \cdot \frac{d_e}{d} \quad \mu_{A0} \geq \frac{d_e}{d} \cdot \mu_B = \frac{0,050}{0,080} \cdot \mu_B = 0,625 \cdot \mu_B$$

condició gens difícil d'aconseguir i que admet una gran varietat de materials en els contactes.

b. Sabent que el límit d'adherència entre les caixes i els corrons és de $\mu_{A0} = 0,28$, determineu el pendent màxim que poden superar les caixes sense que es produeixi lliscament amb els corrons motoritzats.

Seguint la hipòtesi establerta a l'enunciat, la força normal sobre cada corró correspon (en el cas més desfavorable) a 1/3 de la projecció del pes sobre aquesta direcció. Suposant que l'angle d'inclinació del camí de corrons és α , aleshores el límit d'adherència entre la caixa i el corró ha de complir la condició següent:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_{A0} \cdot \frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{3} \quad \tan \alpha \leq \frac{\mu_{A0}}{3} = \frac{0,28}{3} \quad \alpha \leq 5,332^\circ$$

c. Per a l'embragatge (punt B), es disposa de combinacions de materials amb coeficients de fricció de $\mu_{B1} = 0,35$, $\mu_{B2} = 0,40$ i $\mu_{B3} = 0,45$. Quin adoptariu?

Aquesta decisió demana un compromís: a) Si s'adopta un coeficient de fricció a B excessivament baix, es limita la capacitat d'arrossegament de les caixes als pendents molt per sota de l'angle límit admissible de $\alpha \leq 5,332^\circ$ calculat anteriorment. b) I, si s'adopta un valor excessivament alt als trams de bloqueig del moviment de les caixes, el lliscament es produiria abans al punt A de contacte caixa-corró (amb efectes no volguts) que al punt B de l'embragatge entre l'element motor i el corró.

S'adopta, doncs, el valor més alt que assegurí que el lliscament es produeix al punt B de l'embragatge, i no al punt A del contacte caixa-corró. Invertint la relació obtinguda a l'apartat 1, i tenint en compte que el límit d'adherència caixa-corró és $\mu_{A0} = 0,28$, s'obté:

$$\mu_B \leq \frac{d}{d_e} \cdot \mu_{A0} = \frac{0,080}{0,050} \cdot 0,28 = 0,448$$

D'entre les combinacions de materials de l'enunciat (0,35 0,40 i 0,45), el valor màxim que es pot adoptar és $\mu_{B2} = \tan\gamma = 0,40$ ($\gamma = 21,801^\circ$).

Per calcular el pendent màxim que es pot superar sense que es produeixi lliscament a l'embragatge, es procedeix de la manera següent. Es parteix del coeficient de fricció a B, $\mu_{B2} = 0,40$, i s'avalua l'angle β , la tangent del qual és equivalent a l'angle de fricció aparent entre la caixa i el corró, $\mu_{A(B)}$, a causa del lliscament de l'embragatge:

$$\mu_{A(B)} = \tan\beta = \mu_B \cdot \frac{d_e}{d} = 0,40 \cdot \frac{0,050}{0,080} = 0,250 \quad \beta = 14,036^\circ$$

$$\tan\alpha \leq \frac{\mu_{A(B)}}{3} = \frac{\mu_B}{3} \cdot \frac{d_e}{d} = \frac{0,40}{3} \cdot \frac{0,050}{0,080} = 0,2083 \cdot \mu_B = 0,0833$$

$$\alpha \leq 4,764^\circ$$

Per disposar d'un cert marge, s'adopta el pendent màxim de $\alpha = 4,5^\circ$.

d. *Quina és l'empenta d'acumulació entre el dispositiu de bloqueig i la primera caixa quan s'hi acumulen cinc caixes?*

Sabent que cada una de les caixes pesa $m \cdot g = 235,4$ N, i seguint el criteri de repartiment de càrregues establert a l'enunciat, s'obtenen, per a la seqüència de caixes de la figura, els pesos següents sobre els corrons motoritzats (darrera columna):

caixa 1	2 corrons de suport	1 corró motoritzat	117,7 N
caixa 2	3 corrons de suport	2 corrons motoritzats	157,0 N
caixa 3	2 corrons de suport	1 corró motoritzat	117,7 N
caixa 4	2 corrons de suport	1 corró motoritzat	117,7 N
caixa 5	3 corrons de suport	1 corró motoritzat	78,5 N
5 caixes	12 corrons de suport	6 corrons motoritzats	588,6 N

Així, doncs, la càrrega conjunta que gravita sobre els corrons motoritzats és $\Sigma F_{Anor} = 588,6$ N. L'empenta total d'acumulació resulta d'aplicar el frec aparent entre la caixa i el corró a A (a causa de l'embragatge), $\mu_{A(B)}$, sobre la càrrega conjunta:

$$E_{acum} = \mu_{A(B)} \cdot \Sigma F_{Anor} = 0,250 \cdot 588,0 = 147,0$$

e. *Potència màxima dissipada en els corrons del tram d'acumulació, quan el moviment de les cinc caixes s'ha bloquejat.*

Per fer avançar les caixes a $v = 0,3$ m/s, la velocitat de lliscament al punt B és:

$$\omega = \frac{v}{d/2} = \frac{0,3}{0,080/2} = 7,5 \text{ rad/s} \quad v_B = \omega \cdot \frac{d_e}{2} = 7,5 \cdot \frac{0,050}{2} = 0,1875 \text{ m/s}$$

La repercussió de la suma de forces normals que graviten sobre els corrons motoritzats, ΣF_{Anor} , sobre la suma de forces tangencials en els contactes B, ΣF_{Blan} , es calcula com segueix:

$$\Sigma F_{Blan} = \Sigma F_{Anor} \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\beta} = 588,6 \cdot \frac{\sin 21,801^\circ}{\cos 14,036^\circ} = 225,32 \text{ N}$$

La potència és el producte de la suma de forces tangencials als contactes B per la velocitat de lliscament als contactes B :

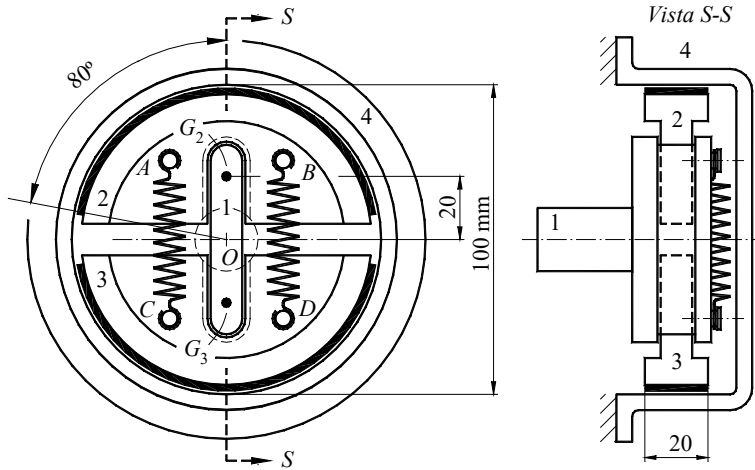
$$P_{dis} = \Sigma F_{Btan} \cdot v_B = 225,32 \cdot 0,1875 = 42,25 \text{ W}$$

És una potència relativament feble.

Nota: Aquest exercici s'ha resolt partint de la consideració que el contacte en l'embragatge és aproximadament molt puntual. Aquesta és la hipòtesi més versemblant ja que, per al bon funcionament del sistema, cal una tolerància folgada entre l'element motor i el corró.

4.2.5 Fre centrífug de dues sabates

La figura mostra un fre centrífug.



Les dues sabates, 2 i 3, d'una massa de $m_s = 0,250 \text{ kg}$ cadascuna, estan enllaçades amb l'arbre motor 1 per mitjà de guies lineals que en permeten el desplaçament radial. Quan, en girar el conjunt format per l'arbre motor 1 i les dues sabates 2 i 3, la força centrífuga sobre les sabates venç la força de les molles, AC i BD , cada una de valor $F_m = 26 \text{ N}$ constant (ja que el desplaçament és molt petit), les sabates freguen sobre el tambor i creen el parell de frenada ($\mu = 0,35$).

Es demana:

- Direcció de desgast i equilibri de les forces que actuen sobre cadascuna de les mordasses, en funció de la velocitat de gir del membre 1. Estudieu si les sabates d'aquest fre tenen efectes primaris o secundaris.

En les sabates guiades per una guia lineal, la direcció de desgast és precisament la direcció de desplaçament de la sabata; atès que les dues sabates són simètriques, s'hi poden aplicar les fórmules 17, 18 i 19 (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 80) per a un angle de sabata de $\alpha = 160^\circ$ (segons s'indica a la figura).

Hi ha dues situacions d'equilibri de la sabata.

S'estudia la sabata 2. Les tres forces que intervenen en l'equilibri són:

- La força de les molles, que es considera constant: $2 \cdot F_m = 2 \cdot 26 = 52$ N (aplicada en la direcció de l'eix de simetria).
- La força centrífuga, aplicada al centre d'inèrcia G_2 :

$$F_{IG2} = m_2 \cdot (\omega_1^2 \cdot OG_2) = 0,250 \cdot (\omega_1^2 \cdot 0,020) = 0,005 \cdot \omega_1^2$$
- Una força de contacte. Poden donar-se dos casos:
 - Si la força de les molles és superior a la força centrífuga, el contacte s'estableix entre el fons de la guia de la sabata 2 i la guia solidària amb l'arbre motor 1 (el fre no actua i, per tant, aquest cas no s'estudia).
 - Quan la força centrífuga sobre la sabata supera la força de les molles, el contacte s'estableix entre la sabata 2 i el tambor 4, i la força normal ve donada per l'expressió següent:

$$F_N = F_{IG2} - F_m = 0,005 \cdot \omega_1^2 - 52 \text{ N}$$

Les forces de contacte normals entre les sabates i el tambor originen un parell de frenada, que s'expressa a través de l'equació següent (*Mecanismes i màquines*, equació 19, p. 80), on $n = 2$ (dues sabates), $\mu = 0,35$, $r = 0,050$ m (vegeu la figura anterior) i $\alpha = 160^\circ = 2,793$ rad (vegeu també la figura anterior):

$$\begin{aligned} M_f &= n \cdot \mu \cdot F_N \cdot r \cdot \frac{4 \cdot \sin(\alpha / 2)}{\alpha + \sin \alpha} = 2 \cdot 0,35 \cdot (0,005 \cdot \omega_1^2 - 52) \cdot 0,05 \cdot \frac{4 \cdot \sin 80^\circ}{2,793 + \sin 160^\circ} = \\ &= 0,043985 \cdot (0,005 \cdot \omega_1^2 - 52) \text{ N} \cdot \text{m} = 0,000220 \cdot \omega_1^2 - 2,287 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Les sabates amb guia lineal són equivalents a sabates amb una articulació en la direcció perpendicular a la guia situada a l'infinit; per tant, no presenten efecte primari ni secundari, sinó que són neutres respecte al sentit de gir.

- Característica de l'embragatge centrífug, o sigui, parell de frenada en funció de la velocitat angular (punts corresponents a les velocitats angulars de 60, 80, 100 i 120 min^{-1}). Pressió màxima de treball del material, p_0 , per a cadascuna d'aquestes velocitats angulars.*

Per estudiar la característica de l'embragatge centrífug (moment de frenada per a cada velocitat angular indicada), cal aplicar la fórmula de l'apartat anterior per a la força de contacte normal i per al parell de frenada:

$$\begin{aligned} F_N &= 0,005 \cdot \omega_1^2 - 52 \text{ N} \\ M_f &= 0,043985 \cdot F_N \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Per calcular la pressió màxima de treball del material, es pot partir de la fórmula següent (inversió de l'expressió de la força normal (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, taula 3, p. 74):

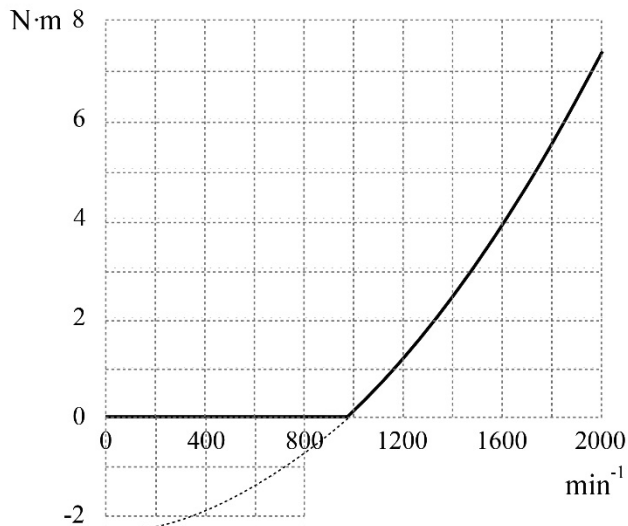
$$p_0 = \frac{2 \cdot F_N}{b \cdot r \cdot (\alpha + \sin \alpha)}$$



Els valors anteriors, donats en forma de taula, són:

n_1 (min ⁻¹)	ω_1 (rad/s)	F_N (N)	M_f (N·m)	p_0 (MPa)
600	62,832	-32,260	0	0
800	83,776	-16,908	0	0
1.000	104,720	2,831	0,125	0,0018
1.200	125,664	26,957	1,186	0,0172
1.400	146,608	55,469	2,440	0,0354
1.600	167,552	88,368	3,887	0,0564
1.800	188,496	125,653	5,527	0,0802
2.000	209,440	167,325	7,360	0,1068

La representació d'aquests valors mostra la característica mecànica del fre centrífug:



c. Si s'aplica a l'arbre d'entrada 1 del fre un parell exterior constant de 4 N·m, quina és la velocitat d'equilibri ω_e del sistema?

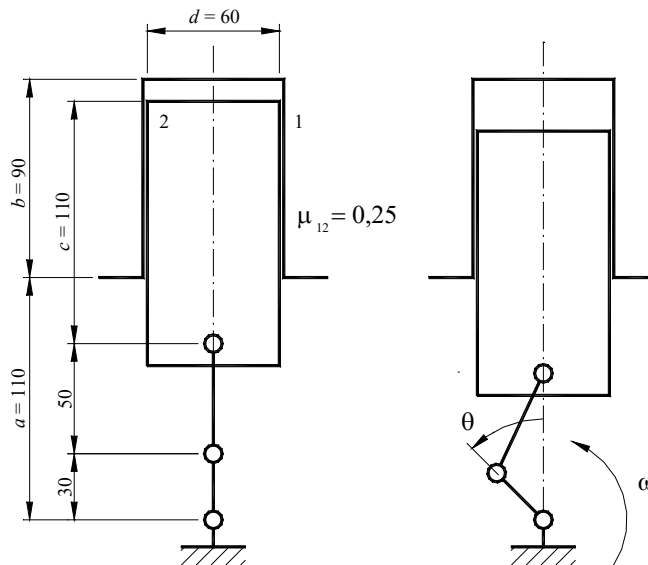
La velocitat d'equilibri s'obté a partir d'igualar el parell exterior amb el parell de frenada, funció de la velocitat angular:

$$M_{ext} = 4 \text{ N}\cdot\text{m} = M_f = 0,000220 \cdot \omega_e^2 - 2,287 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\omega_e = \sqrt{\frac{4 + 2,287}{0,000220}} = 169,048 \text{ rad/s} = 1614,3 \text{ min}^{-1}$$

4.2.6 Autoretençió en un mecanisme de corredora

La figura adjunta mostra un mecanisme de corredora-biela-manovella que pot donar voltes senceres, on hi ha les dimensions i el coeficient de fricció entre la guia i la corredora. A fi de facilitar la resposta als punts 1, 2, 3 i 4, analitzeu el mecanisme en les sis posicions corresponents a $\theta = 45^\circ$, $\theta = 90^\circ$, $\theta = 135^\circ$, $\theta = 225^\circ$, $\theta = 270^\circ$ i $\theta = 315^\circ$.



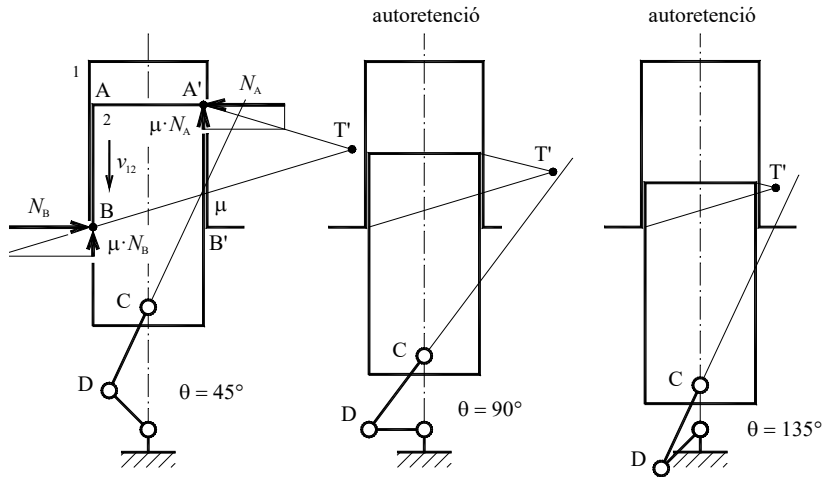
Concretament:

- a. *Determineu els punts d'autoretençió en les posicions següents del mecanisme: $\theta = 45^\circ$, $\theta = 90^\circ$ i $\theta = 135^\circ$, i si es produeix autoretençió o no*

En aquestes tres posicions del mecanisme, la corredora té una velocitat de lliscament cap avall respecte de la guia (segons s'indica a la figura) i la força que transmet la biela CD tendeix a entregar la corredora dintre de la guia, de forma que toquen els punts B i A' . Per tant, les forces normals i de fricció en aquests punts de contacte determinen el punt d'autoretençió T' . A partir de les geometries d'aquestes tres posicions, s'observen les situacions següents:

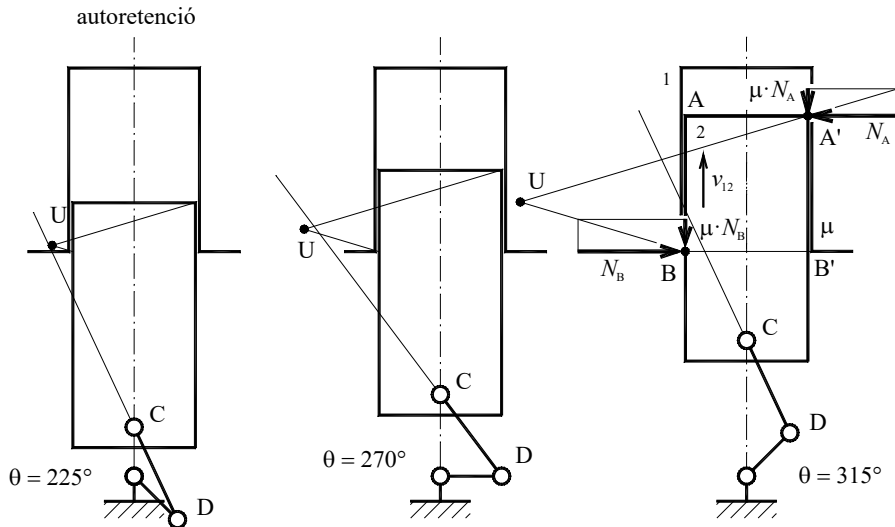
Per a la posició $\theta = 45^\circ$, la línia d'acció de la força transmesa per la biela CD passa entre l'eix de simetria de la corredora i el punt d'autoretençió T' i, per tant, *no* es produeix autoretençió.

En canvi, per a les posicions $\theta = 90^\circ$ i $\theta = 135^\circ$, es dóna la circumstància contrària i, per tant, *sí* que es produeix autoretençió.



b. Determineu els punts d'autoretençió en les posicions següents del mecanisme: $\theta = 225^\circ$, $\theta = 270^\circ$ i $\theta = 315^\circ$, i si es produeix autoretençió o no

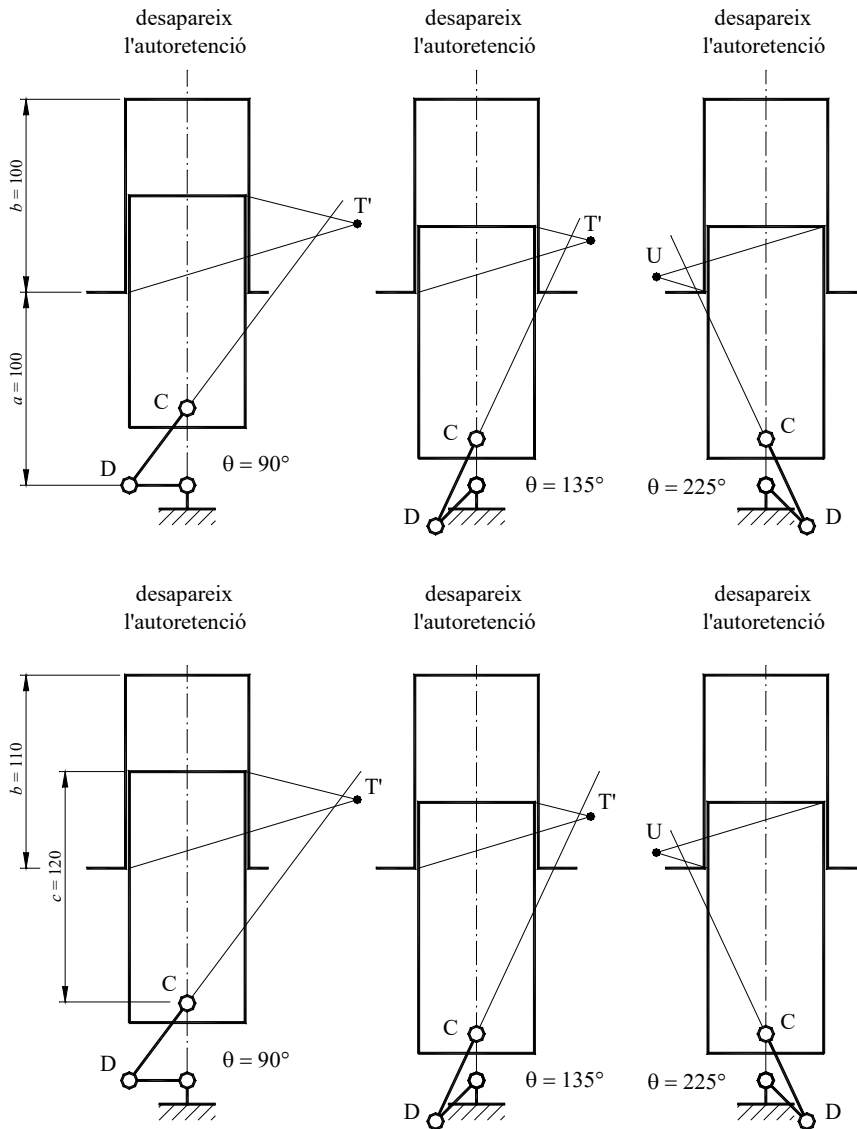
En aquestes tres posicions del mecanisme, la corredora té una velocitat de lliscament amunt respecte de la guia (segons s'indica en la figura) i la força que transmet la biela CD tendeix a entregar la corredora dintre de la guia en el mateix sentit que en els casos anteriors de forma que també toquen els punt B i A'. Però ara, el canvi de sentit de les forces de fricció fa que el punt d'autoretençió sigui U.



Dibuixades les geometries de les posicions $\theta = 225^\circ$, $\theta = 270^\circ$ i $\theta = 315^\circ$, s'observen les situacions següents: per a la posició $\theta = 225^\circ$, la línia d'acció de la força transmesa per la biela CD passa més enllà del punt d'autoretençió U i, per tant, *sí* que es produeix autoretençió; en canvi, per a les posicions $\theta = 270^\circ$ i $\theta = 315^\circ$, es dona la circumstància contrària i, per tant, *no* es produeix autoretençió.

c. Proposeu modificacions dels paràmetres a , b , c i d (augment o disminució) per tal d'allunyar el perill d'autoretenció al mecanisme

Un dels efectes més beneficiosos s'obté augmentant b (per exemple, $a = 100$ i $b = 100$ mm), ja que a totes les posicions s'augmentaria la longitud de contacte i es disminuiria la distància entre el punt C i el centre de la zona de contacte (influència menor de la inclinació de la biela).

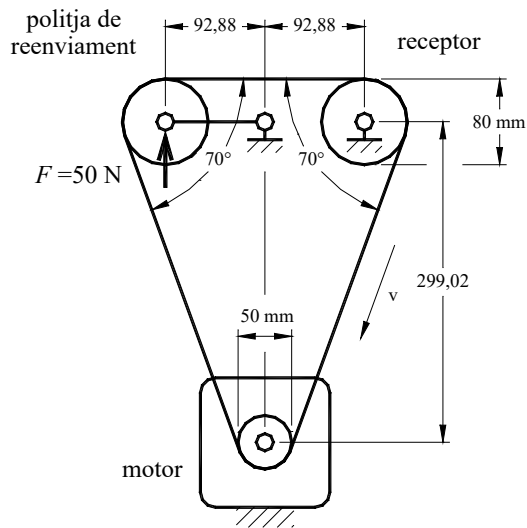


Un efecte quasi equivalent s'obté augmentant c (també caldria augmentar b ; per exemple, $c = 130$ i $b = 100$ mm), ja que s'augmentaria la longitud de contacte a totes les posicions, però no es disminuiria la distància entre el punt C i el centre de la zona de contacte.

Un efecte molt petit (favorable en alguna de les posicions i desfavorable en altres) tindria la variació de d (no augmenta la separació dels punts d'autoretenció respecte a l'eix de simetria de l'enllaç de la guia corredora i tan sols en modifica la situació en la direcció longitudinal); per tant, no es recomana.

4.2.7 Transmissió de corretja plana

La figura adjunta mostra una transmissió de corretja plana entre un motor i un receptor, i una politja de reenviament, situats en un pla horitzontal. El tensat de la corretja de 20 mm d'amplada s'aconsegueix gràcies a l'acció d'una molla de 50 N de força sobre el balancí que suporta la politja de reenviament. La corretja té una massa lineal de $m_l = 0,08$ kg/m i el límit d'adherència amb la politja és de $\mu_0 = 0,35$.



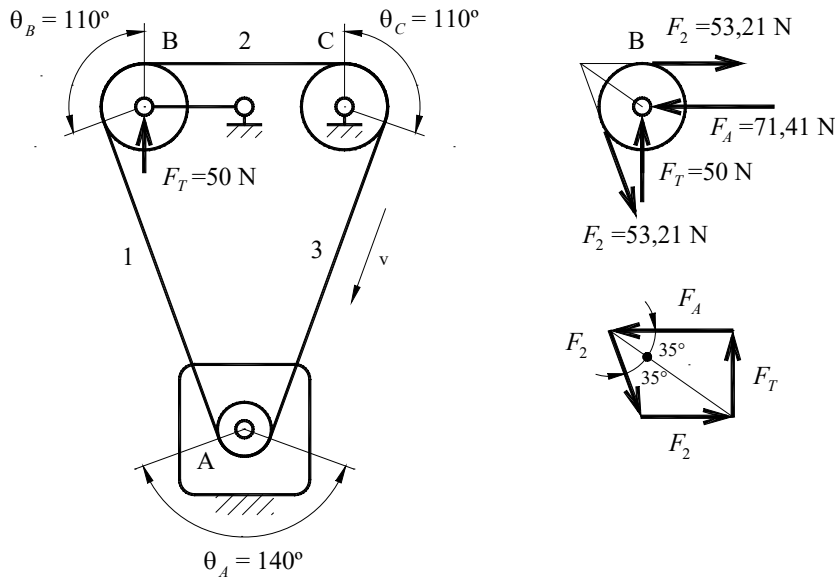
Es demana:

- Parell màxim que poden rebre l'eix receptor i la politja on es produeix el lliscament de la corretja a l'instant de l'arrencada (sense força centrífuga)

Atès que la politja B és de reenviament, els seus dos ramals estan sotmesos a la mateixa força ($F_1 = F_2$, ramal menys tens), mentre que la transmissió s'estableix entre els eixos A (motor) i C (receptor), essent el ramal 3 el més tens (F_3).

En iniciar-se el moviment, no hi haurà força centrífuga i, per tant, tota la força de tensió s'utilitzarà en la transmissió.

Per mitjà de càlculs simples, els arcs amb què la corretja abraça les politges motora i receptora són: politja A, $\theta_A = 140^\circ$; politja B, $\theta_C = 140^\circ$. Per tant, essent les forces de tensió les mateixes en els dos ramals de les politges motora i receptora, la més crítica és la d'angle abraçat més petit, és a dir, la B. La relació de tensions és:



$$\frac{F_3}{F_1} = e^{\mu_0 \theta_3} = e^{0,31 \cdot 92} = 1,96$$

Establint l'equilibri a la politja B entre la força tangencial de tensat, F_T ($= 50 \text{ N}$, coneguda), la força en la direcció del balancí, F_A , i les forces de tensió dels dos ramals de la corretja, F_2 , s'obté el seu valor ($F_2 = 53,21 \text{ N}$), a partir del qual es pot obtenir la força de tensió F_3 , la diferència de forces de tensió dels dos ramals $F_3 - F_2$ i, finalment, el parell receptor M_C :

$$F_3 = F_2 \cdot e^{\mu_0 \theta_c} = 53,21 \cdot 1,96 = 104,19 \text{ N}$$

$$F_3 - F_2 = 104,19 - 53,21 = 50,98 \text{ N}$$

$$M_C = (F_3 - F_2) \cdot \frac{d_C}{2} = 50,98 \cdot \frac{0,080}{2} = 2,04 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b. Si l'eix del motor gira a 4.500 min^{-1} , la potència màxima que pot rebre l'eix receptor sense que la corretja llisqui

Per a aquesta velocitat angular, la tensió centrífuga té incidència:

$$F_C = m_l \cdot v^2 = m_l \cdot \left(\omega_A \frac{d_A}{2} \right)^2 = 0,08 \cdot \left(\frac{4500 \cdot \pi}{30} \cdot \frac{0,050}{2} \right)^2 = 11,10 \text{ N}$$

La força de la molla que actua sobre el balancí genera unes tensions iguals en els dos ramals de la politja de reenviament de $F_2 = 53,21 \text{ N}$ (vegeu l'equilibri de forces de la figura). La màxima tensió del ramal 3, F_3 , sense que la corretja rellisqui sobre la politja receptora (la més crítica), és:

$$\frac{F_3 - F_C}{F_2 - F_C} = e^{\mu_0 \theta_c} = \frac{F_3 - 11,10}{53,21 - 11,10} = 1,96 \quad F_3 = 93,64 \text{ N}$$



A partir d'aquests valors, el parell receptor que pot transmetre sense que la corretja rellisqui i la potència que pot transmetre són:

$$M_C = (F_3 - F_2) \cdot \frac{d_C}{2} = (93,64 - 53,21) \cdot \frac{0,080}{2} = 1,62 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$P = M_C \cdot \omega_C = M_C \cdot \omega_A \cdot \frac{d_A}{d_C} = 1,62 \cdot \frac{4500 \cdot \pi}{30} \cdot \frac{0,050}{0,080} = 477,1 \text{ W}$$

c. Per a les condicions de l'apartat 1, la pressió màxima entre la corretja i la politja

La pressió màxima entre la corretja i una politja té lloc a la politja més petita (diàmetre més petit) i per a la tensió més elevada:

$$p_{\max} = \frac{F_3}{b \cdot (d_A / 2)} = \frac{104,19}{0,020 \cdot (0,050 / 2)} = 208380 \text{ Pa} = 0,208 \text{ MPa}$$

d. En les condicions de l'apartat 2, la potència que podria transmetre una corretja de 30 mm d'amplada però de la mateixa massa per unitat de longitud

De fet, en cap dels passos de l'apartat 2 ha intervingut l'amplada de la corretja, per la qual cosa podria transmetre la mateixa potència de l'apartat 2, de 477,1 W. Tanmateix, la pressió de contacte baixaria a 2/3.

En general, un augment de l'amplada de la corretja permetria augmentar la força de la molla de tensat, mantenint la mateixa força de tensió per unitat d'amplada de corretja; aleshores, la capacitat de transmissió de potència també augmentaria. L'augment previsible de la massa per unitat de longitud també es repartiria en una amplada més gran.

e. En cas que canviï de sentit el moviment de la corretja, quina variació es produeix en el comportament del sistema?

En un canvi de sentit del moviment de la corretja, els ramals 1 i 2 passen a estar sotmesos a una força de tensió més gran. Per tant, els apartats 1 i 3 tindrien la nova formulació següent:

$$\frac{F_2}{F_3} = e^{\mu_0 \cdot \theta_3} = e^{0,3 \cdot 1,92} = 1,96$$

Apartat 1. En iniciar el moviment, a partir de la $F_2 = 53,21 \text{ N}$ (ara la força del ramal més tens), s'obté el valor de la força de tensió F_3 , la diferència de forces de tensió dels dos ramals, $F_2 - F_3$, i el nou parell receptor, M_C :

$$F_3 = \frac{F_2}{e^{\mu_0 \cdot \theta_c}} = \frac{53,21}{1,96} = 27,15 \text{ N}$$

$$F_2 - F_3 = 53,21 - 27,15 = 26,06 \text{ N}$$

$$M_C = (F_2 - F_3) \cdot \frac{d_C}{2} = 26,06 \cdot \frac{0,080}{2} = 1,04 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Es constata que el parell transmès s'ha reduït quasi a la meitat.

Apartat 2. Si la velocitat de la corretja és la mateixa, la força centrífuga també ho serà ($F_C = 11,10$ N). La nova equació de les tensions serà:

$$\frac{F_2 - F_C}{F_3 - F_C} = e^{\mu_0 \cdot \theta_c} = \frac{53,21 - 11,10}{F_3 - 11,10} = 1,96 \quad F_3 = 32,58 \text{ N}$$

A partir d'aquests valors, el parell receptor que pot fer sense relliscar i la potència que pot transmetre són:

$$M_C = (F_2 - F_3) \cdot \frac{d_C}{2} = (53,21 - 32,58) \cdot \frac{0,080}{2} = 0,83 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$P = M_C \cdot \omega_C = M_C \cdot \omega_A \cdot \frac{d_A}{d_C} = 0,83 \cdot \frac{4500 \cdot \pi}{30} \cdot \frac{0,050}{0,080} = 244,5 \text{ W}$$

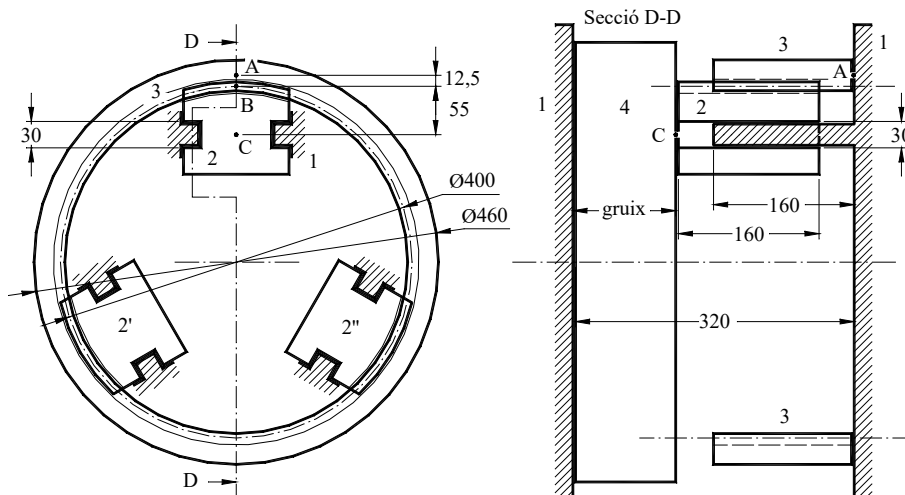
També s'observa que es produeix una reducció del parell i la potència transmesa a un valor que és aproximadament la meitat de quan la corretja es movia en sentit contrari.

La pressió màxima entre la corretja i una politja té lloc a la politja més petita (diàmetre més petit) i per a la tensió més elevada (ara F_2):

$$p_{\max} = \frac{F_2}{b \cdot (d_A / 2)} = \frac{53,21}{0,020 \cdot (0,050 / 2)} = 106420 \text{ Pa} = 0,106 \text{ MPa}$$

4.2.8 Fixació axial per rosca i tres mordasses

La figura mostra un mecanisme de fixació axial d'una peça (4) per mitjà de les mordasses (2), guiades per uns parells prismàtics sobre la base (1) i accionades per la femella (3). Els punts d'aplicació de les forces són: *a*) punt A, de suport axial entre la femella (3) i la base (1); *b*) punt B, a la rosca entre la mordassa (2) i la femella (3); *c*) punt C entre la mordassa (2) i la peça fixada (4).



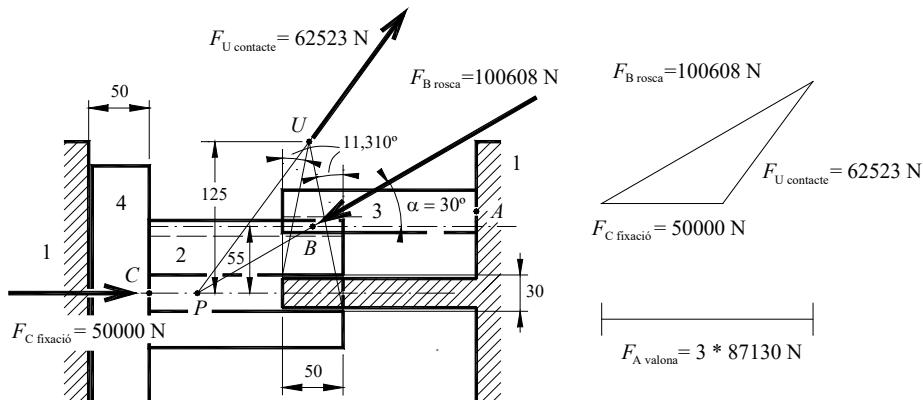


Altres paràmetres del sistema són: diàmetre de la rosca, $d_{ros} = 400$ mm; pas de la rosca d'un filet, $p = 10$ mm; angle del filet de la rosca, $\alpha = 30^\circ$; coeficient de fricció a la rosca (altura B): $\mu_{ros} = 0,15$; coeficient de fricció en el contacte axial entre la femella i la base (punt A): $\mu_{val} = 0,18$; coeficient de fricció entre les mordasses i la guia fixa a la base: $\mu_{guia} = 0,20$. La força de fixació de les tres mordasses sobre la peça (4) ha de ser de 150.000 N (50.000 N per a cada mordassa).

Es demana:

- a. *Determineu si es produeix autoretenció en l'enllaç prismàtic entre les mordasses i la guia fixa a la base, per a gruixos de la peça (4) d'entre 50 i 120 mm*

La situació més crítica és quan el sistema emmordassa una peça més prima (50 mm), ja que aleshores la part guiada de la mordassa (2) és més curta (concretament, 50 mm).



La figura anterior representa aquesta situació més crítica, amb el punt corresponent d'autoretenció U , que mostra clarament que no es produeix autoretenció, ja que la força motora que actua sobre la mordassa (força sobre la rosca, $F_{A rosca}$, té la línia d'acció que actua per sota d'aquest punt U ($\rho = \tan \mu_{guia} = 11,310^\circ$).

Per a les condicions més crítiques del punt anterior, es demana:

- b. *Relació entre la reacció axial de la peça (4) sobre la mordassa (2) i la força que fa la femella (3) sobre la mordassa (2) a través de la rosca*

Sobre la mordassa (2), hi actuen les forces següents, representades a la figura anterior:

1. La reacció de la força de fixació al punt C ($F_{C fixació} = 50000$ N, donada per l'enunciat).
2. La força normal de la femella (3) sobre la mordassa (2) a través dels filets de la rosca, $F_{B rosca}$. Té la inclinació del filet $\alpha = 30^\circ$ respecte a la direcció axial i se suposa que actua al centre de la zona de contacte de la rosca, B.
3. El conjunt de forces de contacte entre la mordassa (2) i la guia (1) (normals i tangencials de fricció), la suma de les quals, $F_{U contacte}$, passa pel punt d'autoretenció U i s'ha d'equilibrar amb les dues forces anteriors.

Atès que sobre una mordassa hi intervenen tan sols les tres forces esmentades, per assegurar-ne l'equilibri cal que les línies d'acció siguin concurrents. Això és així si la direcció de la resultant de les forces de contacte mordassa-guia, $F_{U\text{ contacte}}$, passa pel punt P d'intersecció de les altres dues forces, $F_{C\text{ fixació}}$ i $F_{B\text{ rosca}}$.

El plantejament de l'equilibri d'aquestes forces (per exemple, a través del polígon de forces) dona el resultat següent:

$$F_{B\text{ rosca}} = 100.608 \text{ N} \quad F_{U\text{ contacte}} = 62.523 \text{ N}$$

c. *Reacció de la base (1) sobre la femella (3) a l'altura de A*

Axialment, la femella rep les reaccions de les tres mordasses, 2, 2' i 2'', a través dels contactes de la rosca, i normals als filets, $F_{B\text{ rosca}}$.

Els components radials d'aquestes reaccions es compensen, ja que la femella és circular, mentre que els axials se sumen i s'equilibren amb la reacció de la base aplicada als tres punts A .

La força axial sobre la rosca és:

$$F_{B\text{ rosca-axial}} = F_{B\text{ rosca}} \cdot \cos \alpha = 100.608 \cdot \cos 30^\circ = 87.130 \text{ N}$$

$$F_{A\text{ valona}} = -3 \cdot F_{B\text{ rosca-axial}} = 3 \cdot 87.130 = 261.390 \text{ N}$$

La diferència entre la força $F_{A\text{ valona}}$ i la força F_C són els freds entre les mordasses i les seves guies.

d. *Parell que cal aplicar sobre la femella (3) per obtenir la força axial sobre la peça (4)*

El parell que cal aplicar sobre la femella per fer-la girar ha de vèncer tant les forces tangencials a la rosca sobre les tres mordasses (a l'altura del punt B) com el frec a la valona de suport axial (a l'altura del punt A).

El càlcul del parell sobre la rosca per obtenir-ne la força axial volguda en l'acció de fixació de la peça (4) es basa en la condició de transmissió directa en la rosca (és a dir, contra la força de fixació, $F_{C\text{ fixació}}$), i també ha de vèncer el frec amb la valona.

La relació entre la força tangencial i la força axial a la rosca (en l'acció directa) i els dos angles que la determinen són:

$$\gamma = \operatorname{atan} \left(\frac{z \cdot p}{\pi \cdot d_m} \right) = \operatorname{atan} \left(\frac{1 \cdot 10}{3,141592 \cdot 400} \right) = 0,456^\circ$$

$$\rho' = \operatorname{atan} \left(\frac{\mu_{ros}}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{atan} \left(\frac{0,15}{\cos 30} \right) = 9,826^\circ$$

$$F_{B\text{ rosca-tan gencial}} = F_{B\text{ rosca-axial}} \cdot \tan(\gamma + \rho') = 87.130 \cdot \tan(0,456 + 9,826) = 15.806 \text{ N}$$

El parell necessari sobre la rosca és, doncs:

$$M_{rosca} = 3 \cdot F_{B\text{ rosca-tan gencial}} \cdot \frac{d_{m,rosca}}{2} = 3 \cdot 15.806 \cdot \frac{0,400}{2} = 9.483,6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El parell necessari sobre la valona de la femella a causa del frec de la reacció axial (punt A, de 425 mm de diàmetre) és:

$$M_{valona} = F_{A\ valona} \cdot \mu_{val} \cdot \frac{d_{m\ valona}}{2} = 261.390 \cdot 0,18 \cdot \frac{0,425}{2} = 9.998,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

En definitiva, sobre la femella cal aplicar la suma dels dos parells anteriors:

$$M_{femella} = M_{rosca} + M_{valona} = 9.483,6 + 9.998,2 = 19.481,8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

e. Rendiment del sistema (relació entre la potència virtual en el contacte C i la potència corresponent sobre la femella)

El rendiment s'obté per potències virtuals. La relació de velocitats entre el gir de la femella i el desplaçament axial de les mordasses és:

$$v_{Amor} = v_{T\ fem} \cdot \tan\gamma = \left(\omega_{fem} \cdot \frac{d_{m\ fem}}{2} \right) \cdot \tan\gamma = \omega_{fem} \cdot 0,001592$$

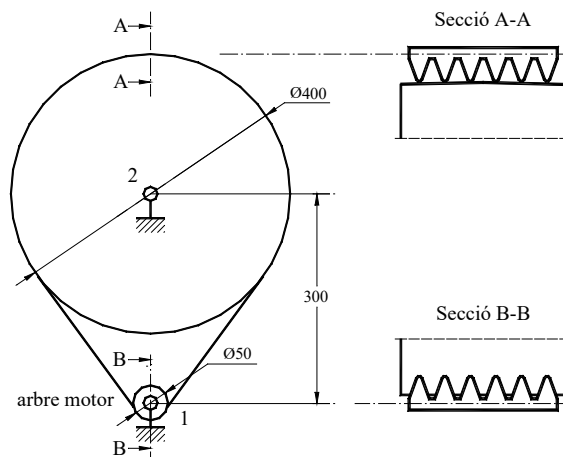
El rendiment és:

$$\eta = \frac{P_{mor}}{P_{fem}} = \frac{F_{mor}}{M_{fem}} \cdot \frac{v_{Amor}}{\omega_{fem}} = \frac{150.000}{19.481,8} \cdot 0,001592 = 0,0123 \quad \text{aprox } 1,2\%$$

4.2.9 Transmissió de corretja trapezoidal-plana

En les transmissions de corretja trapezoidal (o poli-V) amb una relació de transmissió elevada i una politja receptora de gran diàmetre, és freqüent fer les ranures a la politja motora petita (efecte de corretja trapezoidal), però no fer-les a la politja receptora gran (efecte de corretja plana) a fi de reduir-ne els costos.

La figura mostra una transmissió de corretja d'aquest tipus (trapezoidal-plana) amb les diferents dimensions. La força de tensió inicial de la corretja és $F_0 = 200 \text{ N}$ i la corretja té una massa lineal de $\lambda = 0,24 \text{ kg/m}$, i el límit d'adherència amb la politja és $\mu = 0,35$.



Es demana:

a. *Angles de contacte de la politja petita i de la politja gran*

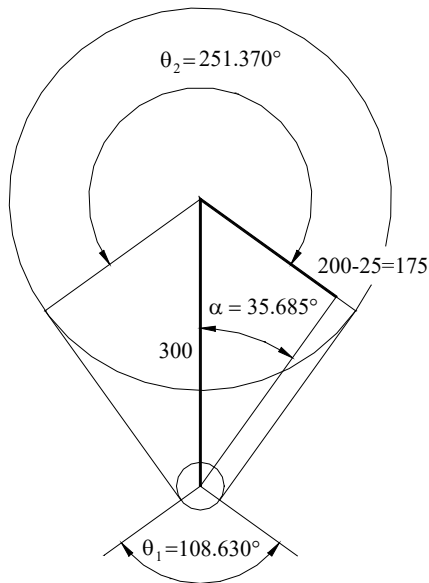
Els angles de contacte es poden calcular a partir de la geometria de la transmissió i, concretament, del triangle format per la distància entre els centres, la diferència de radis i un ramal tangent.

Es pot plantejar que:

$$\alpha = \text{asin}(175 / 300) = 35,685^\circ$$

A partir d'aquest valor, jugant amb els angles complementaris i suplementaris, s'arriba als valors següents dels angles de contacte:

$$\theta_1 = 108,630^\circ \quad \theta_2 = 251,370^\circ$$



b. *Relació de forces de tensió admissible entre els ramals de cada una de les dues politges. Quina és més crítica?*

La politja motora 1 té un angle de contacte molt més petit, però la corretja funciona com a trapezial, mentre que la politja receptora 2 té un angle de contacte molt més gran, però la corretja funciona com a plana. Les relacions màximes de forces de tensió en les dues politges quan no hi ha velocitat són:

$$\text{Politja 1} \quad \frac{F_2}{F_1} \leq e^{\frac{\mu}{\sin \alpha} \theta_1} = e^{\frac{0,35 \cdot 108,630 \cdot \pi}{\sin 20 \cdot 180}} = 6,960$$

$$\text{Politja 2} \quad \frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu \cdot \theta_1} = e^{0,35 \cdot \frac{251,370 \cdot \pi}{180}} = 4,644$$



Contràriament al que se sol donar, la politja receptora és la més crítica, ja que admet una relació de tensions més petita sense relliscar.

c. Influeix la tensió centrífuga en quina és la politja més crítica i que rellisca primer?

En cas d'haver-hi forces centrífugues, les relacions anteriors es mantenen per a les diferències entre les tensions de la corretja i la tensió centrífuga:

$$\frac{F_2 - F_c}{F_1 - F_c} \leq e^{\mu \cdot \theta}$$

Els productes de l'angle abraçat pel límit d'adherència no han variat; per tant, la politja més crítica continua essent la 2, ja que el valor d'aquest producte és més baix.

d. Si la velocitat de l'arbre motor és $n_0 = 2.800 \text{ min}^{-1}$ i se suposa que el rendiment és 1, la politja 2 pot rebre una potència de 2 kW sense relliscar?

La velocitat del motor és $\omega_0 = 2.800 \cdot \pi / 30 = 293,215 \text{ rad/s}$.

La tensió centrífuga és:

$$F_c = \lambda \cdot v^2 = 0,24 \cdot (293,215 \cdot 0,050 / 2)^2 = 13,896 \text{ N}$$

A partir de la potència, la velocitat angular i el diàmetre de la politja de l'arbre motor 1, i de la força de tensió en buit, F_0 , es poden saber la diferència de forces de tensió, ΔF , i els valors de les forces de tensió, F_1 i F_2 :

$$\Delta F = \frac{P}{\omega_0 \cdot (d_1 / 2)} = \frac{2.000}{293,215 \cdot (0,050 / 2)} = 272,84 \text{ N}$$

La relació de forces de tensió necessàries per poder transmetre aquesta potència són:

$$F_1 = F_0 - \frac{\Delta F}{2} = 200 - \frac{272,84}{2} = 63,58 \text{ N}$$

$$F_2 = F_0 + \frac{\Delta F}{2} = 200 + \frac{272,84}{2} = 336,42 \text{ N}$$

$$\frac{F_2 - F_c}{F_1 - F_c} = \frac{336,42 - 13,896}{63,58 - 13,896} = 6,240$$

Dels resultats que s'acaben d'obtenir, es dedueix que la politja receptora 2 relliscaria, mentre que la politja motora 1 es mantindria adherida a la corretja. Per tant, el sistema no pot transmetre la potència de 2 kW.

e. Si la força de tensió inicial ha disminuït un 20 % i la velocitat de l'arbre motor és de $n_0 = 1.400 \text{ min}^{-1}$, quina és la potència màxima que pot transmetre la corretja sense relliscar?

Finalment, es fa el problema del dret i s'obté un límit de potència a partir d'unes condicions donades:

La velocitat del motor és $\omega_0 = 1.400 \cdot \pi / 30 = 146,608 \text{ rad/s}$

La tensió centrífuga és menor:

$$F_c = \lambda \cdot v^2 = 0,24 \cdot (146,608 \cdot 0,050 / 2)^2 = 3,224 \text{ N}$$

Les forces de tensió es poden obtenir a partir de les equacions següents:

$$\frac{F_2 - F_c}{F_1 - F_c} = \frac{F_2 - 3,224}{F_1 - 3,224} = 4,644 \quad (\text{el menor dels dos valors})$$

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot F_0 = 2 \cdot 160 = 320$$

$$F_1 = 58,775 \text{ N} \quad F_2 = 261,225 \text{ N}$$

$$\Delta F = F_2 - F_1 = 261,225 - 58,775 = 202,450 \text{ N}$$

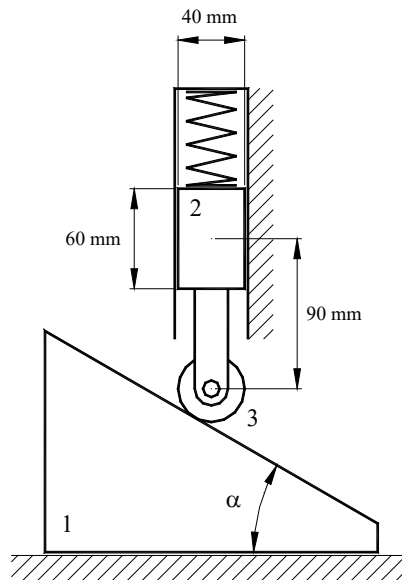
Finalment, la potència màxima que pot transmetre la corretja en aquestes noves condicions sense que rellisqui és:

$$P = \Delta F \cdot (d_1 / 2) \cdot \omega = 202,450 \cdot (0,050 / 2) \cdot 146,608 = 742,02 \text{ W}$$

4.2.10 Autoretenió en un seguidor de lleva

La figura mostra un mecanisme format per una lleva de translació (1) que empeny un seguidor de translació (2), guiat per un parell prismàtic amb la zona de contacte allunyada del corró de contacte (3). El límit d'adherència a la guia prismàtica entre el seguidor (2) i la base és de $\mu_0 = 0,25$, i no es consideren les forces passives entre la lleva (1) i el corró (3), ni en l'articulació del corró amb el seguidor (2).

El problema es pot resoldre tant per procediments numèrics com gràfics, sempre que els resultats tinguin una precisió suficient (per exemple, $\pm 2\%$). Es demana:



a. Determineu el punt d'autoretenió per al moviment del seguidor (2) en el sentit +y

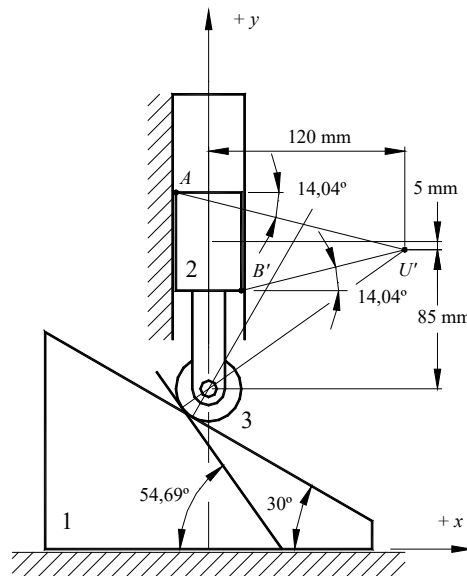
Les fórmules per obtenir les coordenades dels punts d'autoretenió respecte al centre de la corredora són (gràficament, es partiria de $\rho_0 = \text{atan}(\mu_0) = \text{atan}(0,25) = 14,04^\circ$):



$$c = \frac{\mu_0 \cdot b}{2} = \frac{0,25 \cdot 40}{2} = 5 \text{ mm} \quad d = \frac{a}{\mu_0 \cdot 2} = \frac{60}{0,25 \cdot 2} = 120 \text{ mm}$$

És a dir, que els punts d'autoretenció estan separats lateralment 120 mm de l'eix de simetria de les guies i desplaçats longitudinalment 5 mm de l'eix de simetria transversal de la corredora.

Atès que l'acció de la lleva tendeix a desplaçar el seguidor vers $+y$ i a fer-lo girar en el sentit contrari de les agulles del rellotge ($+z$), els punts de contacte entre el seguidor (2) i base serien A i B' i, per tant, el punt d'autoretenció corresponent al moviment del seguidor en el sentit $+y$ és U' , com s'indica a la figura.



- b. Determineu si hi ha autoretenció en la corredora 2 quan la lleva 1 es mou en el sentit $+x$, essent l'angle $\alpha = 30^\circ$

Atès que no es consideren les forces passives en el contacte entre la lleva (1) i el corró (3), ni entre el corró (3) i el seguidor (2), l'acció de la lleva sobre el corró té la direcció perpendicular al pla inclinat de la lleva (30°) i passa pel centre de l'articulació del corró (3) sobre el seguidor (2).

Com es pot comprovar a la figura anterior, aquesta línia passa entre el punt d'autoretenció U' i l'eix longitudinal de simetria de la guia. Per tant, no es produeix autoretenció.

- c. Determineu l'angle α límit de la lleva (1) a partir del qual es produeix l'autoretenció en el seguidor (2)

En aquesta situació límit, la reacció de la lleva (1) sobre el corró (3), perpendicular al pla inclinat de la lleva, passa pel punt d'autoretenció U' . D'aquesta condició, se'n calcula l'angle del pla inclinat, que és de $54,69^\circ$. Els plans inclinats de les lleves amb angles iguals o superiors a aquest valor donen lloc a autoretenció.

4.2.11 Disseny preliminar d'un embragatge multidisc

Durant el tempteig preliminar d'una nova màquina cal fer el primer dimensionament d'un embragatge multidisc que ha de transmetre un parell de 1.200 N·m. Inicialment, s'ha reservat l'espai per a discs de diàmetre exterior de $d_e = 120$ mm. El coeficient de fricció entre els materials dels discs és de $\mu = 0,35$ i la pressió màxima admissible de treball en el contacte és $p_{adm} = 0,20$ MPa. Es demana:

a. *Relació elegida entre els diàmetres exterior i interior dels discs*

En no haver-hi cap limitació específica, el més convenient és partir de la relació òptima de diàmetres:

$$\xi = \frac{d_e}{d_i} = \sqrt{3} = 1,732$$

b. *Nombre de cares actives de l'embragatge multidisc*

Atès que s'adopta un embragatge de discs múltiples (plans) per a la relació de diàmetres òptima, cal partir de l'expressió següent del parell:

$$M_{f(opt)} \leq z \cdot 0,1511 \cdot \mu \cdot p_{m\grave{a}x} \cdot d_e^3$$

Aïllant el nombre de cares actives, z , i aplicant-hi valors, s'obté:

$$z \geq \frac{M_{f(opt)}}{0,1511 \cdot \mu \cdot p_{m\grave{a}x} \cdot d_e^3} = \frac{1.200.000}{0,1511 \cdot 0,35 \cdot 0,20 \cdot 120^3} = 65,65$$

Caldria prendre, doncs, 66 cares actives, és a dir, 33 discs de dues cares actives cadascun.

c. *Diàmetre exterior que caldria adoptar per reduir un 40 % el nombre de cares actives de l'embragatge*

El nou diàmetre exterior s'obté de la mateixa fórmula anterior, però introduint-hi el nombre volgut de cares actives ($0,6 \cdot z$):

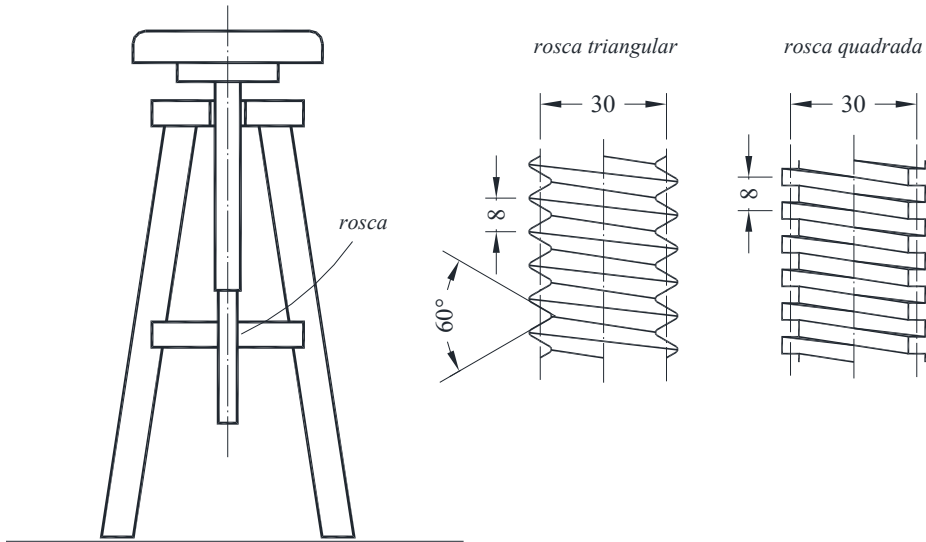
$$d_e \geq \sqrt[3]{\frac{M_{f(opt)}}{(0,6 \cdot z) \cdot 0,1511 \cdot \mu \cdot p_{m\grave{a}x}}} = \sqrt[3]{\frac{1.200.000}{(0,6 \cdot 66) \cdot 0,1511 \cdot 0,35 \cdot 0,20}} = 142,03 \text{ mm}$$

4.2.12 Tamboret d'altura regulable per rosca

La figura mostra un tamboret que pot regular l'altura fent girar el seient solidari a una barra roscada, en què la femella és solidària al trípod de suport.

La rosca, de pas $p = 8$ mm i diàmetre mitjà de $d_m = 30$ mm, és de secció triangular i el coeficient de fricció en el contacte (fusta amb fusta) és de $\mu = 0,3$.

Sobre el tamboret, hi ha asseguda una persona de 65 kg i la massa de la part mòbil del tamboret es considera negligible. Es demana:



a. Reversibilitat o irreversibilitat de la rosca. Justifiqueu-ho

Cal comparar l'angle de fricció aparent, ρ' , en el contacte de la rosca amb l'angle d'hèlice de la rosca, γ . Aquests valors són els següents:

$$\rho' = \operatorname{atan} \frac{\mu}{\cos \alpha} = \operatorname{atan} \frac{0,30}{\cos 30} = 19,106^\circ$$

$$\gamma = \operatorname{atan} \frac{z \cdot p}{\pi \cdot d_m} = \operatorname{atan} \frac{1 \cdot 8}{3,1416 \cdot 30} = 4,852^\circ$$

$\rho' > \gamma$ i, per tant, la rosca és irreversible.

b. Parell que cal exercir sobre la persona per fer-la girar en sentit ascendent i rendiment en el moviment d'ascens

El parell per fer girar la rosca (amb la persona) en sentit ascendent correspon al parell directe (problema 2.8, p. 65 de *Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*), que té l'expressió següent:

$$M_{dir} = \tan(\gamma + \rho') \cdot F_A \cdot \frac{d_m}{2} = \tan(4,852 + 19,106) \cdot (65 \cdot 9,81) \cdot \frac{0,030}{2} = 4,25 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El rendiment en el moviment d'ascens (rendiment directe) té l'expressió següent:

$$\eta = \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma + \rho')} = \frac{\tan 4,852}{\tan(4,852 + 19,106)} = 0,191 \text{ (19,1 \%)}$$

El parell sobre la rosca venç la força de la gravetat en l'ascens i el frec en la rosca.

c. Parell que cal exercir sobre la persona per fer-la girar en sentit descendent i rendiment en el moviment de descens

El parell per fer girar una rosca irreversible (amb la persona) en sentit descendent correspon al parell invers (problema 2.8, p. 65 de de *Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*) que té l'expressió següent:

$$M_{inv} = \tan(\gamma - \rho') \cdot F_A \cdot \frac{d_m}{2} = \tan(4,852 - 19,106) \cdot (65 \cdot 9,81) \cdot \frac{0,030}{2} = -2,43 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El parell de descens és més baix que en el cas anterior i té el sentit de descens.

El rendiment en el moviment de descens té l'expressió següent:

$$\eta = \frac{\tan \gamma}{\tan(\rho' - \gamma)} = \frac{\tan 4,852}{\tan(19,106 - 4,852)} = 0,334 \quad (33,4\%)$$

El rendiment és més gran que en l'ascens, perquè al parell sobre la rosca s'hi suma a la força de descens i, conjuntament, vencen el frec de la rosca.

d. *En cas que la rosca fos de secció quadrada, el nou parell que cal exercir sobre la persona per fer-la girar en sentit ascendent*

En aquest cas, l'angle del filet és nul ($\alpha = 0^\circ$) i, per tant, el nou angle de fricció és:

$$\rho' = \text{atan} \frac{\mu}{\cos \alpha} = \text{atan} \frac{0,30}{\cos 0} = 16,700^\circ$$

Aplicant aquest valor al parell directe, s'obté:

$$M_{dir(\alpha=0)} = \tan(\gamma + \rho') \cdot F_A \cdot \frac{d_m}{2} = \tan(4,852 + 16,7) \cdot (65 \cdot 9,81) \cdot \frac{0,030}{2} = 3,78 \text{ N}\cdot\text{m}$$

És un valor un 11 % inferior al de la rosca triangular.

4.2.13 Limitador de parell multidisc

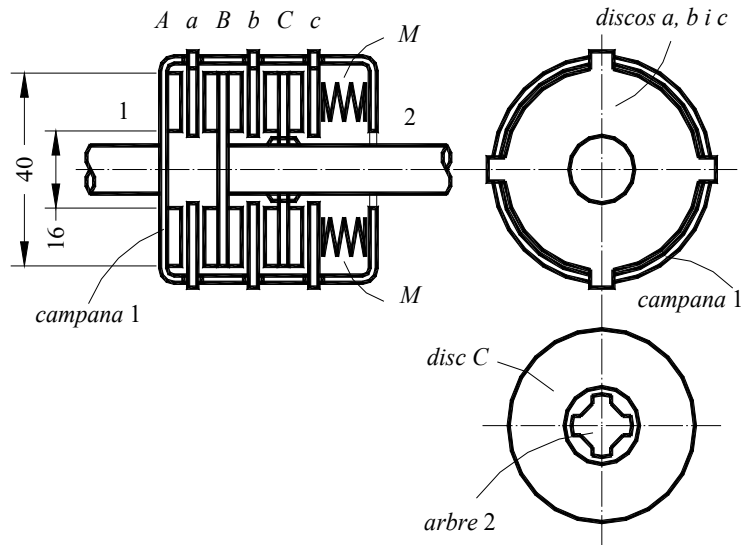
La figura següent representa un limitador de parell multidisc que actua per un conjunt de molles helicoidals M . Els discs a , b i c tenen unes pestanyes exteriors que enllacen amb unes ranures longitudinals de la campana unida a l'arbre 1; d'aquesta manera, giren sempre amb l'arbre 1, tot i que poden lliscar axialment. El disc B és solidari amb l'arbre 2, mentre que el disc C té unes ranures interiors que permeten un moviment axial respecte a l'arbre 2. Normalment, l'arbre 1 arrossega l'arbre 2 gràcies al frec en els discos; tanmateix, quan sobre l'arbre 2 actua una resistència excessiva, els discos del limitador del parell rellisquen.

El coeficient de fricció entre els materials dels discos és de $\mu = 0,30$ i la pressió màxima admissible de treball en el contacte és $p_{adm} = 0,150 \text{ MPa}$.

Es demana:

a. *Nombre de cares del limitador del parell que hi treballen*

- Cares que hi treballen (4) (amb moviment relatiu): contactes a - B ; B - b ; b - C ; C - c
- Cares que no hi treballen (sense moviment relatius): contacte A - a



b. Parell límit M_{flim} del dispositiu quan s'inicia el lliscament

Relació de diàmetres del limitador del parell:

$$\xi = \frac{d_e}{d_i} = \frac{40}{16} = 2,5$$

Atès que hi ha quatre cares de disc operatives, el parell límit que pot transmetre el dispositiu és:

$$\begin{aligned} M_{flim} &= z \cdot \frac{\pi \cdot (\xi^2 - 1)}{8 \cdot \xi^3} \cdot \mu \cdot p_{m\grave{a}x} \cdot d_e^3 = \\ &= 4 \cdot \frac{3,1416 \cdot (2,5^2 - 1)}{8 \cdot 2,5^3} \cdot 0,30 \cdot 0,15 \cdot 40^3 = 1520 \text{ N} \cdot \text{mm} = 1,52 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

c. Força axial F_A que han d'exercir el conjunt de molles

La força axial que han d'exercir el conjunt de molles ve donada per l'expressió següent:

$$F_A = \frac{4 \cdot \xi \cdot M_{flim}}{z \cdot (\xi + 1) \cdot \mu \cdot d_e} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 1.520}{4 \cdot (2,5 + 1) \cdot 0,30 \cdot 40} = 90,476 \text{ N}$$

d. Diàmetres dels discs si s'adopta la geometria òptima

El diàmetre exterior determina l'espai disponible. La geometria òptima correspon a un factor $\xi = 1,7321$. Aleshores, els diàmetres seran:

$$d_e = 40 \text{ mm} \quad d_i = \frac{d_e}{\xi} = \frac{40}{1,7321} = 23,093 \text{ mm}$$

e. Nou parell límit amb la geometria òptima, $M_{f_{opt}}$

Aplicant el factor $\xi = 1,7321$ a l'expressió del parell, s'obté:

$$M_{f_{lim}} = z \cdot \frac{\pi \cdot (\xi^2 - 1)}{8 \cdot \xi^3} \cdot \mu \cdot p_{max} \cdot d_e^3 =$$

$$= 4 \cdot \frac{3,1416 \cdot (1,7321^2 - 1)}{8 \cdot 1,7321^3} \cdot 0,30 \cdot 0,15 \cdot 40^3 = 1.741,2 \text{ N} \cdot \text{mm} = 1,74 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Per a la pressió admissible del material de l'enunciat, la millora percentual del parell de la geometria òptima respecte al parell de la geometria proposada per l'enunciat del problema és:

$$\Delta M = 100 \cdot \frac{M_{f_{opt}} - M_{f_{lim}}}{M_{f_{lim}}} = 100 \cdot \frac{1.741,2 - 1.520,0}{1.520,0} = 14,55 \%$$

I aquest parell proporcionat per la geometria òptima s'obté amb una nova força axial de:

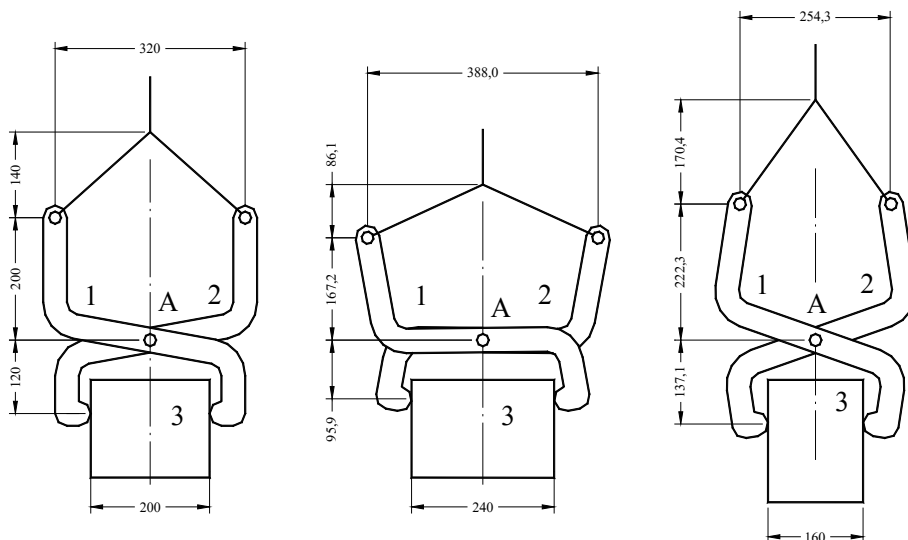
$$F_A = \frac{4 \cdot \xi \cdot M_{f_{opt}}}{z \cdot (\xi + 1) \cdot \mu \cdot d_e} = \frac{4 \cdot 1,7321 \cdot 1.741,2}{4 \cdot (1,7321 + 1) \cdot 0,30 \cdot 40} = 91,99 \text{ N}$$

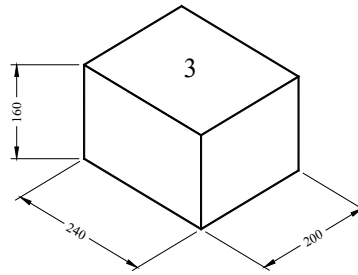
4.2.14 Pinça d'autosubjecció

La figura mostra un dispositiu de pinça d'autosubjecció per a caixes. És a dir, a través de les forces de contacte entre les pinces i les caixes, el mateix pes de la càrrega tendeix a tancar les pinces amb una força suficient per assegurar la seva subjecció.

La simetria del sistema permet assegurar que l'acció i la reacció entre les dues parts de la pinça al punt A tenen direccions horitzontals.

Se suggereix utilitzar les figures per tal d'obtenir-ne solucions gràfiques.

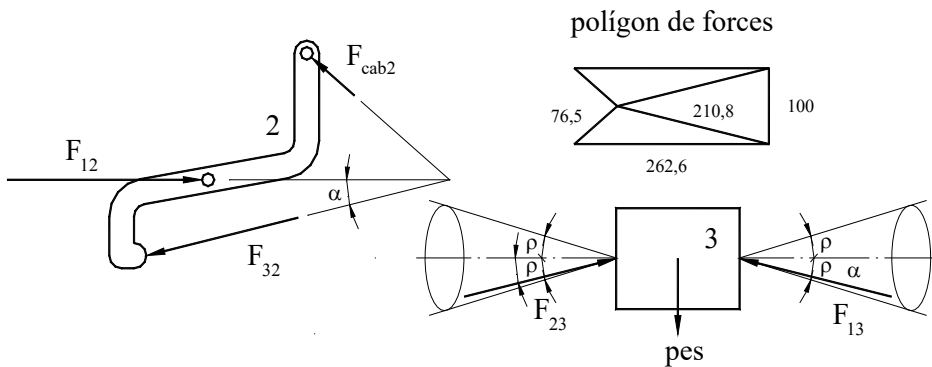




Es demana:

- a. Establiu el diagrama de cos lliure, és a dir, l'equilibri de forces de cadascun dels membres del mecanisme: les dues parts de la pinça (1 i 2) i la caixa (3)

La figura presenta l'equilibri de forces sobre els membres 1 i 2 (el 3 és simètric de l'1). També presenta el polígon de forces amb els valors relatius prenent com a 100 el valor del pes.



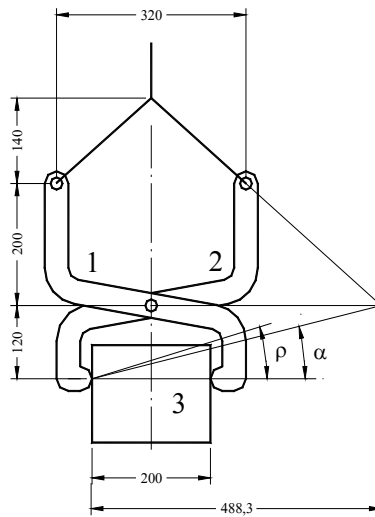
- b. Establiu la condició general per tal d'assegurar la subjecció de la caixa 3

La condició general per assegurar la subjecció de la caixa 3 és que la direcció de les forces F_{13} i F_{23} passi per dintre dels cons d'adherència en els punts de contacte entre les pinces i la caixa.

La direcció d'aquestes forces respecte a les normals de contacte ve donada per l'angle α (determinat pel diagrama de cos lliure de l'apartat anterior), mentre que el semiangle del con d'adherència és $\rho = \text{atan } \mu$.

Aquesta condició s'expressa per $\alpha < \rho$.

La massa de les caixes és $m_3 = 10 \text{ kg}$ i el límit d'adherència dels contactes de les caixes amb les pinces és $\mu_0 = 0,30$.

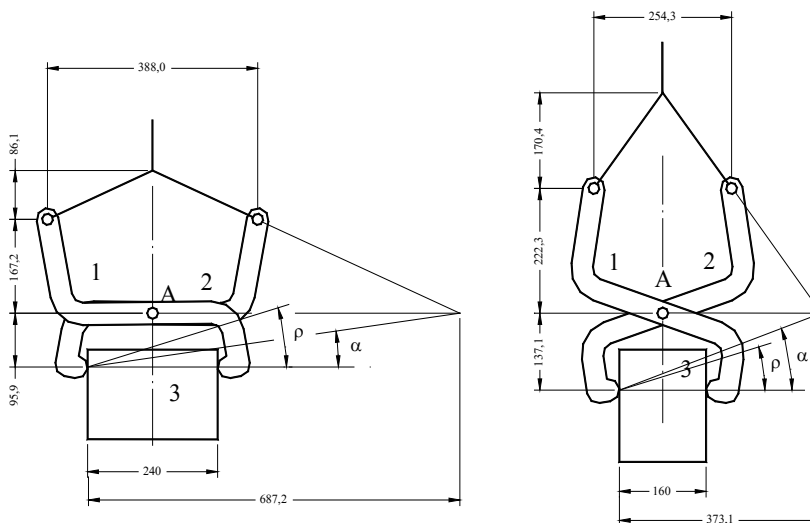


c. Hi ha autosubjecció quan s'abraça la caixa 3 per la cara de 200 mm? I, si la massa de la caixa és $m_3 = 20 \text{ kg}$?

La figura d'aquest apartat mostra la geometria que adopta en la configuració descrita (cara de 200 mm). L'angle ρ dibuixat correspon a $\rho = \text{atan } 0,30 = 16,7^\circ$, i l'angle α és el que resulta de l'equilibri de forces sobre una de les dues pinces.

Com s'observa, $\alpha < \rho$. Per tant, es compleix la condició d'autosubjecció. La força de subjecció, en ser proporcional al pes, fa la seva funció tant per a la massa de $m_3 = 10 \text{ kg}$ com per a la massa $m_3 = 20 \text{ kg}$.

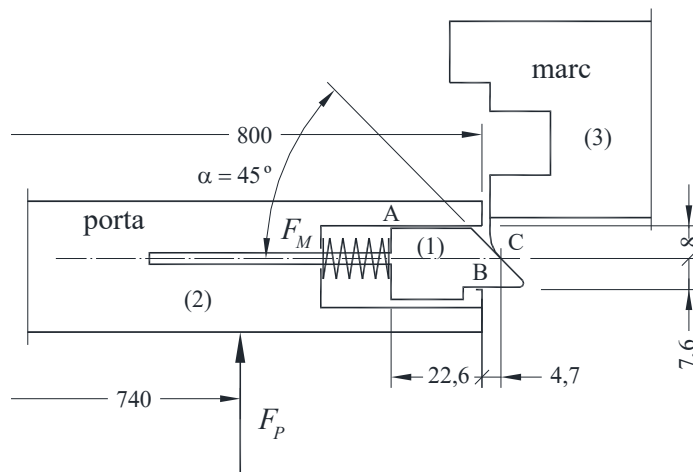
d. Hi continua havent autosubjecció quan la caixa 3 se subjecta per les altres dues cares (240 mm o 160 mm)?



Dibuixant la geometria derivada del diagrama de cos lliure a les dues altres amplades de la caixa, i després d'aplicar-hi el criteri d'autosubjecció, es comprova que, per a una amplada de 240 mm, es continua complint la condició d'autosubjecció ($\alpha < \rho$), mentre que, per a l'amplada de 160 mm, no es compleix ($\alpha > \rho$) i la caixa relliscaria.

4.2.15 Pany de "tanca de cop"

La figura mostra l'esquema d'un pany de "tanca de cop" que, simplement empenyent, permet tancar i retenir una porta, però que obliga a actuar sobre una maneta per tal d'obrir-la.



L'element fonamental és el pestell (1) que, per un costat, va guiat (punts A i B) a la part del pany fixada a la porta (2) i, per l'altre costat, a través d'un pla inclinat de $\alpha = 45^\circ$ (en la realitat, sol ser una corba), llisca sobre una platina metàl·lica (punt de contacte C) fixa al marc de la porta (3). Els coeficients de fricció del pestell amb la guia i amb la platina metàl·lica són de $\mu = 0,18$.

Es demana, per a la posició de la figura:

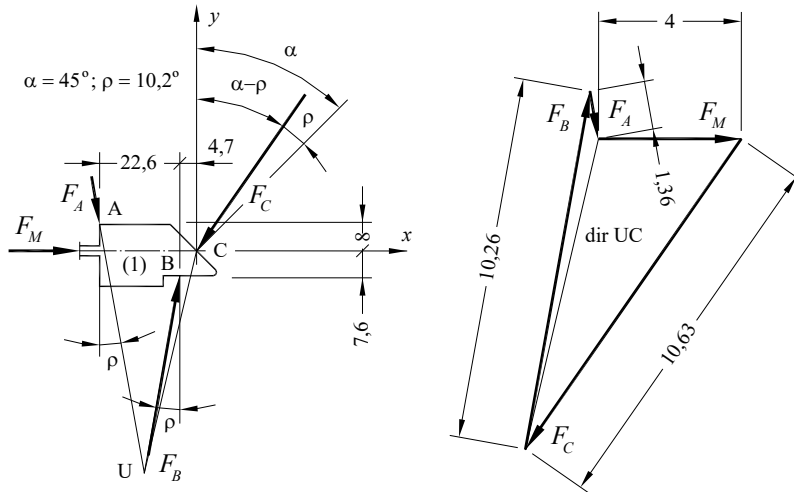
- a. Equilibri de les forces que actuen sobre el pestell (1), essent $F_M = 4 \text{ N}$

El pestell està sotmès a quatre forces:

- Contacte amb la platina fixa al punt C; la força F_C forma un angle $\alpha - \rho$ amb la direcció del moviment relatiu. $\rho = \text{atan } \mu = \text{atan } 0,18 = 10,2^\circ$.
- Dos contactes de la porta amb la guia fixa, punts A i B; Les dues forces de fricció són tals que la seva resultant sempre passa pel punt d'autoretenició U.
- Força de la molla, de valor conegut per a la posició de la figura de l'enunciat ($F_M = 4 \text{ N}$).

La resultant de la força de contacte, F_C , i de la força de la molla, F_M , passa pel punt C , ja que les línies d'acció respectives es tallen en aquest punt, i la resultant de les forces de contacte pestell-guies, F_A i F_B , passen pel punt d'autoretenció U .

La figura següent mostra les forces aplicades sobre el pastell, així com el polígon de forces que en permet avaluar els valors relatius (les distàncies s'expressen en mm i les forces, en N).



El plantejament clàssic de les equacions de l'equilibri és el següent:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= F_M + (F_A + F_B) \cdot \sin \rho - F_C \cdot \sin(\alpha - \rho) \\ \sum F_y = 0 &= (-F_A + F_B) \cdot \cos \rho - F_C \cdot \cos(\alpha - \rho) \\ \sum M_C = 0 &= (-F_A \cdot (22,6 + 4,7) + F_B \cdot 4,7) \cdot \cos \rho + (F_A \cdot 8 - F_B \cdot 7,6) \cdot \sin \rho \end{aligned}$$

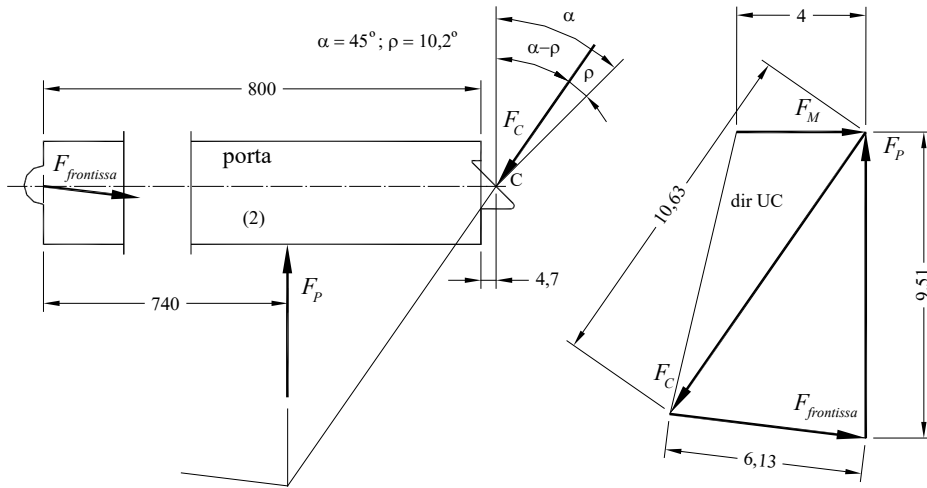
del qual s'obtenen els mateixos valors que gràficament.

- b. *Determineu la força de tancament sobre el pom de la porta F_P necessària per vèncer la força de la molla F_M (per simplificar, es considera que la frontissa està situada a 800 mm del cantell de la porta i en el pla assenyalat per la línia de ratlla-punt-ratlla)*

Per respondre aquesta qüestió, el més convenient és plantejar l'equilibri del conjunt porta-pestell (simplificat en una secció bidimensional), en què apareguin la força de tancament, F_P , la força de contacte en el pestell, F_C , i la reacció radial sobre la frontissa de la porta, $F_{frontissa}$.

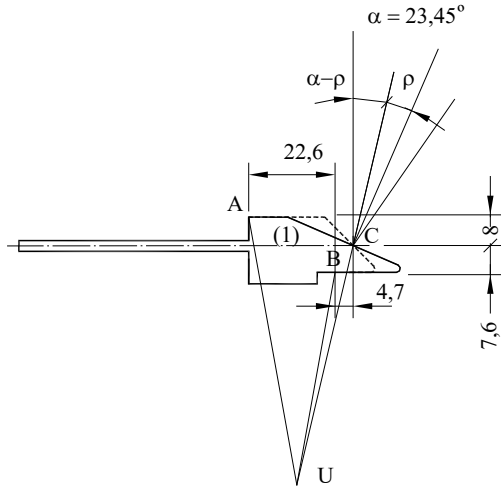
També cal usar la relació obtinguda al punt anterior entre la força de contacte al punt C i la força de la molla F_M .

Contestant la pregunta, la força de tancament necessària per vèncer una força de la molla de $F_M = 4$ N és de $F_P = 9,51$ N. La nova figura mostra la geometria d'aquest equilibri i el polígon corresponent de forces.



c. Valor límit de l'angle α sense que es produeixi autoretenció en el sistema

La condició perquè no es produeixi autoretenció és que la força motora (en aquest cas, la força de contacte F_C que fa moure el pestell) passi per la zona compresa entre els punts d'autoretenció (en aquest cas, el punt U) i l'eix de la guia.



La situació límit en aquesta geometria es donaria quan la força de contacte F_C passés pel punt d'autoretenció U . Plantejada geomètricament aquesta situació, es demostra que correspon a un angle $\alpha = 23,45^\circ$; per a aquest mateix angle i per a angles més petits, es produeix autoretenció.

També es demanen les tendències següents:

d. La força de tancament F_P creix o disminueix amb l'angle α ?

En anar disminuint l'angle, ens acostem més al punt d'autoretenció; per tant, la força de tancament F_P va creixent fins a fer-se (teòricament) infinita.

Amb la disminució de l'angle, la força de tancament F_P va fent-se cada cop més petita (el pany esdevé més suau), però la longitud del pestell capaç de retenir la porta és també cada cop més petita, per la qual cosa el valor màxim de l'angle també té un límit.

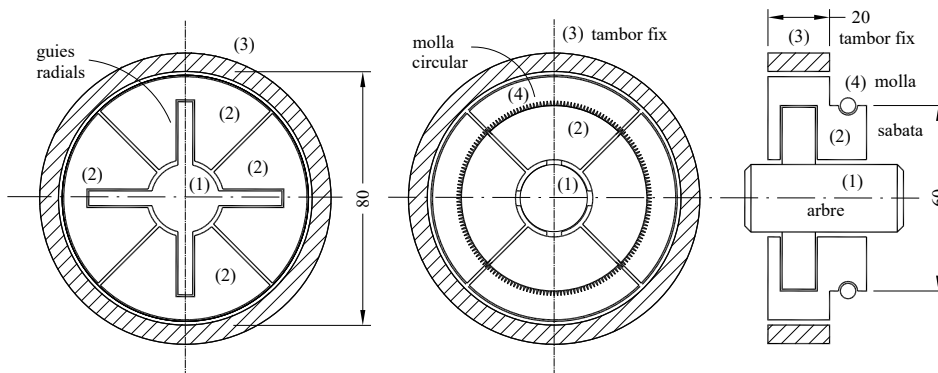
e. La condició d'autoretenció empitjora o millora a mesura que la porta es va tancant?

A mesura que el pestell entra en el cos del pany, el punt d'autoretenció U s'allunya del seu eix. Per tant, el moment més crític, des del punt de vista de l'autoretenció (en cas de ser-ho), es produeix en el primer contacte entre el pestell i la platina fixa al marc.

La solució constructiva particular del pany que manté el punt de lliscament B entre el pestell i la guia en posició immòbil respecte a la porta fa que la direcció entre els punts UC variï molt poc en funció del moviment del pestell. D'aquesta manera, doncs, l'assegurament de la condició d'autoretenció queda determinada fonamentalment per l'angle α .

4.2.16 Fre centrífug

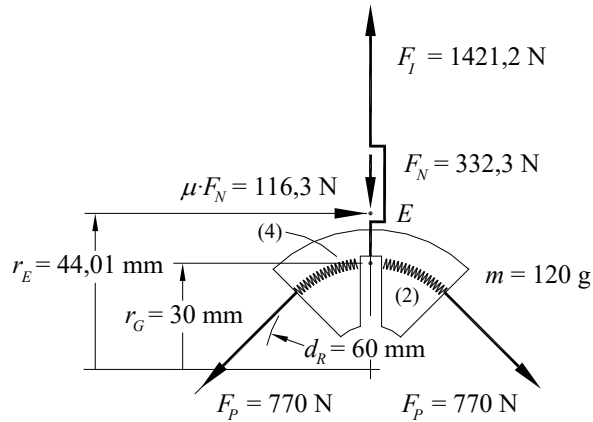
La figura mostra un fre centrífug amb quatre sabates giratòries (2) d'amplada $b = 20$ mm, que es mouen dins un tambor (3) de diàmetre $d_T = 80$ mm. Les sabates van guiades radialment respecte a l'arbre del fre (1) i són desplaçades enfora cap al tambor per les forces d'inèrcia centrífugues de D'Alembert (no es considera el frec entre les sabates i les guies, ni el valor del desplaçament de les sabates).



Una molla helicoidal circular (4), de rigidesa $K = 20$ N/mm i longitud inicial $L_0 = 150$ mm, disposada sobre una ranura circular perimetral de diàmetre, $d_R = 60$ mm, manté les sabates en la seva posició replegada. Les sabates tenen una massa $m = 120$ g cadascuna i el seu centre de masses se situa a una distància de $r_G = 30$ mm de l'eix de rotació. El coeficient de fricció entre les sabates i el tambor és de $\mu = 0,35$. Es demana:

a. Velocitat mínima a la qual comença a funcionar el fre centrífug

La tensió de la molla circular, F_P , és funció del seu allargament a la ranura (longitud de la ranura, $L = \pi \cdot d_R = \pi \cdot 60 = 188,5$ mm). L'allargament i la força de la molla quan se situa a la ranura són:



$$\Delta L = L - L_0 = 188,5 - 150 = 38,5 \text{ mm}$$

$$F_p = K \cdot \Delta L = 20 \cdot 38,5 = 770 \text{ N}$$

La força d'inèrcia centrífuga de D'Alembert de cada sabata, és:

$$F_I = m \cdot r_G \cdot \omega^2$$

Quan la velocitat angular de l'eix (1) és baixa, les tensions dels dos ramals de la molla circular sobre (F_p a 45°) retenen la força d'inèrcia de cada sabata. Però, a mesura que la velocitat s'eleva, les forces d'inèrcia creixen fins a superar les tensions dels ramals de la molla, les sabates es desplacen (per al seu càlcul, aquests desplaçaments es consideren zero), entren en contacte amb el tambor i, gràcies a la fricció, creen el parell de frenada.

Així, doncs, el fre centrífug comença a operar en el moment que la força d'inèrcia centrífuga de les sabates venç les forces dels corresponents dos ramals de la molla:

$$F_I = 2 \cdot F_p \cdot \cos 45^\circ = 1.088,9 \text{ N}$$

Operant amb les equacions anteriors, s'arriba a:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \cdot F_p}{m \cdot r_G}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \cdot 770}{(0,120 \cdot 0,030)^2}} = 549,98 \text{ rad/s} = 5.252 \text{ min}^{-1}$$

b. Parell de frenada a la velocitat de 6.000 min^{-1} ($628,32 \text{ rad/s}$)

Tractant-se d'una sabata simètrica, el radi d'empenta de la sabata és:

$$r_E = \frac{d_T}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sin(\alpha/2)}{\alpha + \sin \alpha} = \frac{80}{2} \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{(3,1416/2) + 1} = 44,01 \text{ mm}$$

La força d'inèrcia d'una sabata a aquesta velocitat, F_I , i la força normal útil per a la de frenada a cada sabata, F_N , són:

$$F_I = m \cdot r_G \cdot \omega^2 = 0,120 \cdot 0,030 \cdot 628,32^2 = 1.421,2 \text{ N}$$

$$F_N = F_I - 2^{1/2} \cdot F_P = 1.421,2 - 1.088,4 = 332,4 \text{ N}$$

El parell de frenada del fre centrífug ($z = 4$ sabates) és:

$$M_f = z \cdot \mu \cdot F_N \cdot r_E = 4 \cdot 0,35 \cdot 332,3 \cdot 44,01 = 20.470 \text{ N} \cdot \text{mm} = 20,48 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c. Si la molla circular es relaxa (per exemple, passa a exercir la meitat de la força), quin és el nou parell de frenada a la mateixa velocitat de 1.200 min^{-1} ?

En aquest cas, la força d'inèrcia és la mateixa que en el cas anterior, però la força perimetral de la molla és la meitat: $F_P = 385 \text{ N}$

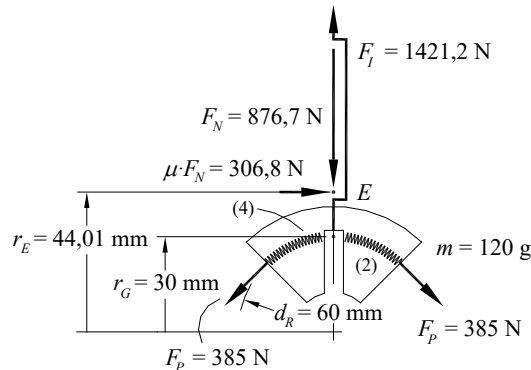
La força realment útil de frenada és:

$$F_N = 1.421,2 - 2^{1/2} \cdot 385 = 876,7 \text{ N}$$

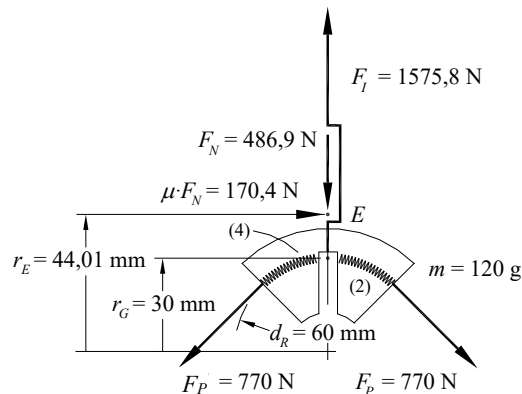
El nou parell de frenada total és:

$$M_f = z \cdot \mu \cdot F_N \cdot r_E = 4 \cdot 0,35 \cdot 876,7 \cdot 44,01 = 54.017 \text{ N} \cdot \text{mm} = 54,02 \text{ N} \cdot \text{m}$$

És un gran augment de la capacitat de frenada.



d. Amb la molla inicial, si sobre l'arbre del fre s'aplica un parell de $30 \text{ N} \cdot \text{m}$, sense cap més resistència que l'acceleració del propi sistema, quina és la velocitat d'equilibri del fre?



Invertint l'equació anterior, es pot calcular la força normal d'equilibri:

$$F_N = \frac{M_f}{z \cdot \mu \cdot r_E} = \frac{30}{4 \cdot 0,35 \cdot (44,01 / 1.000)} = 486,9 \text{ N}$$

Aquesta força normal correspon a la força d'inèrcia següent:

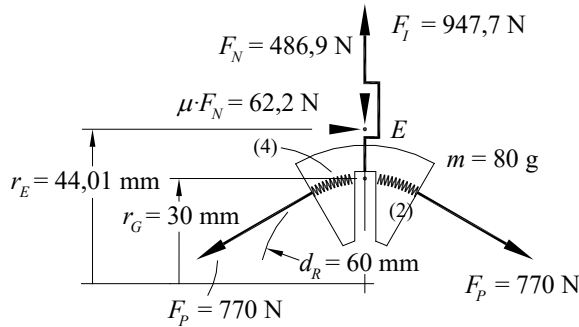
$$F_I = F_N + 2 \cdot F_P \cdot \cos 45^\circ = (486,9 + 2 \cdot 770 \cdot \cos 45^\circ) = 1.575,7 \text{ N}$$

I la força d'inèrcia correspon a la velocitat angular següent:

$$\omega = \sqrt{\frac{F_I}{m \cdot r_G}} = \sqrt{\frac{1.575,8}{0,120 \cdot 0,030}} = 661,6 \text{ rad/s} = 6.318 \text{ min}^{-1}$$

e. Si, en lloc de construir el fre amb 4 sabates, es construeix amb 6 sabates, millora o empitjora la capacitat de frenada? I en quin grau?

Es fan els càlculs de l'apartat 2 (parell de frenada a 6.000 min⁻¹)



Es considera que la massa de la sabata és proporcional a l'angle abraçat: la massa de les noves sabates serà de:

$$m = (4/6) \cdot 0,120 = 0,080 \text{ g}$$

També el centre de gravetat de la sabata creix lleugerament: $r_G = 32 \text{ mm}$

La força d'inèrcia a aquesta velocitat és:

$$F_I = m \cdot r_G \cdot \omega^2 = 0,080 \cdot 0,032 \cdot 628,32^2 = 1.010,6 \text{ N}$$

Atès que els nous angles de les forces de la molla són 60° (i no 45°), la força realment útil de frenada és:

$$F_N = 1.010,6 - 2 \cdot 770 \cdot \cos 60^\circ = 240,7 \text{ N}$$

Es tracta d'una sabata simètrica. Per tant, el radi d'empenta de la nova sabata és:

$$r_E = \frac{d_T \cdot 4 \sin(\alpha/2)}{2 \cdot \alpha + \sin \alpha} = \frac{80 \cdot 4 \sin(\pi/6)}{2 \cdot (\pi/3) + \sin(\pi/3)} = 41,81 \text{ mm}$$

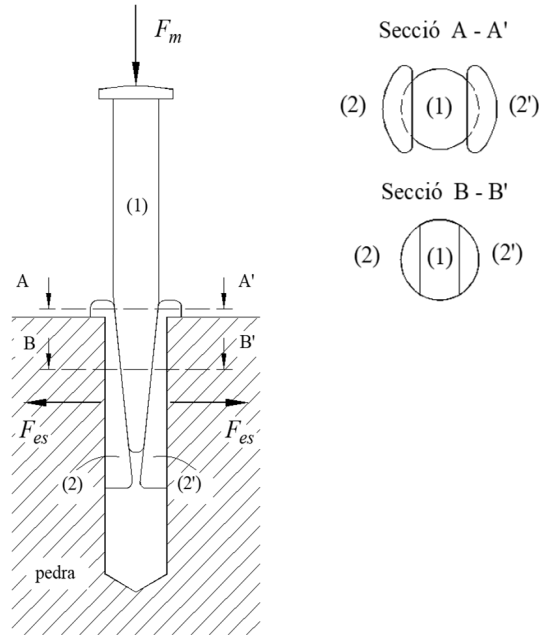
El parell de frenada total és:

$$M_f = z \cdot \mu \cdot F_N \cdot r_E = 6 \cdot 0,35 \cdot 240,7 \cdot 41,81 = 21.139 \text{ N} \cdot \text{mm} = 21,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La capacitat de frenada és pràcticament la mateixa.

4.2.17 Tascó per esberlar pedres

La figura mostra un tascó que es fa servir per esberlar pedres, format per tres peces: el tascó pròpiament dit (1) i dues peces simètriques (2-2') que actuen de contratascó.



S'opera de la manera següent: a) Es fa un forat rodó a la pedra. b) S'introdueixen els dos contratascons (2-2') al forat, fins que les valones fan contacte amb la pedra. c) S'insereix el tascó (1) entre els dos plans inclinats que formen els dos contratascons. d) Es pica el tascó amb un martell i la força és amplificada pels plans inclinats en una gran força d'esberlament.

Es demana:

a. *Equilibri de forces sobre el tascó (1) i sobre cadascun dels contratascons (2-2')*

La forces d'acció-reacció entre el tascó (1) i els contratascons (2-2') tenen una inclinació $\rho = \text{atan}(\mu) = \text{atan}(0,30) = 16,699^\circ$ respecte a la normal de contacte. Alhora, la normal de contacte forma un angle de $\alpha/2 = 6^\circ$ respecte a la normal a l'eix de simetria del tascó. En total, la direcció de les forces d'acció-reacció entre el tascó i els contratascons formen un angle de $\alpha/2 + \rho = 22,699^\circ$ respecte a la normal de l'eix de simetria del tascó (vegeu la figura adjunta).

Pel que fa al contacte entre el tascó i la pedra, es pot considerar que els components normal i tangencial a la superfície corresponen a la força d'esberlament F_{es} i a la reacció



sobre la valona F_{01} , respectivament, tot i que el component axial es pot repartir entre el frec sobre les parets laterals del contratascó i la reacció sobre la valona (aquest repartiment no influeix en el resultat final).

- b. Expressió algebraica de la força d'esberlament F_{es} , en funció de la força del martell F_m de l'angle del tascó α i del coeficient de fricció μ entre el tascó (1) i els contratascons (2-2')

A partir dels polígons de força de la figura anterior, es poden establir les relacions següents:

$$F_{es} = \frac{F_m}{2 \cdot \tan(\alpha / 2 + \rho)}$$

- c. Calculeu el valor de la força d'esberlament F_{es} quan la força del martell és $F_m = 2.000 \text{ N}$, en els casos següents: a) l'angle del tascó és $\alpha = 12^\circ$ i el coeficient de fricció és $\mu = 0,3$. En quina proporció la força d'esberlament millora quan: b) l'angle del tascó disminueix a $\alpha = 8^\circ$; c) el coeficient de fricció es redueix a $\mu = 0,2$, i d) l'angle del tascó es redueix a $\alpha = 8^\circ$ i el coeficient de fricció es redueix a $\mu = 0,2$

La figura (més endavant) mostra gràficament el cas de c.

Anàlisi dels casos de l'enunciat:

- a. Cas base: partint de l'equació del punt anterior, per a $\alpha = 12^\circ$ i el coeficient de fricció $\mu = 0,3$ ($\rho = \text{atan}(0,30) = 16,699^\circ$), s'obté:

$$F_{es} = \frac{F_m}{2 \cdot \tan(12 / 2 + 16,6992)} = 1,1953 \cdot F_m = 2.390,67 \text{ N}$$

- b. Si l'angle del tascó disminueix a $\alpha = 8^\circ$ i el coeficient de fricció es manté a $\mu = 0,3$, el valor de la relació millora un 10,7 %:

$$F_{es} = \frac{F_m}{2 \cdot \tan(8 / 2 + 16,6992)} = 1,3233 \cdot F_m = 2.646,53 \text{ N}$$

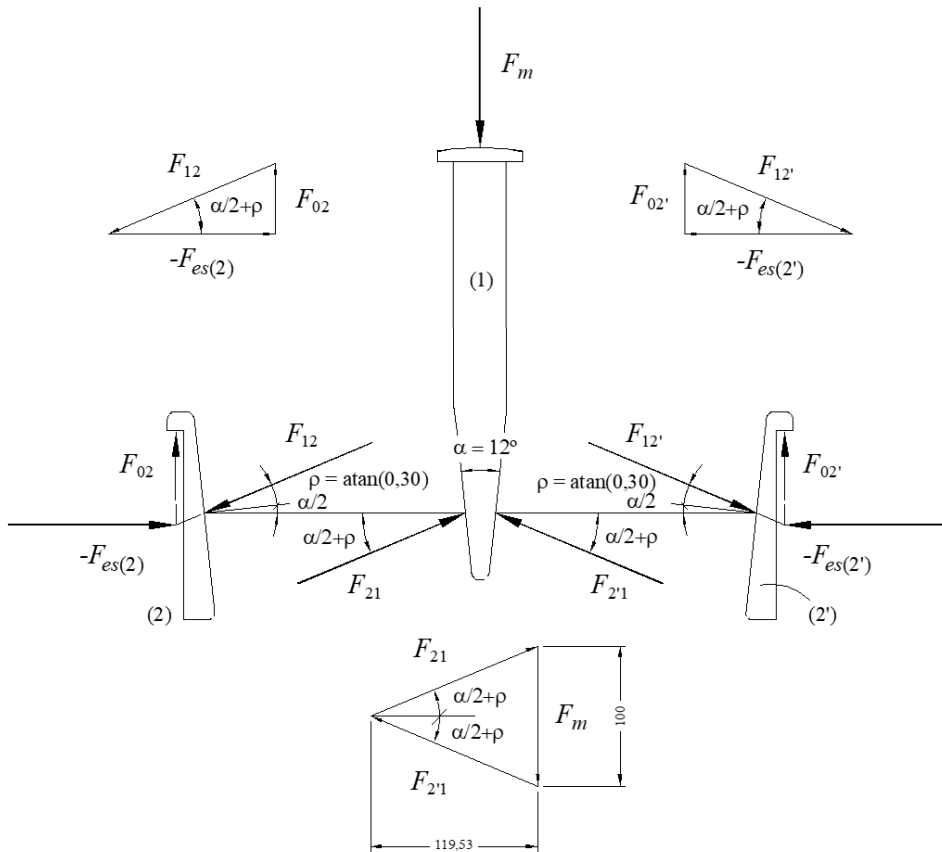
- c. Si el coeficient de fricció es redueix a $\mu = 0,2$ ($\rho = \text{atan}(0,20) = 11,310^\circ$) i l'angle del tascó es manté a $\alpha = 12^\circ$, el valor de la relació millora un 34,2 %:

$$F_{es} = \frac{F_m}{2 \cdot \tan(12 / 2 + 11,3099)} = 1,6043 \cdot F_m = 3.208,67 \text{ N}$$

- d. Finalment, si l'angle del tascó disminueix a $\alpha = 8^\circ$ i el coeficient de fricció baixa a $\mu = 0,2$ ($\rho = \text{atan}(0,20) = 11,310^\circ$), el valor de la relació millora un 52,8 %:

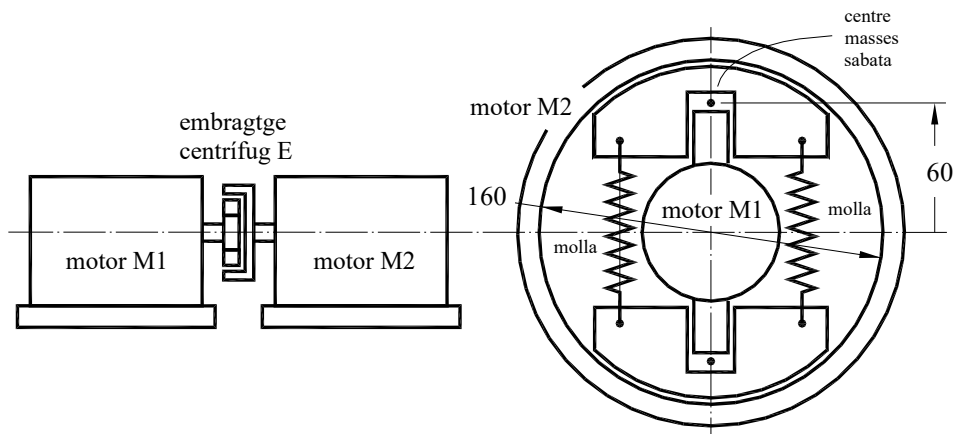
$$F_{es} = \frac{F_m}{2 \cdot \tan(8 / 2 + 11,3099)} = 1,8264 \cdot F_m = 3.652,8 \text{ N}$$

Resumint, tant la disminució de l'angle del tascó com la del coeficient de fricció tenen efectes positius en l'augment de la força d'esberlament. A més, la disminució del coeficient de fricció té un efecte més intens.



4.2.18 Dues màquines elèctriques enllaçades per un embragatge centrífug

Es vol estudiar el comportament de dues màquines elèctriques quan s'enllacen a través d'un embragatge centrífug, segons l'esquema de la figura.





El diàmetre del tambor és $d_T = 80$ mm. Les sabates abracen un angle $\alpha = 90^\circ$, tenen una massa de $m = 40$ g i el seu centre de masses es troba a una distància del centre del tambor de $r_G = 30$ mm. El coeficient de fricció entre les sabates i el tambor és $\mu = 0,35$. Les molles que actuen sobre les sabates i les separen del tambor exerceixen una força conjunta de $F_M = 20$ N.

Es demana:

- a. *Força radial de contacte que exerceix cada sabata sobre el tambor quan el motor M_1 gira a $n_{M1} = 1400 \text{ min}^{-1}$*

La força d'inèrcia d'una sabata és ($\omega = 146,61 \text{ rad/s}$).

$$F_I = m \cdot r_G \cdot \omega^2 = 0,040 \cdot 0,030 \cdot 146,61^2 = 25,79 \text{ N}$$

La força radial (normal) de contacte de cada sabata sobre el tambor resulta de:

$$F_N = F_I - F_M = 25,79 - 20,00 = 5,79 \text{ N}$$

- b. *Parell que transmet l'embragatge centrífug a $n_{M1} = 1.400 \text{ min}^{-1}$*

És una sabata simètrica d'angle $\alpha = 90^\circ = 1,5708 \text{ rad}$; per tant, el radi d'empenta és:

$$r_E = \frac{d_T \cdot 4 \cdot \sin(\alpha/2)}{2 \cdot \alpha + \sin \alpha} = \frac{80 \cdot 4 \cdot \sin 45}{2 \cdot 1,5798 + \sin 90} = 44,01 \text{ mm}$$

El parell que transmet l'embragatge centrífug a aquesta velocitat és:

$$M_f = z \cdot \mu \cdot F_C \cdot r_E = 2 \cdot 0,35 \cdot 5,79 \cdot 0,04401 = 0,178 \text{ N} \cdot \text{m} = 0,178 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

- c. *Quan del motor M_2 gira a $n_{M2} = 900 \text{ min}^{-1}$, actua com a motor o com a fre? En aquest cas, el parell és transmès per l'embragatge? I quan gira a $n_{M2} = 2.000 \text{ min}^{-1}$, actua com a motor o com a fre?*

Si el motor M_2 gira a 900 min^{-1} , el motor M_1 tendeix a superar-lo en velocitat (1.400 min^{-1}); per tant, el motor M_2 actua com a fre.

El parell transmès per l'embragatge és el que proporciona la força centrífuga de les sabates a 1.400 min^{-1} . El parell de M_1 que exerceix sobre M_2 a través de l'embragatge és $M_{fM1} = +0,178 \text{ N} \cdot \text{m}$ i el parell de M_2 és la reacció $M_{fM2} = -0,178 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Si el motor M_2 gira a 2.000 min^{-1} , el motor M_1 (1.400 min^{-1}) tendeix a ser accelerat a través de l'embragatge pel motor M_2 , que en aquest cas actua com a motor.

El parell transmès per l'embragatge és el que proporciona la força centrífuga de les sabates lligades al motor M_1 (1.400 min^{-1}). El parell que transmet l'embragatge continua essent el mateix, però ara els signes s'intercanvien: $M_{fM1} = -0,178 \text{ N} \cdot \text{m}$ i $M_{fM2} = +0,178 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- d. *Potències proporcionades o absorbides pels motors M_1 i M_2 , i dissipades en l'embragatge quan el motor M_2 gira a $n_{M2} = 2.000 \text{ min}^{-1}$*

El motor M_1 gira a 1.400 min^{-1} ($\omega_1 = 146,61 \text{ rad/s}$) i el motor M_2 gira a 900 min^{-1} ($\omega_2 = 92,25 \text{ rad/s}$).

Cada motor proporciona o absorbeix la potència que resulta de multiplicar el parell que es transmeten mútuament a través de l'embragatge, M_{f1} , per les velocitats angulars respectives:

$$P_{M1} = M_{f1} \cdot \omega_1 = 0,178 \cdot 146,61 = 26,16 \text{ W}$$

$$P_{M21} = M_{f1} \cdot \omega_{21} = -0,178 \cdot 92,25 = -16,82 \text{ W}$$

La potència dissipada és la suma algebraica d'aquestes dues potències:

$$P_{Edis1} = P_{M1} \cdot P_{M2} = -(26,16 - 16,82) = -9,34 \text{ W}$$

e. Potències mecàniques proporcionades o absorbides pels motors M_1 i M_2 quan el motor M_2 gira a $n_{M2} = 2.000 \text{ min}^{-1}$. Quina és la potència dissipada en l'embragatge?

El motor M_1 gira a 1.400 min^{-1} ($\omega_1 = 146,61 \text{ rad/s}$) i el motor M_2 gira a 2.000 min^{-1} ($\omega_{22} = 209,44 \text{ rad/s}$).

Cada motor proporciona o absorbeix la potència que resulta de multiplicar el parell que es transmeten mútuament a través de l'embragatge, M_{f1} , per les velocitats angulars respectives:

$$P_{M1} = M_{f2} \cdot \omega_1 = -0,178 \cdot 146,61 = -26,16 \text{ W}$$

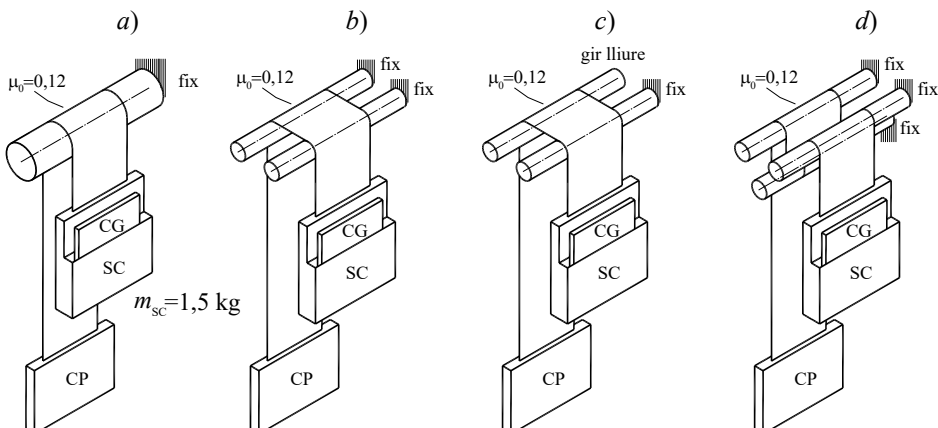
$$P_{M22} = M_{f2} \cdot \omega_{22} = 0,178 \cdot 209,44 = 37,37 \text{ W}$$

La potència dissipada és la suma algebraica d'aquestes dues potències:

$$P_{Edis1} = P_{M22} \cdot P_{M1} = -(37,37 - 26,16) = -11,21 \text{ W}$$

4.2.19 Adherència d'una cinta sobre una barra

La figura mostra una cinta (es considera sense massa) que descansa sobre una barra fixa (no giratòria) amb un suport-calaix (SC) d'1,5 kg de massa en un extrem i un contrapès (CP) a l'altre. El límit d'adherència entre la cinta i la barra és de $\mu_0 = 0,12$.





Es demana:

- a. *Massa màxima del contrapès (CP) perquè amb el suport-calaix (SC) buit la cinta no rellisqui cap al contrapès*

Segons l'equació d'Eytelwein, la relació de tensions entre els dos ramals de la cinta quan el límit d'adherència és $\mu_0 = 0,12$ i l'angle abraçat és $\theta = 3,141592$ rad (180°) és:

$$\frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot \theta} = e^{0,12 \cdot 3,141592} = 1,458$$

La relació màxima de forces de tensió equivaldrà a la relació màxima de pesos del contrapès (CP) i del suport-calaix (SP) i, per tant, a la relació de masses corresponent. La massa màxima del contrapès sense que la cinta rellisqui serà de:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_{CP}}{m_{SC}} \leq 1,458 \quad m_{CP} \leq 1,458 \cdot m_{CS} = 1,458 \cdot 1,5 = 2,187 \text{ kg}$$

- b. *Adoptant la massa del contrapès (CP) del punt anterior, la càrrega màxima (CG) que es pot col·locar al calaix sense que la cinta rellisqui del cantó del suport-calaix*

En aquest cas, la relació de tensions és la mateixa que en el cas anterior, però ara en sentit contrari. La càrrega màxima correspondrà a la força de tensió màxima en el ramal del suport-calaix per a la força de tensió del contrapès (CP), un cop descomptat el pes propi del suport-calaix:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_{SC} + m_{CG}}{m_{CP}} \leq 1,458$$

$$m_{CG} \leq 1,458 \cdot m_{CP} - m_{SC} = 1,458 \cdot 2,187 - 1,5 = 1,688 \text{ kg}$$

- c. *Es proposen diverses disposicions alternatives del sistema de suport de la cinta (figures b, c i d). Es demana, per al mateix límit d'adherència $\mu_0 = 0,12$, en la disposició b de la figura i les dues barres fixes (que no giren), la màxima relació de forces de tensió entre els dos ramals (F_2/F_1 o F_1/F_2), sense que rellisqui la cinta*

En aquest cas, l'angle total abraçat (mitja volta = $\pi = 3,141592$ radians), encara que repartit sobre dues barres fixes ($\pi/2 + \pi/2$), és el mateix que en els dos primers casos. Per tant, la relació de tensions és la mateixa:

$$\frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot (\theta_1 + \theta_2)} = e^{0,12 \cdot (1,570796 + 1,570796)} = 1,458$$

- d. *En la disposició c de la figura, amb la barra anterior fixa i la posterior que gira lliurement, la màxima relació de forces de tensió entre els dos ramals (F_2/F_1 o F_1/F_2), sense que rellisqui la cinta*

En aquest cas, l'angle total abraçat que hi intervé és tan sols el de la politja fixa (un quart de volta = $\pi/2 = 1,570796$ radians), ja que a l'altra barra, que gira lliurement, les tensions en ambdós ramals són iguals. Per tant, la nova relació de tensions és:

$$\frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot (\theta_1 + \theta_2)} = e^{0,12 \cdot (1,570796 + 0)} = 1,207$$

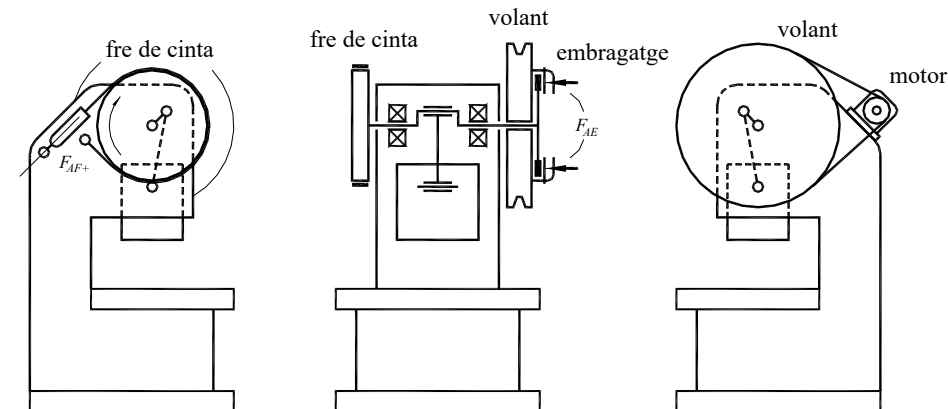
e. I en la disposició d de la figura i amb les tres barres fixes, la màxima relació de forces de tensió entre els dos ramals (F_2/F_1 o F_1/F_2), sense que rellisqui la cinta

Finalment, en aquesta darrera disposició, les tres barres freguen i cadascuna abraça mitja volta ($\pi = 3,141592$ radians). Per tant, la relació total de tensions entre els extrems de la cinta és:

$$\frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} = e^{0,12 \cdot (3,141592 + 3,141592 + 3,141592)} = 3,099$$

4.2.20 Embragatge i fre d'una premsa de volant

La figura mostra l'esquema d'una premsa de volant, en què la corredora fa un moviment curt (de 100 mm) i de cadència elevada (180 cicles per minut), que s'acciona a través d'un mecanisme de cigonyal (o excèntrica) i biela. Un volant de gran moment d'inèrcia ($J_V = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) acumula prou energia per realitzar el treball (tall, embotició) i mantenir la velocitat quasi constant.



A més de funcionar de forma contínua, una premsa de volant es pot engegar i aturar cicle a cicle. A aquest efecte, el motor acciona el volant, que gira boig sobre l'eix del cigonyal (de moment d'inèrcia equivalent molt més baix; $J_C = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$); per mitjà d'un embragatge, en una fracció de volta a partir del seu punt mort superior (uns 60°), l'eix del cigonyal es pot connectar al volant; a la zona del seu punt mort inferior, realitza el treball (tall, embotició) i, desembragat de nou, un fre l'atura a l'últim angle abans d'arribar al punt mort superior (uns 90°).

L'embragatge és de disc i té dues cares de treball de diàmetre exterior $d_e = 320 \text{ mm}$, diàmetre interior $d_i = 250 \text{ mm}$ i coeficient de fricció $\mu = 0,30$. El fre és de cinta, amb un angle de 270° , i actua sobre un tambor de diàmetre $d_T = 350 \text{ mm}$, amplada $b = 50 \text{ mm}$ i coeficient de fricció $\mu_{fre} = 0,35$.



Es demana:

a. Parell necessari en l'embragatge

Cal accelerar l'eix del cigonyal (moment d'inèrcia reduït: $0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) des d'aturat fins a 180 cicles/minut ($18,85 \text{ rad/s}$) en un gir de 60° ($1,047 \text{ rad}$). El moviment és uniformement accelerat, ja que el parell d'embragatge, M_E , se suposa constant:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha_E \cdot t^2 \quad \omega = \alpha_E \cdot t \quad \alpha_E = \frac{\omega^2}{2 \cdot \theta} = \frac{18,85^2}{2 \cdot 1,047} = 169,6 \text{ rad/s}^2$$

$$M_E = J_C \cdot \alpha = 0,5 \cdot 169,6 = 84,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b. Pressió admissible del material en l'embragatge, p_{adm}

A partir de l'expressió genèrica del parell d'un embragatge discoidal (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89), es calcula la pressió admissible necessària ($z = 2$, dues cares; $\xi = d_e/d_i = 0,320/0,250 = 1,28$):

$$p_{adm} = \frac{8 \cdot \xi^3 \cdot M_E}{z \cdot \pi \cdot \mu \cdot (\xi^2 - 1) \cdot d_e^3} = \frac{8 \cdot 1,28^3 \cdot 84,8}{2 \cdot 3,141592 \cdot 0,30 \cdot (1,28^2 - 1) \cdot 0,32^3} = 36.090,2 \text{ Pa}$$

$$= 0,036 \text{ MPa}$$

c. Força axial per accionar l'embragatge F_{AE}

La relació entre la força axial d'accionament i el parell d'embragatge s'obté de (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89):

$$F_{AE} = \frac{4 \cdot \xi \cdot M_E}{z \cdot (\xi + 1) \cdot \mu \cdot d_e} = \frac{4 \cdot 1,28 \cdot 84,8}{2 \cdot (1,28 - 1) \cdot 0,30 \cdot 0,32} = 992,1 \text{ N}$$

d. Amb el mateix diàmetre exterior i una geometria òptima de l'embragatge, calculeu la pressió admissible del material p_{adm}

A partir del mateix diàmetre exterior $d_e = 320 \text{ mm}$, l'expressió del parell per a un embragatge discoidal de geometria òptima (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89) s'obté de la nova expressió de la pressió admissible ($z = 2$, dues cares; $\xi = d_e/d_i = \sqrt{3} = 1,7321$):

$$p_{adm} = \frac{M_E}{0,511 \cdot z \cdot \mu \cdot d_e^3} = \frac{84,8}{1,511 \cdot 2 \cdot 0,30 \cdot 0,32^3} = 28.543,42 \text{ Pa} = 0,029 \text{ MPa}$$

La pressió de treball baixa de 0,036 a 0,029 MPa.

e. Amb el mateix diàmetre exterior i una geometria òptima de l'embragatge, calculeu la força axial F_A d'accionament de l'embragatge

Anàlogament, la relació entre la força axial d'accionament i el parell en un embragatge discoidal de geometria òptima (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 89) permet escriure l'expressió següent:

$$F_{AE} = \frac{M_E}{0,3943 \cdot z \cdot \mu \cdot d_e} = \frac{84,8}{0,3943 \cdot 2 \cdot 0,30 \cdot 0,32} = 1.120,3 \text{ N}$$

Cal fer notar que optimitzar el parell de frenada (o minimitzar la pressió admissible necessària) no vol dir disminuir la força axial d'accionament.

f. Parell necessari en el fre M_F

En aquest cas, es tracta d'un moviment uniformement desaccelerat de l'eix del cigonyal (moment d'inèrcia reduït de $0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) des de la velocitat de règim (180 cicles/minut, $18,85 \text{ rad/s}$) fins a la immobilitat en un gir de 90° ($1,571 \text{ rad}$). Se suposa que el parell de fre, M_F , és constant:

$$\theta = \omega \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad 0 = \omega - \alpha \cdot t \quad \alpha_F = \frac{\omega^2}{2 \cdot \theta} = \frac{18,85^2}{2 \cdot 1,571} = 113,1 \text{ rad/s}^2$$

$$M_F = J_C \cdot \alpha_F = 0,5 \cdot 113,1 = 56,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

g. El fre és d'efecte primari o secundari?

El sentit de gir del tambor respecte a la cinta fa que aquesta s'acció per l'extrem de tensió més elevada; per tant, és d'efecte secundari (cal una força d'accionament elevada per obtenir un parell de frenada).

h. Força d'accionament del fre F_{AF+}

La força d'accionament F_{AF+} coincideix amb l'extrem amb una tensió més elevada de la cinta. La relació entre les tensions a ambdós extrems de la cinta ve donada per l'equació d'Eytelwein (*Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*, p. 98) i la diferència de tensions produeix el parell de frenada. D'aquestes dues equacions, se n'obtenen les tensions als extrems de la cinta:

$$\frac{F_2}{F_1} = e^{(\theta \cdot \mu)} = e^{(1,571 \cdot 0,35)} = 5,204$$

$$M_F = (F_2 - F_1) \cdot (d_T / 2) = (F_2 - F_1) \cdot (0,350 / 2) = 56,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F_2 = 400,0 \text{ N} \quad F_1 = 76,9 \text{ N}$$

Com s'ha dit, la força $F_{AF+} = F_2 = 400,0 \text{ N}$ és la força d'accionament del fre (efecte secundari).

i. Pressió màxima de contacte cinta-tambor $p_{\text{màx}}$

La pressió màxima de la cinta coincideix amb el punt de màxima tensió, F_2 , i el seu valor es pot calcular a partir de l'equació (*Mecanismes i màquines. El frec en les màquines*, p. 100):

$$p_{\text{màx}} = \frac{F_{\text{màx}}}{b \cdot (d_T / 2)} = \frac{400,0}{0,050 \cdot (0,350 / 2)} = 45.715,2 \text{ Pa} = 0,046 \text{ MPa}$$

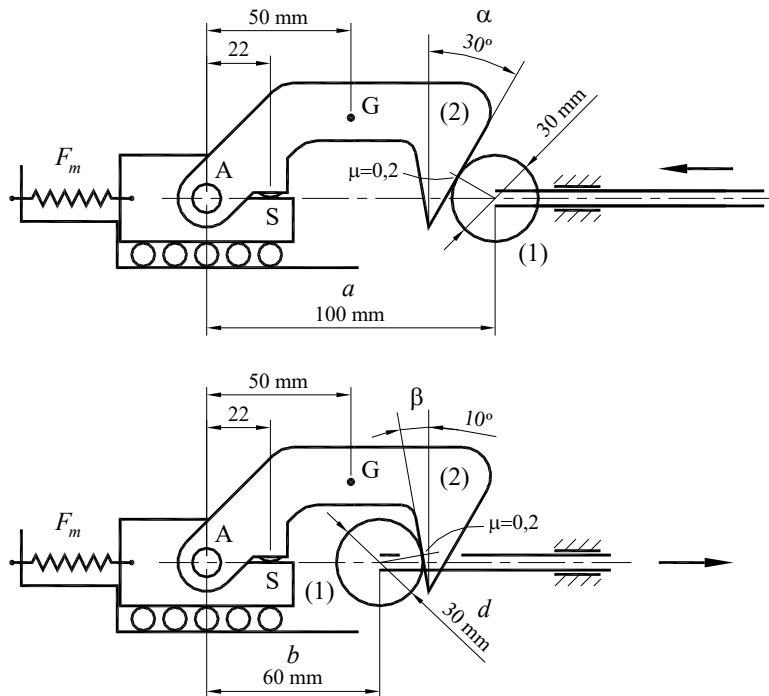
j. Força d'accionament del fre F_{AF-} si l'eix del cigonyal gira en sentit contrari

En aquest cas, el fre de cinta és d'efecte primari i s'aciona per l'extrem de tensió menor:

$$F_{AF-} = F_1 = 76,9 \text{ N}$$

4.2.21 Cadell de retenció per fre

La figura mostra un dispositiu per retenir automàticament una càrrega basada en una peça cilíndrica (1) que empeny el pla inclinat del cadell (2) i l'alça (figura 1), mentre que, un cop ha passat a l'altre costat (figura 2), la peça cilíndrica (1) queda retinguda pel pla interior del cadell. La peça cilíndrica (1) és solidària (no pot girar) a la tija que l'empeny.



Es demana:

- a. *Equilibri de forces del cadell (2) en iniciar-se el contacte amb la peça cilíndrica (1) per fer-lo saltar ($\mu = 0,2$). La massa del cadell és $m_c = 0,1 \text{ kg}$*

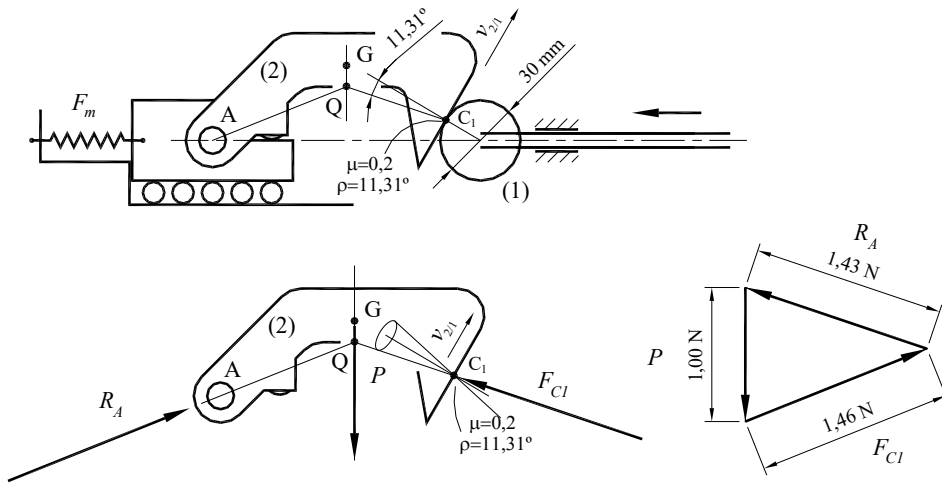
En el moment d'iniciar-se el contacte entre la peça cilíndrica (1) i el cadell (2) en el punt de contacte C_1 , el lliscament entre les dues peces ve indicat per la velocitat $v_{2/1}$, que comporta la desviació de la força de contacte respecte a la normal, com s'indica a la figura.

L'angle de fricció és $\rho = \text{atan}(0,2) = 11,31^\circ$.

El pes del cadell (2) passa pel seu centre de masses G i té direcció vertical. Les dues forces (el pes i la força de contacte a C_1 s'intersequen al punt Q; per tant, la tercera força

que actua sobre el cadell, la reacció sobre A, R_A , també ha de passar per aquest mateix punt.

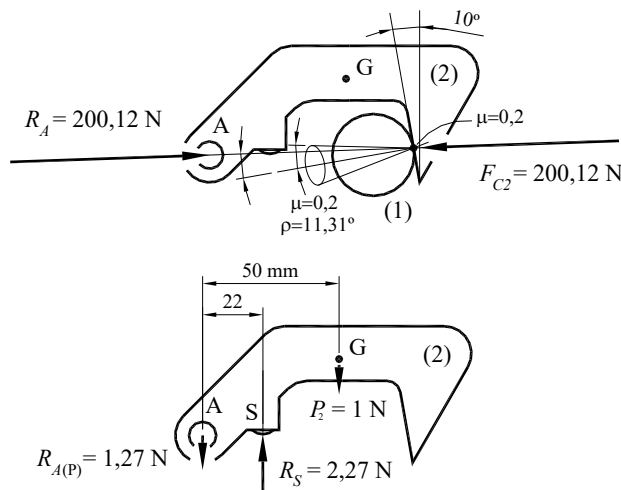
Establint el polígon de forces, i partint del pes del cadell (1 N, corresponent a una massa de 0,1 kg), se n'obtenen els valors corresponents, com es mostra a la figura adjunta.



b. Equilibri de forces del cadell (2) després de quedar retinguda la peça cilíndrica (1) a la seva part interior ($\mu = 0,2$), sabent que ha de vèncer la força de la molla $F_m = 200 \text{ N}$

En aquest segon cas, el punt de contacte és C_2 . El con d'adherència sobre el punt C_2 inclou el punt A i, per tant, hi ha autoretenció. Les forces es transmeten directament entre els punts A i C_2 .

Resolent gràficament, el sistema dona els resultats que es mostren a la figura.





De fet, caldria superposar dos sistemes: el de les dues principals forces (F_A i $F_{C2} = 200,12$ N) i el del pes del cadell (2) i les reaccions als punts A i S (forces molt més petites que, en principi, es poden desestimar).

Nota: Els punts 1 i 2 es poden resoldre de forma gràfica, donant-ne valors aproximats.

c. *Condició (per a qualsevol valor dels paràmetres) perquè la peça cilíndrica (1), en moure's cap a l'esquerra, rellisqui pel pla inclinat i obri el cadell (2) (figura 1)*

La condició perquè el cadell (2) s'obri, empès per la peça cilíndrica (1), és que el con d'adherència en el contacte C_1 no abraci el punt A d'articulació del cadell.

De fet, convé que quedi clarament separat del con d'adherència.

d. *Condició (per a qualsevol valor dels paràmetres) perquè la peça cilíndrica (1), un cop hagi saltat el cadell (figura 2), quedi retinguda pel pla interior del cadell (2)*

La condició perquè el cadell (2) sigui arrossegat per la peça cilíndrica (1) quan es mou cap a mà dreta és que el con d'adherència en el contacte C_2 abraci el punt A d'articulació del cadell.

De fet, convé que quedi clarament dintre del con d'adherència, no excessivament a la vora del seu extrem.

e. *Com influeixen els paràmetres μ , α , β , a i b en les condicions dels dos primers aparats d'aquest exercici?*

Paràmetre μ . Com més gran és el coeficient de fricció (o el límit d'adherència), més perill hi ha que el cadell no llisqui en el moviment cap a l'esquerra, però més fàcil és que es produeixi l'autoretenció en el moviment cap a la dreta.

Paràmetre α . Com més gran és l'angle α , més s'assegura el lliscament en el moviment cap a l'esquerra.

Paràmetre β . Com més petit és l'angle α , més s'assegura l'autoretenció en el moviment cap a la dreta.

Paràmetres a i b . Com més gran és la distància a , més s'assegura el lliscament en el moviment cap a l'esquerra. Respecte a la distància b , es podrien donar diferents tendències, en funció de l'angle β .

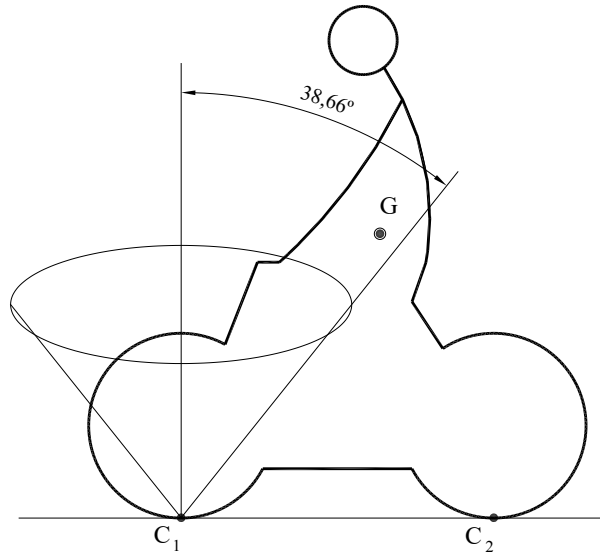
4.2.22 Frenada de bicicleta

La figura mostra una bicicleta amb el ciclista en el moment de la frenada.

Es demana:

a. *Si el fre del davant bloqueja la roda, aquesta rellisca o bé el vehicle bolca per davant? (Límit d'adherència pneumàtic-terra: $\mu_0 = 0,8$)*

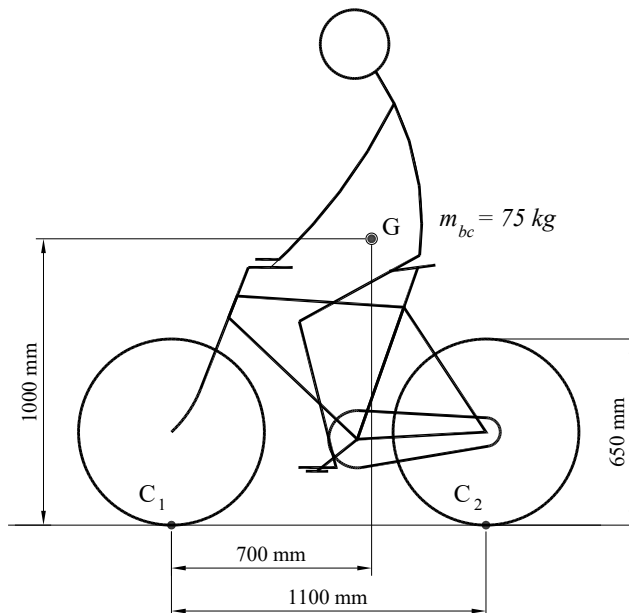
Si el centre de masses del conjunt bicicleta-ciclista (punt G) cau dintre del con d'adherència del contacte pneumàtic-roda, aleshores es produeix l'adherència de la roda i el conjunt bicicleta-ciclista bolca per davant. En cas contrari, la roda rellesca.



L'angle d'adherència és:

$$\rho = \text{atan}(0,8) = 38,66^\circ$$

Traslladat aquest valor sobre l'esquema de la bicicleta, es comprova que el centre de masses G es troba dintre del con d'adherència d'angle $\rho = 38,66^\circ$ amb centre a C_1 . Per tant, es produeix la bolcada de la bicicleta i el ciclista.





- b. Si el fre de la roda del darrere actua sol (sense el fre de la roda del davant) al límit d'adherència entre el pneumàtic i el terra, quina és la desacceleració màxima que experimenta el conjunt bicicleta-ciclista?

Per obtenir la desacceleració del conjunt bicicleta-ciclista, cal trobar abans la força d'inèrcia del conjunt quan la roda del darrere es troba en la situació de frenada límit (just al moment en què comença a lliscar). No es distingeix entre el valor del límit d'adherència i la fricció màxima.

En aquest cas, traslladem l'angle d'adherència, $\rho_0 = 38,66^\circ$, al contacte de la roda del darrere amb el terra (punt C_2). La direcció de la força de contacte (suma de la força normal F_{NC2} i la força de frec tangencial F_{TC2}) es talla al punt Q amb la reacció vertical de la roda del davant (F_{CI} ; el fre no actua sobre aquesta roda i, per tant, coincideix amb la força normal F_{NC1}). La tercera força que passa per G (suma del pes P i de la força d'inèrcia F_I) s'ha de tallar també al punt Q.

Aquest sistema de forces s'ha resolt gràficament amb un CAD-2D, però també es podria haver resolt analíticament. El resultat per a la força d'inèrcia és $F_I = 220,1$ N.

L'acceleració del conjunt bicicleta-ciclista és, doncs:

$$a_G = F_I / m_{bc} = 220,1 \text{ N} / 75 \text{ kg} = 2,93 \text{ m/s}^2$$

- c. Quin és el parell del fre M_f de la roda del darrere en aquesta desacceleració màxima?

La força tangencial en el contacte C_2 és $F_{TC2} = 220,1$ N (junt amb la força d'inèrcia, són les dues úniques forces horitzontals).

Per tant, el parell de frenada que haurà de fer el fre de la roda del darrere és:

$$M_f = F_{TC2} \cdot (d_{rodal}/2) = 220,1 \text{ N} \cdot (0,650 \text{ m}/2) = 71,53 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- d. El fre de la roda del darrere és de disc sectorial (equivalent a un sector de 60°) amb una doble mordassa (una per a cada cara), de diàmetre exterior $d_e = 150$ mm i geometria òptima, i el coeficient de fricció entre els ferodos i el disc de fre és $\mu = 0,35$. Per al valor del parell del fre M_f obtingut a l'apartat 3 (si no l'heu resolt, preneu $M_f = 10$ N·m), es demana novament la Força axial F_A que han d'exercir les mordasses sobre el disc de fre

L'enunciat ens diu que el fre del darrere és de geometria òptima, és a dir, $\xi = \sqrt{3}$.

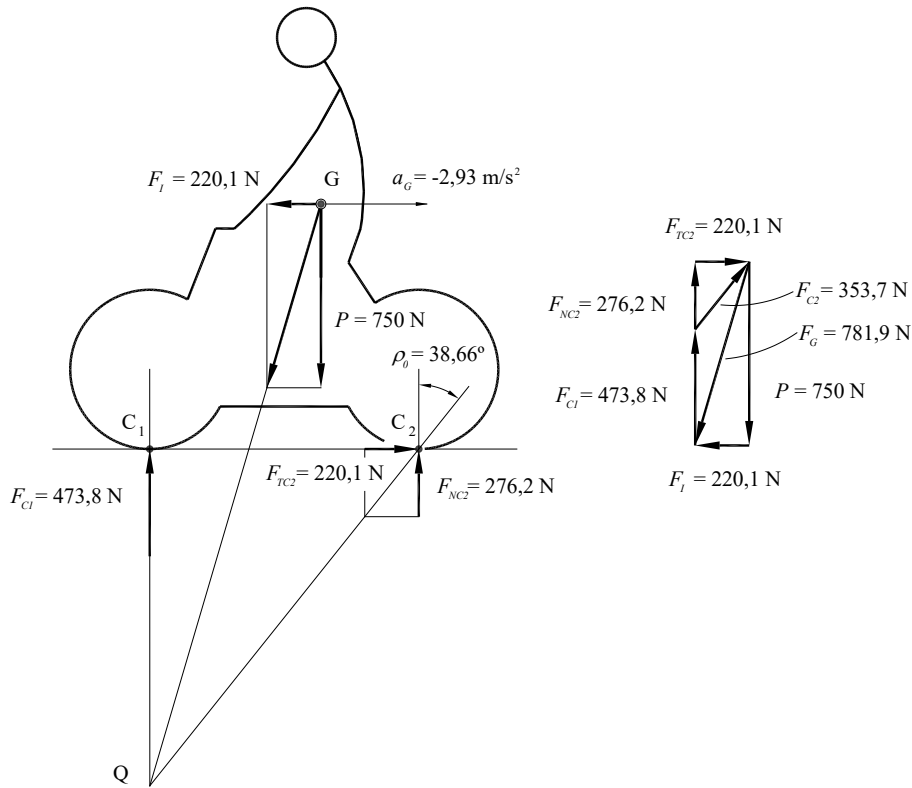
Aplicant la fórmula de la força axial per als frens de disc sectorials, s'obté:

$$F_A = \frac{4 \cdot \xi}{z \cdot (\xi + 1)} \cdot \frac{M_f}{\mu \cdot d_e} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3} + 1)} \cdot \frac{71,53}{0,35 \cdot 0,12} = 2.159,5 \text{ N}$$

- e. Pressió màxima $p_{m\grave{a}x}$ sobre el material de ferodo

Aplicant la fórmula de la pressió màxima per als frens de disc sectorials, s'obté:

$$p_{m\grave{a}x} = \frac{4 \cdot \xi^2}{\beta \cdot (\xi - 1)} \cdot \frac{F_A}{d_e^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3})^2}{(60 \cdot \pi / 180) \cdot (\sqrt{3} - 1)} \cdot \frac{2159,5}{0,12^2} = 2.347.496 \text{ N/m}^2 = 2,35 \text{ MPa}$$

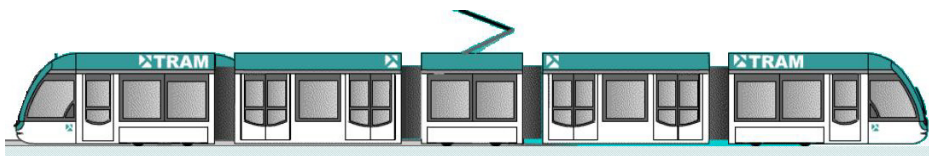


4.2.23 Frens de tramvia

Els tramvies que circulen per l'Àrea Metropolitana de Barcelona (Trambaix i Trambesòs) són del tipus Citadis, fabricats per Alstom, i les unitats estan formades per cinc cossos articulats amb bogis de quatre rodes a les unitats extremes i central, mentre que les unitats segona i quarta estan suportades sobre les anteriors.

Les característiques principals són:

- Longitud: 32,5 m; amplada: 2,6 m
- Tara (o pes propi): 40 t; nombre màxim de passatgers: 294 (75 kg/passatger)
- Velocitat màxima: 70 km/h



El sistema de frens actua sobre les 12 rodes dels tres bogis (unitats extremes i central) però, a causa de la disposició dels quatre motors de tracció, les dues unitats extremes



disposen d'un sol fre de disc per a cada eix (dues rodes), mentre que la unitat central (sense motors) disposa d'un fre de disc per a cada roda.

Se suposa un repartiment igual de càrregues de pes sobre les 12 rodes; el diàmetre de les rodes és de 700 mm, el coeficient de rodolament roda-carril és $\delta_R = 1$ mm i el coeficient d'adherència roda-carril és $\mu_0 = 0,18$.

Es demana:

a. *Frenada màxima que pot fer el tramvia buit i carregat (desacceleració en m/s²)*

La frenada màxima del tramvia ve determinada pel límit d'adherència del contacte roda-carril. La resistència al rodolament és molt petita, comparada amb la força de frenada per adherència, i s'obvia. En tot cas, disminuiria el parell de frenada necessari.

Se suposa que totes les rodes frenen al màxim i que el repartiment de càrregues sobre les rodes és igual. El càlcul de la desacceleració màxima anant buit és:

Pes buit

$$W_B = m_{Bt} \cdot g = 40.000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 392.400 \text{ N}$$

Força màxima de frenada buit

$$F_{FB} = \mu_0 \cdot W_B = 0,18 \cdot 392.400 = 70.632 \text{ N}$$

Desacceleració màxima buit

$$a_B = F_{FB} / m_B = 1,766 \text{ m/s}^2$$

El càlcul de la desacceleració màxima carregat és:

Pes carregat

$$W_C = m_C \cdot g = 62.050 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 608.711 \text{ N}$$

Força màxima de frenada carregat

$$F_{FC} = \mu_0 \cdot W_C = 0,18 \cdot 608.711 = 109.568 \text{ N}$$

Desacceleració màxima carregat

$$a_C = F_{FC} / m_C = 1,766 \text{ m/s}^2$$

La desacceleració és la mateixa, ja que en tots dos casos la relació entre la força de frenada i el pes és la mateixa, el límit d'adherència. Per tant:

$$a_B = a_C = \mu_0 \cdot g = 0,18 \cdot 9,81 = 1,766 \text{ m/s}^2$$

b. *Desacceleració màxima de frenada amb el tramvia carregat baixant per un pendent del 4 %*

Si el tramvia circula per una baixada del 4 %, a més de desaccelerar el comboi, és com si el fre treballés contra una força motora equivalent a la projecció del pes sobre la direcció de la marxa. Per ser exactes, l'angle d'inclinació és $\alpha = \text{atan}(4/100) = 2,291^\circ$ i les forces normals i tangencials són les projeccions del pes corresponents:

Força tangencial (pendent del 4 %)

$$F_{TCP} = W_C \cdot \sin(2,291) = 24.329 \text{ N}$$

Força normal (pendent del 4 %)

$$F_{NCP} = W_C \cdot \cos(2,291) = 608.224 \text{ N}$$

Força màxima de frenada carregat i en pendent

$$F_{FCP} = \mu_0 \cdot F_{NCP} = 109.480 \text{ N}$$

Força màxima de desacceleració carregat i en pendent

$$F_{DCP} = F_{FCP} - F_{TCP} = 85.151 \text{ N}$$

Desacceleració màxima carregat i en pendent

$$a_{CP} = F_{DCP} / m_C = 85.151 / 62.050 = 1,372 \text{ m/s}^2$$

En aquest cas, l'efecte del pendent en el sentit de la marxa produeix a una disminució de l'acceleració de frenada.

c. Parell de frenada sobre cadascun dels frens en cas d'un pendent del 4 %

La força de frenada total és el resultat de la frenada de 12 rodes. Per tant, el parell de frenada en els frens serà diferent en els frens de les unitats extremes (2 rodes per fre) que en les rodes de la unitat central (1 roda per fre):

Moment del fre (unitats extremes)

$$M_{F(extrem)} = (2/12) \cdot F_{FCP} \cdot (d_{roda}/2) = (2/12) \cdot 109.480 \cdot (0,70/2) = 6.386,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Moment del fre (unitat central)

$$M_{F(central)} = (1/12) \cdot F_{FCP} \cdot (d_{roda}/2) = (1/12) \cdot 109.480 \cdot (0,70/2) = 3.193,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

d. Espai recorregut en la frenada límit des de 70 km/h en cas d'un pendent del 4 %

Se suposa que el parell de frenada és constant i, per tant, el moviment uniformement desaccelerat. Les equacions del moviment són:

$$e_{(frenada)} = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a_{CP} \cdot t^2$$

$$v = 0 = v_0 - a_{CP} \cdot t$$

El resultat de resoldre aquest sistema és ($v_0 = 70 \text{ km/h} = 19,44 \text{ m/s}$):

$$e_{(frenada)} = v_0^2 / (2 \cdot a_{CP}) = 19,44^2 / (2 \cdot 1,372) = 137,76 \text{ m}$$

e. Energia dissipada en la frenada en cas d'un pendent del 4 %

L'energia dissipada en la frenada és el producte de la força de frenada per l'espai recorregut durant la frenada:

$$E_{dis} = F_{FCP} \cdot e_{(frenada)} = 109.480 \cdot 137,76 = 15.081.597 \text{ J} = 15,082 \text{ MJ}$$

També es podria calcular a partir de sumar l'energia cinètica inicial del tramvia que es dissipa (11,730 MJ) i la disminució d'energia potencial del tramvia durant la frenada a causa del pendent (3,351 MJ) que, com es pot comprovar, donen el mateix resultat.



- f. Suposant que els frens de disc de diàmetres interior i exterior $d_i = 224$ i $d_e = 408$ mm treballen per dues cares amb sabates sectorials d'angle $\beta = 60^\circ$ i $\mu = 0,35$, es demana (si no heu resolt el punt 3, preneu com a parell de frenada sobre cada roda $M_F = 3.000$ N·m):

És un fre de geometria òptima?

La relació de diàmetres exterior, d_e , i interior, d_i , és:

$$\xi = d_e / d_i = 408 / 224 = 1,821$$

La relació òptima és $\sqrt{3} = 1,732$

Per tant, no és un fre de geometria òptima.

- g. En cas d'un pendent del 4 %, la pressió màxima sobre el material (ferodo) dels quatre frens de la unitat central i la força axial necessària

Sabent les característiques del fre ($z = 2$ cares; $\mu = 0,35$, $\beta = 60^\circ = 1,047$ rad), la força axial que cal exercir sobre les mordasses i els ferodos dels frens de la unitat central per produir el parell de frenada ($M_{F(\text{central})} = 3.193,2$ N·m) és:

$$F_{A(\text{central})} = \frac{4 \cdot \xi}{z \cdot (\xi + 1)} \cdot \frac{M_{F(\text{central})}}{\mu d_e} = \frac{4 \cdot 1,821}{2 \cdot (1,821 + 1)} \cdot \frac{3.193,2}{0,35 \cdot 408} = 28.871,4 \text{ N}$$

I la pressió màxima en el diàmetre interior del disc és:

$$p_{\text{màx}(\text{central})} = \frac{4 \cdot \xi^2}{\beta \cdot (\xi - 1)} \cdot \frac{F_{A(\text{central})}}{d_e^2} = \frac{4 \cdot 1,821^2}{1,047 \cdot (1,821 - 1)} \cdot \frac{28.871,4}{0,408^2} = 2,676 \text{ Pa}$$

- h. En cas d'un pendent del 4 %, la pressió màxima sobre el material (ferodo) dels quatre frens de les unitats extremes i la força axial necessària

La força axial que cal exercir sobre les mordasses i els ferodos dels frens de les unitats extremes per produir el parell de frenada ($M_{F(\text{extremes})} = 6.386,4$ N·m) és ($z = 2$ cares; $\mu = 0,35$, $\beta = 60^\circ = 1,047$ rad):

$$F_{A(\text{extremes})} = \frac{4 \cdot \xi}{z \cdot (\xi + 1)} \cdot \frac{M_{F(\text{extremes})}}{\mu d_e} = \frac{4 \cdot 1,821}{2 \cdot (1,821 + 1)} \cdot \frac{6.386,4}{0,35 \cdot 408} = 57.742,8 \text{ N}$$

I la pressió màxima a l'interior del disc és:

$$p_{\text{màx}(\text{extremes})} = \frac{4 \cdot \xi^2}{\beta \cdot (\xi - 1)} \cdot \frac{F_{A(\text{extremes})}}{d_e^2} = \frac{4 \cdot 1,821^2}{1,047 \cdot (1,821 - 1)} \cdot \frac{57.742,8}{0,408^2} = 5,351 \text{ Pa}$$

Com es pot comprovar, els valors són el doble del cas anterior.

- i. Si la pressió calculada sobre el material (ferodo) en els quatre discos de fre de la unitat central s'aplica als frens de les unitats extremes, es demana:

Frenada màxima del tramvia carregat al pla (desacceleració en m/s^2)

En aquest cas, tots els frens funcionen a la pressió màxima de 2,676 MPa i el parell de frenada sobre cada fre és de 3.193,2 N·m i, traduït en força de frenada sobre les rodes, és:

$$F_{F(1.fre)} = M_{F(central)} / (d_{roda} / 2) = 3.193,2 / (0,700/2) = 9.123,4 \text{ N}$$

Atès que el tramvia disposa de 8 frens (2+2 a les unitats extremes i 4 a la unitat central), que treballen tots igualment, la frenada total serà:

$$F_{F(8.frens)} = 8 \cdot F_{F(1.fre)} = 8 \cdot 3.193,2 = 72.986,9 \text{ N}$$

La desacceleració en pla serà, doncs:

$$a_{C(8.frens)} = F_{F(8.frens)} / m_C = 72.986,9 / 62.050 = 1,176 \text{ m/s}^2$$

j. *Parell de frenada màxima de cada un dels frens de les unitats extremes si l'angle del sector augmenta fins a $\beta = 90^\circ$ i la força axial necessària en aquest cas*

Es parteix de la pressió màxima dels frens de la unitat central, $p_{m\grave{a}x} = 2,676 \text{ MPa}$.

Amb un angle sectorial augmentat fins a $\beta = 90^\circ$ (als frens de les unitats dels extrems, el nou parell de frenada i la força axial són:

$$F_{A(\beta=90)} = \frac{\beta \cdot (\xi - 1)}{4 \cdot \xi} \cdot p_{m\grave{a}x} \cdot d_e^2 = \frac{1,571 \cdot (1,821 - 1)}{4 \cdot 1,821^2} \cdot 2,676 \cdot 0,408^2 = 43.307,1 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} M_{F(\beta=90)} &= z \cdot \frac{(\xi + 1)}{4 \cdot \xi} \cdot \mu \cdot d_e \cdot F_{A(\beta=90)} = \\ &= 2 \cdot \frac{(1,821 + 1)}{4 \cdot 1,821} \cdot 0,35 \cdot 0,408 \cdot 43.307,1 = 4.789,8 \text{ N}\cdot\text{mm} \end{aligned}$$

És a dir, el parell de frenada és proporcional a la força axial i aquesta és proporcional a l'angle sectorial. Per tant, en passar d'un angle sectorial de 60° a un de 90° , el parell de frenada augmenta un 50 %.

4.2.24 Autoretençió en una guia pel bloqueig d'un corró

La figura mostra una corredora que, en aquesta posició, és accionada per la força F que vol vèncer una força resistent F_r . La corredora està guiada pels corrns 1 i 2, que poden entrar en contacte sobre les guies als punts A , B , C i D . A efectes pràctics, quan els corrns rodolen sobre les guies, es considera que el coeficient de fricció és 0 però, si el rodament es bloqueja, el coeficient de fricció entre els corrns i la guia (els corrns són de materials diferents) passa a ser $\mu_0 = 0,25$ per al contacte del corró 1 i la guia, i $\mu_0 = 0,4$ per al contacte del corró 2 i la guia.

Es demana:

a. *Força F , que venç la força resistent F_r , quan els dos corrns rodolen*

En cas que els corrns rodolin, es considera (a efectes pràctics) un coeficient de fricció nul. Els angles de fricció són zero; no hi ha forces tangencials als punts de contacte, i els punts d'autoretençió es troben a l'infinit.

Per tant, la força d'accionament F és igual a la força resistent:

$$F = F_r = 200 \text{ N}$$

b. *Bloqueig del corro 1: Determineu el punt d'autoretenció que cal considerar. Es produeix autoretenció?*

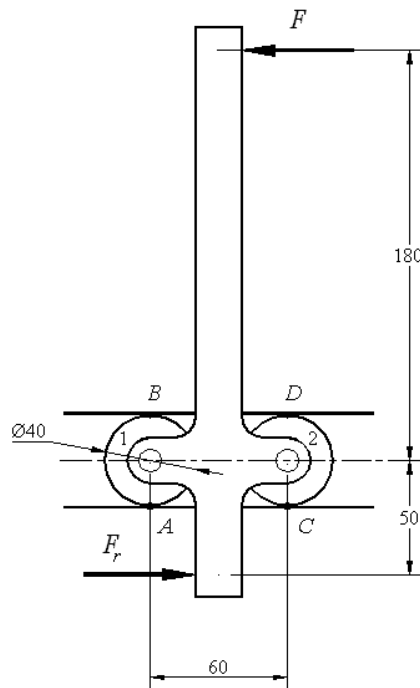
Els punts de contacte dels corrons amb la guia són A i D .

Al punt A , hi ha un angle de fricció

$$\rho_0 = \text{atan} \mu_0 = \text{atan} 0,25.$$

Al punt D , l'angle és zero.

Representades les dues línies a la figura, la intersecció (punt d'autoretenció U') es produeix més amunt de la línia de pas de la força F ; concretament, 40 mm més amunt. Per tant, en no incidir la línia d'acció de la força motora F en la zona d'intersecció dels dos cons, no es produeix autoretenció.



c. *Bloqueig del corro 1: Quina és la força F que venç la força resistent F_r ?*

Essent la força motora F i la força resistent F_r horitzontals, la tercera força F_c que passa pel punt d'autoretenció U' (suma de les forces de contacte a A i D) també serà horitzontal.

Coneguda la força resistent $F_r = 200 \text{ N}$, cal resoldre l'equilibri d'aquest sistema. El resultat és:

$$F_c = F \cdot \frac{180 + 50}{40} = 1.150$$

$$F = F_c + F_r = 1.150 + 200 = 1.350$$

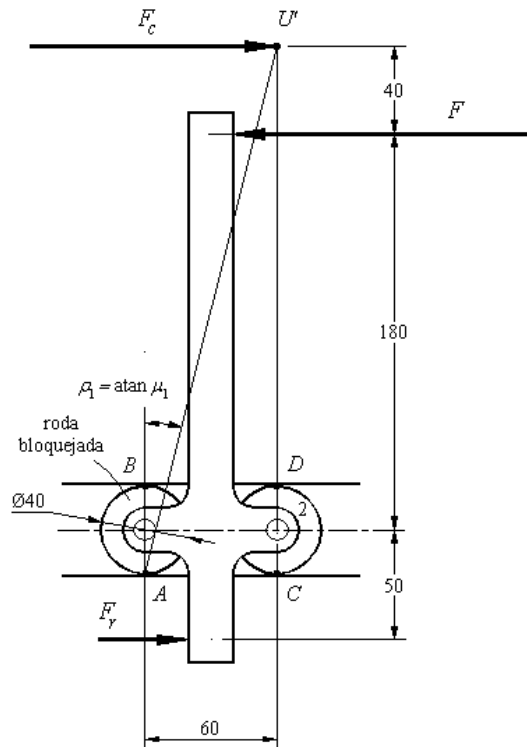
d. *Bloqueig del corro 2: Determineu el punt d'autoretenció que cal considerar. Es produeix autoretenció?*

Els punts de contacte dels corrons amb la guia són igualment *A* i *D*.

Al punt *A*, l'angle és zero.

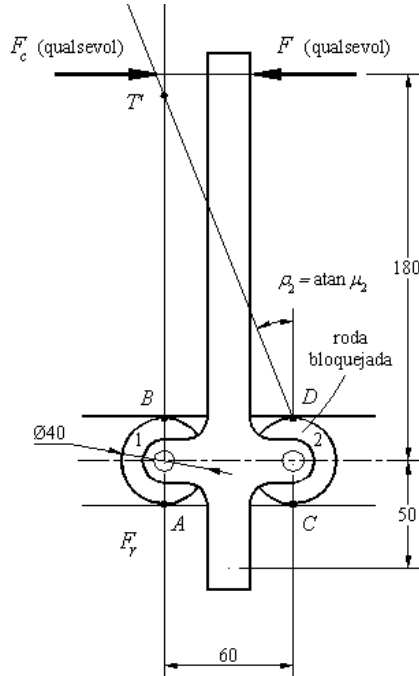
Al punt *D*, hi haurà un angle de fricció $\rho_0 = \text{atan} \mu_0 = \text{atan } 0,40$.

Representades les dues línies a la figura, la intersecció (punt d'autoretenció *T'*) es produeix per sota de la línia de pas de la força *F*. Per tant, en incidir la línia d'acció de la força motora *F* en la zona d'intersecció dels dos cons d'adherència, sí que es produeix autoretenció.



e. *Bloqueig del corro 2: Quina és la força *F* que venç la força resistent *F_r*?*

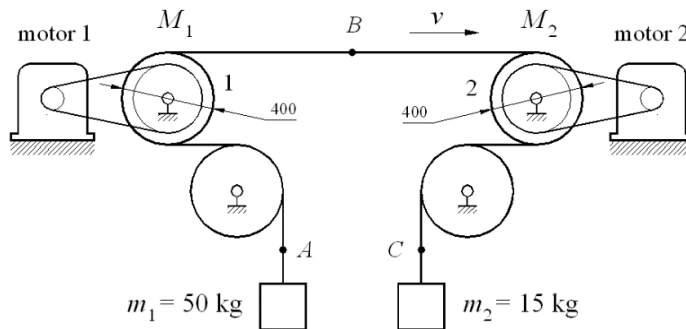
Atès que es produeix autoretenció, per més que augmenti la força motora *F*, mai no es podrà vèncer la força resistent *F_r*. Tota la força motora és absorbida per la suma de forces de contacte *F_c*.



4.2.25 Sistema d'arrossegament d'una banda

La figura mostra un sistema d'arrossegament d'una banda amb dos corròs, 1 i 2 (diàmetres en mm), accionats per sengles motors. El motor 1 és el motor principal d'arrossegament i el motor 2 està comandat per un control que permet assegurar una tensió determinada al punt B.

El coeficient de fricció de la banda sobre el corró 1 és de $\mu_1 = 0,25$ i, sobre el corró 2, de $\mu_2 = 0,35$. (Considereu els límits d'adherència iguals als coeficients de fricció.)



Es demana:

- Tensió al punt B perquè sigui un 25 % superior a la força mínima necessària perquè la banda no rellisqui sobre el corró 1

La tensió mínima, T_{Bmin} , perquè la banda no rellisqui sobre la politja 1 (ha de vèncer el pes de la massa 1) vindrà donada per (l'angle abraçat és mitja volta i, per tant, π):

$$T_{Bmin} = \frac{T_A}{e^{(\pi \cdot 0,25)}} = T_A / 2,19328 = (50 \cdot 9,81) / 2,19328 = 490,50 / 2,19328 = 223,64 \text{ N}$$

Atès que es demana al punt B un marge del 25 % de més de la tensió mínima, T_{Bmin} , es pren:

$$T_B = T_{Bmin} \cdot 1,25 = 223,64 \cdot 1,25 = 279,55 \text{ N}$$

b. Parell que ha d'exercir el motor 1 sobre el corró 1 per moure la banda

La tensió al punt A ve determinada pel pes de la massa 1, mentre que la tensió al punt B (que s'aconsegueix per mitjà del motor 2 controlat) és l'obtinguda a l'apartat anterior:

$$T_A = 50 \cdot 9,81 = 490,50 \text{ N}$$

$$T_B = T_{Bmin} \cdot 1,25 = 279,55 \text{ N}$$

El parell que haurà d'exercir el motor 1 serà la diferència de les tensions a B i A, multiplicada per radi del corró:

$$M_1 = (T_B - T_A) \cdot \frac{d}{2} = (490,50 - 279,55) \cdot \frac{0,4}{2} = 42,19 \text{ N m}$$

Aquest parell té sentit del moviment i, per tant, és motor.

c. Parell que ha d'exercir el motor 2 sobre el corró 2. És un parell motor o de fre?

La tensió al punt C ve determinada pel pes de la massa 2, mentre que la tensió al punt B ve determinada pel control del motor 2 a través del parell del corró 2, M_2 . I aquest valor l'hem determinat per l'apartat anterior. Per tant, les tensions són:

$$T_B = 279,55 \text{ N}$$

$$T_C = 15 \cdot 9,81 = 147,15 \text{ N}$$

Per tant, el parell que ha d'exercir el motor 2 per mantenir la tensió al punt B serà:

$$M_2 = (T_B - T_C) \cdot \frac{d}{2} = (279,55 - 147,15) \cdot \frac{0,4}{2} = 26,60 \text{ N m}$$

També serà un parell motor, ja que la tensió a B és superior a la tensió a C.

L'adherència està assegurada, ja que:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{279,55}{147,15} = 1,8997 < e^{(\pi \cdot 0,35)} = 3,0028$$

d. Si el motor 2 es descontrola i gira més ràpid que el motor 1, la banda rellisca sobre el corró 1 o sobre el corró 2? Es trencarà la banda si suporta una tensió màxima de 600 N?



Si el motor 2 es descontrola i gira més ràpid que el motor 1, cal analitzar si la banda rellisca sobre el corró 1 o sobre el corró 2.

En cas que rellisqui sobre el corró 1, la tensió al punt B ha d'arribar a ser:

$$T_{Bmin(1)} = T_A \cdot e^{(\pi \cdot 0,25)} = T_A \cdot 2,1933 = (50 \cdot 9,81) \cdot 2,1933 = 490,50 \cdot 2,1933 = 1.075,80 \text{ N}$$

En cas que rellisqui sobre el corró 2, la tensió al punt B ha d'arribar a ser:

$$T_{Bmin(2)} = T_C \cdot e^{(\pi \cdot 0,35)} = T_C \cdot 3,0028 = (15 \cdot 9,81) \cdot 3,0028 = 147,15 \cdot 3,0028 = 441,87 \text{ N}$$

Per tant, **la banda rellisca sobre el corró 2** i la tensió màxima al punt B serà $T_{Bm\grave{a}x} = 441,87 \text{ N}$. Per tant, **la banda no es trencarà**.

e. En aquest darrer cas, quins són els parells que exerceixen els motors 1 i 2 sobre els corrons respectius?

En cas de reliscament al corró 2 (com s'ha vist a l'apartat anterior), les tres tensions als punts A, B i C són:

$$T_A = 490,50 \text{ N}; \quad T_B = 441,87 \text{ N}; \quad T_C = 147,15 \text{ N};$$

I els parells que exerceixen els motors 1 i 2 sobre els corrons corresponents són:

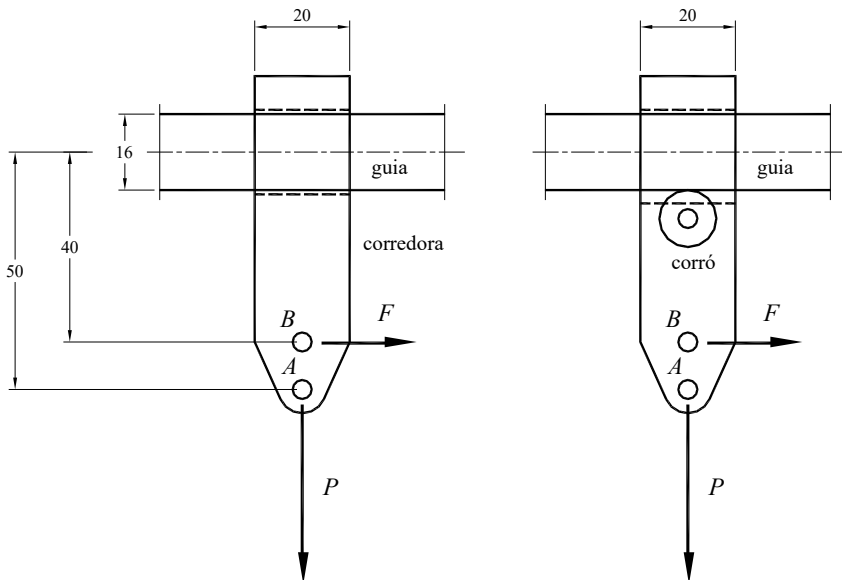
$$M_1 = (T_A - T_B) \cdot (d / 2) = (490,50 - 441,87) \cdot (0,4 / 2) = 9,73 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = (T_B - T_C) \cdot (d / 2) = (441,87 - 147,15) \cdot (0,4 / 2) = 58,94 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Tots dos són motors, però ara quasi tota la tracció recau sobre el motor 2.

4.2.26 Corredora de cortina

La figura mostra una corredora de cortina que es mou sobre una guia horitzontal i alhora pot suportar el pes P aplicat sobre el forat inferior A . Per desplaçar horitzontalment la corredora, s'estira amb la força F del punt B .



Es demana:

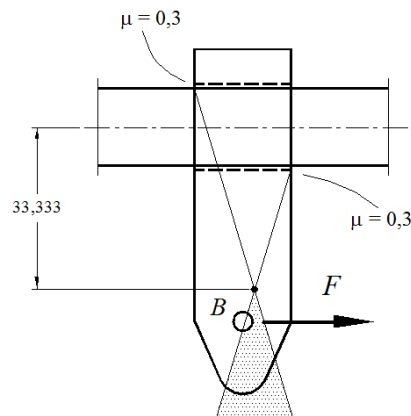
- a. *Essent el coeficient de fricció entre la guia i la corredora $\mu = 0,3$, localitzeu el punt d'autoretenció. La força F produeix autoretenció?*

Amb les dimensions de l'enunciat, la distància del l'eix de la corredora al punt d'autoretenció és:

$$a/(2 \cdot \mu) = 20/(2 \cdot 0,3) = 33,333 \text{ mm (vegeu la figura)}$$

Per tant, la força F passa més enllà del punt d'autoretenció i produeix autoretenció.

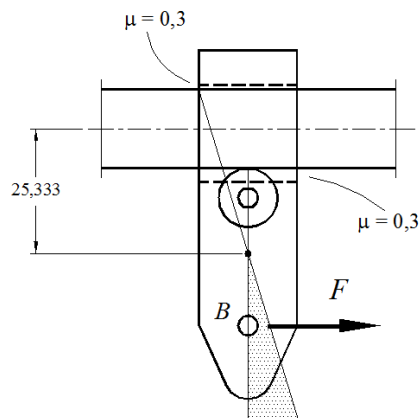
- b. *Si, en el cas anterior, el contacte inferior se substitueix per un petit corró (figura de la dreta), que es considera sense fricció, com varia el punt d'autoretenció?*



La figura mostra la nova zona d'interferència i el punt d'autoretenció.

Com es pot comprovar, la distància de l'eix de la corredora al punt d'autoretenció encara és més petita: 25,333 mm. Això és degut fonamentalment al fet que, en estar disposat el corró al centre de la corredora segons la llargada, aquesta disminueix per 2.

- c. *Per a la figura de l'esquerra, trobeu el valor del coeficient de fricció límit μ_{lim} entre la guia i la corredora perquè el sistema es trobi entre l'autoretenció i el lliscament*





El valor límit del coeficient de fricció entre la guia i la corredora és, per a una distància del punt d'autoretenció de $d = 40 \text{ mm}$: $\mu_{lim} = a/(2 \cdot d) = 20 \text{ mm} / (2/40 \text{ mm}) = 0,25$.

d. Per a una parella de materials de $\mu = 0,15$, essent $P = 10 \text{ N}$ (es negligeix el pes de la corredora), quan s'aplica la força F per fer lliscar la corredora aquesta s'entregira (és a dir, toca a la guia per dos extrems en diagonal)?

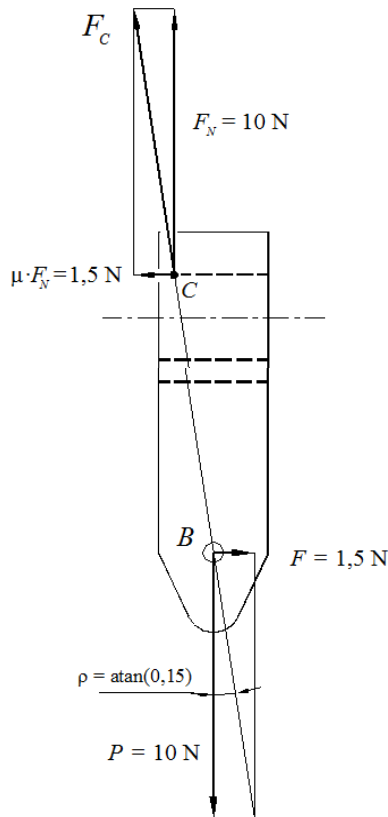
Cal comprovar si, respecte al punt de contacte C_1 , la força $F = \mu \cdot P = 0,15 \cdot 10 = 1,5 \text{ N}$ dona lloc a un parell superior al que dona P (aleshores, la corredora no s'entregira) o inferior (la corredora s'entregira):

$$P \cdot 10 = 10 \text{ N} \cdot 10 \text{ mm} = 100 \text{ N} \cdot \text{mm} \gg F \cdot 40 = 1,5 \text{ N} \cdot 40 \text{ mm} = 60 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

En aquest cas, doncs, la corredora no s'entregira i tan sols hi haurà contacte a la part superior de la guia-corredora.

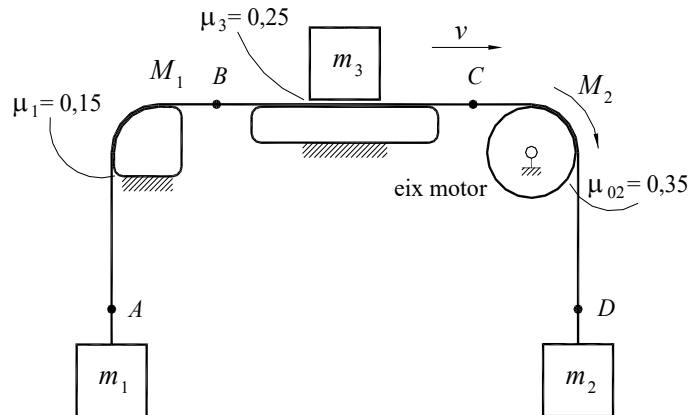
e. Establiu l'equilibri de forces complet per al cas anterior, amb valors numèrics

Vegeu els resultats a la figura adjunta.



4.2.27 Moviment de banda

La figura mostra un sistema de banda horitzontal a la part central i vertical a les parts finals, amb dues masses, m_1 i m_2 , als extrems que la mantenen en tensió.



El canvi de direcció al costat esquerre es fa sobre una superfície lliscant ($\mu_1 = 0,15$), mentre que al costat dret es fa sobre un corró ($\mu_{02} = 0,35$) de 100 mm de diàmetre, que està connectat a un motor. A la part central, se suporta sobre un pla horitzontal ($\mu_3 = 0,25$) i pot arrossegar una caixa de massa m_3 .

Es demana:

- a. Si $m_1 = m_2 = 4$ kg; $m_3 = 0$, l'adherència entre la banda i el corró és capaç d'arrossegar la banda en el sentit que marca la velocitat v ?

Atès que no hi ha cap càrrega que graviti sobre la part horitzontal de la banda ($m_3 = 0$), cal comprovar que la fricció de la banda sobre la superfície lliscant de l'esquerra dóna lloc a una diferència de tensions inferior a l'adherència entre la banda i el corró de mà dreta. En els dos casos, l'angle abraçat és de 90° , és a dir, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2 = 1,571$:

$$\frac{F_B}{F_A} = e^{\mu_1 \cdot \theta_1} = e^{0,15 \cdot 1,571} = 1,266 = \frac{F_C}{F_D} \leq e^{\mu_2 \cdot \theta_2} = e^{0,35 \cdot 1,571} = 1,733$$

Atès que es compleix la desigualtat, això vol dir que l'adherència banda-corró pot arrossegar la banda en el sentit marcat per v .

Això ja es podria afirmar sense fer càlculs, atès que les dues masses als extrems són iguals (independentment del seu valor) i els dos angles abraçats són iguals, mentre que el límit d'adherència entre la banda i el corró tractor de la dreta és superior al coeficient de fricció de la banda sobre la superfície lliscant de l'esquerra.

- b. En el cas anterior (sentit de v), quin parell ha d'exercir el motor M_2 sobre el corró?

La tensió al punt D, F_D , ve determinada pel pes de la massa $m_2 = 4$ kg. La tensió al punt C, F_C , és igual a la tensió al punt B, F_B . Alhora, la tensió al punt B és 1,266 vegades la



tensió al punt A, $F_A = 39,24$ N (ja que és originada per la massa m_1 , també de 4 kg). Així doncs:

$$F_A = F_D = 4 \cdot 9,81 = 39,24,5 \text{ N}$$

$$F_B = F_A \cdot e^{\mu_1 \cdot \theta_1} = 39,24 \cdot 1,266 = 49,67 \text{ N} = F_C$$

El parell que haurà d'exercir el motor sobre la politja de mà dreta serà la diferència de tensions $F_C - F_D$, multiplicada per radi del corró:

$$M_1 = (F_C - F_D) \cdot \frac{d_c}{2} = (49,67 - 39,24) \cdot \frac{0,1}{2} = 0,521 \text{ N m}$$

Aquest parell té sentit del moviment i, per tant, és motor.

c. En el cas anterior (sentit de v), quina és la massa màxima m_3 que es pot col·locar sobre la banda sense que aquesta quedi retinguda i rellisqui el corró?

Aquesta situació correspon al cas en què l'adherència entre la banda i el corró està al límit. Aleshores, la tensió a C serà:

$$F_C = F_D \cdot e^{\mu_{03} \cdot \theta_3} = 39,24 \cdot 1,733 = 67,998 \text{ N}$$

Aquesta diferència de tensions vindrà donada per les forces de fricció que provoca la massa m_3 entre la banda i el suport central ($\mu_3 = 0,25$):

$$F_C - F_B = 67,998 - 49,666 = 18,332 \text{ N}$$

$$F_C - F_B = m_3 \cdot g \cdot \mu_3$$

$$m_3 = \frac{F_C - F_B}{g \cdot \mu_3} = \frac{18,332}{9,81 \cdot 0,25} = 7,475 \text{ kg}$$

d. En el cas anterior (punt 3), quines són les tensions als punts A, B, C i D de la banda?

Ja s'han calculat a l'apartat anterior:

$$F_A = 39,24 \text{ N} \qquad F_B = 49,66 \text{ N}$$

$$F_C = 68,00 \text{ N} \qquad F_D = 39,24 \text{ N}$$

e. Si el motor sobre el corró no té aplicat cap parell ($M_2 = 0$) i $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 2$ kg, quina és la massa màxima m_1 que hi podem penjar sense que la banda rellisqui?

En aquest cas, la banda tendria a relliscar en el sentit contrari a v .

Si el parell motor és nul i $m_2 = 4$ kg, aleshores $F_C = F_D = 39,24$ N.

Si $m_3 = 2$ kg, aleshores $\Delta F_{BC} = F_C - F_B = m_3 \cdot g \cdot \mu_3 = 2 \cdot 9,81 \cdot 0,25 = 4,905$ N.

La massa màxima m_1 per mantenir l'equilibri en el límit de la relliscada de la banda és:

$$F_D = F_C = 39,240 \text{ N}$$

$$F_B = F_C + \Delta F_{BC} = 39,240 + 4,905 = 44,145 \text{ N}$$

$$F_A = F_B \cdot e^{\mu_1 \theta_1} = 44,145 \cdot 1,266 = 55,874 \text{ N}$$

$$m_{1\max} = \frac{F_A}{g} = \frac{55,874}{9,81} = 5,696 \text{ kg}$$

→ 5



Dinàmica de màquines

Aquest darrer capítol també té com a referència l'assignatura Mecanismes i Màquines de la carrera d'Enginyeria Industrial Superior de l'ETSEIB per als alumnes d'intensificació mecànica, la qual, al seu torn, prové del desdoblament (segona part) de l'assignatura anual anterior, Cinemàtica i Dinàmica de Màquines.

En general, la dinàmica és la relació entre les forces i els moviments. Tanmateix, és bo distingir (vegeu *Disseny de màquines I. Mecanismes*, referenciat a la bibliografia) entre: *a*) la *cinetostàtica*, que estudia sistemes de forces relacionades amb els moviments estacionaris (entre ells, les transmissions de potència a través de cadenes d'accionament, que s'han analitzat al capítol 3 en parlar de la motorització de les màquines), i *b*) la *cinetodinàmica* (o dinàmica, en sentit estricte), que estudia els sistemes amb forces dinàmiques (o de D'Alembert) relacionades amb les masses sotmeses a moviments accelerats. És l'objecte d'aquest capítol.

Entre els diferents sistemes dinàmics de les màquines, ens han semblat especialment rellevants els següents: *a*) la dinàmica dels elements de les màquines en els moviments al pla; *b*) els règims transitoris d'acceleració i desacceleració en sistemes d'un grau de llibertat; *c*) els desequilibris en rotors i el seu equilibrament, i *d*) les màquines cícliques i els volants d'inèrcia.

L'any 2000, l'autor va publicar el text *Mecanismes i màquines I. Dinàmica de màquines* (referenciat a la bibliografia), que constitueix la base conceptual de les qüestions i dels exercicis d'aquest capítol.

El qüestionari de l'apartat 5.1 prové dels exàmens de l'assignatura Mecanismes i Màquines dels anys 2001 a 2012. Concretament, les qüestions 5.1.1 a 5.1.3, de l'examen de gener del 2001; de la 5.1.4 a la 5.1.6, de gener del 2002; de la 5.1.7 a la 5.1.9, de gener del 2003; la 5.1.10 i la 5.1.11, de gener del 2004; la 5.1.12 i la 5.1.13, de gener del 2005; de la 5.1.14 a la 5.1.16, de gener del 2006; de la 5.1.17 a la 5.1.20, de gener del 2007; de la 5.1.21 a la 5.1.24, de gener del 2008; de la 5.1.24 a la 5.1.28, de gener del 2009; de la 5.1.29 a la 5.1.32, de gener del 2010, i de la 5.1.33 a la 5.1.35, de gener del 2011.

Finalment, els exercicis de l'apartat 5.1 provenen dels exàmens de l'assignatura Mecanismes i Màquines dels anys 2001 a 2012. Concretament, l'exercici 5.2.1, de l'examen



de gener del 2001; el 5.2.2 i el 5.2.3, de gener del 2002; el 5.2.4, de gener del 2003; el 5.2.5, de gener del 2004; el 5.2.6, de gener del 2005; el 5.2.7, de gener del 2006; el 5.2.8 i el 5.2.9, de gener del 2007; el 5.2.10 i el 5.2.11, de gener del 2008; el 5.2.12 i el 5.2.13, de gener del 2009; el 5.2.14 i el 5.2.15, de gener del 2010; el 5.2.16, de gener del 2011, i el 5.2.17 i el 5.2.18, de gener del 2012.

5.1 Dinàmica de màquines: qüestionari

1. En una roda d'automòbil, convé fer un equilibrament estàtic o dinàmic? I en una roda de bicicleta?

Les rodes d'automòbil d'avui dia són prou amples perquè sigui recomanable fer-hi un equilibrament dinàmic en dos plans (que generalment coincideixen amb les vores interior i exterior de les llantes).

Les rodes de bicicleta són tan primes que tan sols caldria fer-hi un equilibrament estàtic en un pla (en general, no s'equilibren, atesa la seva velocitat, relativament baixa en comparació amb les rodes d'un automòbil).

2. Seguint amb el model d'anàlisi dels desequilibris d'un motor alternatiu, una massa amb moviment alternatiu sinusoidal dona lloc a forces d'inèrcia primàries? I a forces d'inèrcia secundàries? Raoneu la resposta

Si la massa té un moviment alternatiu sinusoidal, la seva descomposició en sèrie de Fourier tan sols té la freqüència fonamental; per tant, en el model d'anàlisi dels motors alternatius, tan sols tindria forces d'inèrcia primàries, mentre que les forces d'inèrcia secundàries serien nul·les.

3. Definiu el centre d'oscil·lació i el centre de percussió d'un cos físic que es mou amb moviment pla. Per a un cos donat, el centre d'oscil·lació és únic? I el centre de percussió?

Si se suspèn un cos rígid pla (o dinàmicament pla) per un determinat punt (centre d'oscil·lació), el centre de percussió és aquell que, en aplicar-hi una força (o una percussió), no provoca reacció sobre el punt d'oscil·lació.

El centre d'oscil·lació i el centre de percussió són conjugats respecte al centre de masses del cos, i la constant és el quadrat del radi de gir del cos respecte al seu centre de masses.

Per tant, es pot elegir arbitràriament el centre d'oscil·lació, però aleshores el centre de percussió queda determinat. O, viceversa, es pot elegir arbitràriament el centre de percussió, però aleshores el centre d'oscil·lació queda determinat.

4. Significa el mateix un grau de qualitat d'equilibrament de $G 6,3$ per a un rotor que gira a 1.000 min^{-1} que per a un altre rotor que gira a 5.000 min^{-1} ?

La mesura del grau de qualitat d'equilibrament és la velocitat tangencial del centre de masses del rotor a causa de l'excentricitat, en mm/s. Per tant, com més elevada és la velocitat angular del rotor, més petita és l'excentricitat admissible per a un mateix grau d'excentricitat.

En aquest cas, és $v_{Gm\grave{a}x} = e \cdot \omega \leq 6,3$ mm. Per tant, l'excentricitat admissible per al rotor que gira a $1.000 \text{ min}^{-1} = 104,72 \text{ rad/s}$ és $e = 6,3/104,72 = 0,060$ mm, mentre que l'excentricitat admissible per al rotor que gira a $5.000 \text{ min}^{-1} = 523,60 \text{ rad/s}$ és $e = 6,3/523,60 = 0,012$ mm.

5. Què cal fer per minimitzar el moment d'inèrcia d'un rotor en un procés d'equilibrament d'un rotor rígid?

Un rotor rígid es pot equilibrar totalment en dos plans, *A* i *B*, a partir de calcular els productes ($m_A \cdot e_A$) i ($m_B \cdot e_B$), orientats convenientment. En materialitzar aquests contrapesos, es pot optar per unes masses més petites, situades a una excentricitat més gran, o bé per unes masses més grans, situades a una excentricitat més petita.

Els increments de moment d'inèrcia que afegiran al sistema aquestes masses puntuals són, respectivament, ($m_A \cdot e_A^2$) i ($m_B \cdot e_B^2$). Per tant, com més petites siguin les excentricitats, més petit serà l'increment de moment d'inèrcia. Això fa que les masses equilibradores siguin més grans.

6. En un sistema format per un motor d'explosió (parell molt irregular), un reductor d'engranatges de $i = 3$ i un generador elèctric (parell força regular), entre quins elements del sistema situaríeu un volant d'inèrcia?

La situació del volant d'inèrcia en una cadena cinemàtica té dos efectes diferents: *a*) determina el valor del moment d'inèrcia del volant en funció de la velocitat de l'eix; *b*) fa un efecte de filtre entre els elements més sensibles (per exemple, els engranatges) i les fonts de sotragades (en aquest cas, el motor d'explosió).

En funció de l'enunciat del problema, es té: *a*) atenent la velocitat més alta, convé situar el volant a l'eix del motor (el volant serà $i^2 = 3^2 = 9$ vegades més petit que si se situa a l'eix del generador); *b*) atenent la funció de filtre de sotragades, cal situar-lo entre el motor (font de sotragades) i el reductor d'engranatges (element més sensible). En aquesta aplicació, tots dos criteris condueixen a la mateixa recomanació.

7. Quin grau de qualitat d'equilibrament màxim d'una roda de 600 mm de diàmetre i de 8 kg de massa d'un vehicle que pot circular a 180 km/h i que s'equilibra amb masses de 5 g (o múltiples) situades a la perifèria de la llanta de 400 mm de diàmetre?

Velocitat angular de la roda

La velocitat del vehicle ($v_{vehicle} = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$) correspon a la velocitat angular de les rodes:

$$\omega_{roda} = \frac{v_{vehicle}}{d_{roda} / 2} = \frac{50}{0,6 / 2} = 166,67 \text{ rad/s} = 1.591,5 \text{ min}^{-1}$$

Excentricitat màxima amb la roda equilibrada

L'error de mesurament màxim del desequilibri serà $m_e = 5$ g a una excentricitat $e_e = 200$ mm (el diàmetre de la llanta és de 400 mm). Per tant, el valor del producte és $m_e \cdot e_e = 0,005 \cdot 0,2 = 0,001$ kg·m. Si es considera la massa de la roda $m_r = 8$ kg (es negligeixen



els valors de les masses d'equilibrament), l'excentricitat del conjunt de la roda és $e_r = (m_e \cdot e_e)/m_r = 0,001/8 = 0,000125 \text{ m} = 0,125 \text{ mm}$.

Grau de qualitat d'equilibrament

En aquest cas, és $v_{Gm\acute{a}x} = e_r \cdot \omega_r = 0,125 \cdot 166,67 = 20,83 \text{ mm/s}$. Per tant, el grau de qualitat d'equilibrament és de G40 (és més restrictiu que el que s'exigeix a la pràctica).

8. Cada pala d'un rotor pesa 12 kg i el centre de masses es troba a 0,8 m del centre de gir. Es demana: Quin és el desequilibri (producte $m \cdot e$) d'una pala? Quin és el desequilibri que es produeix quan es desprèn una pala d'un rotor de tres pales? I d'un rotor de cinc pales?

Desequilibri ($m \cdot e$) d'una pala

El desequilibri d'una pala és: $m_p \cdot e_p = 12 \cdot 0,8 = 9,6 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Pèrdua d'una pala en un rotor de tres pales

Si es perd una pala, el desequilibri en el rotor és el que correspon a una pala. Les altres dues pales produeixen el desequilibri equivalent a la pala que falta.

Pèrdua d'una pala en un rotor de cinc pales

El resultat i l'argumentació són els mateixos que en el cas anterior.

9. Quin grau d'irregularitat té un sistema amb energia cinètica constant i un moment d'inèrcia reduït sobre l'eix principal que durant el cicle oscil·la entre $J_{m\acute{a}x} = 0,85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ i $J_{m\acute{i}n} = 0,78 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$? Tindria influència sobre el grau d'irregularitat afegir un volant d'inèrcia?

Valor del grau d'irregularitat

A partir de la definició del grau d'irregularitat i de la relació entre la velocitat màxima i la mínima (en igualar les energies cinètiques en aquests dos estats) en un sistema amb variacions de moment d'inèrcia però amb energia constant:

$$\delta = 2 \cdot \frac{\omega_{m\acute{a}x} - \omega_{m\acute{i}n}}{\omega_{m\acute{a}x} + \omega_{m\acute{i}n}} \quad \frac{\omega_{m\acute{a}x}}{\omega_{m\acute{i}n}} = \sqrt{\frac{J_{m\acute{a}x}}{J_{m\acute{i}n}}}$$

s'obté l'expressió següent i el valor per al grau d'irregularitat d'aquest cas:

$$\delta = 2 \cdot \frac{\omega_{m\acute{a}x} - \omega_{m\acute{i}n}}{\omega_{m\acute{a}x} + \omega_{m\acute{i}n}} = 2 \cdot \frac{\frac{\omega_{m\acute{a}x}}{\omega_{m\acute{i}n}} - 1}{\frac{\omega_{m\acute{a}x}}{\omega_{m\acute{i}n}} + 1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{J_{m\acute{a}x}}{J_{m\acute{i}n}}} - 1}{\sqrt{\frac{J_{m\acute{a}x}}{J_{m\acute{i}n}}} + 1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{0,85}{0,78}} - 1}{\sqrt{\frac{0,85}{0,78}} + 1} = 0,0215$$

Influència d'afegir un volant

Un volant addicional faria que els dos valors (màxim i mínim) del moment d'inèrcia augmentessin, per la qual cosa el quocient entre aquests valors disminuiria, com també el grau d'irregularitat.

10. Es pot equilibrar: a) un rotor rígid?; b) un rotor flexible? En cada un dels dos casos, hi ha alguna limitació?

- a. Un rotor rígid es pot equilibrar totalment (estàticament i dinàmicament) amb dues masses, situades en dos plans diferents normals a l'eix. L'equilibrament val per a totes les velocitats, excepte per a les velocitats elevades, en què ens aproximem a la condició de rotor flexible.
- b. Un rotor flexible es pot equilibrar amb diverses masses (equilibrament estàtic i dinàmic) per a cadascuna de les velocitats de funcionament, però l'equilibri obtingut per a una d'elles no és vàlid per a una altra velocitat. Per tant, l'equilibratge en un rotor flexible no és adequat per a aplicacions que canvien continuament de règim de velocitat.

11. Un automòbil es mou a 36 km/h (10 m/s). La massa reduïda del sistema al centre de masses del propi vehicle és: a) més gran quan té connectada la marxa més reductora (primera marxa)?; b) més gran quan té connectada la marxa menys reductora (cinquena marxa)?; c) igual per a totes les marxés?

La massa reduïda del sistema automòbil al centre de masses del vehicle s'obté, en funció de les inèrcies de tots els seus eixos (J_p , moment d'inèrcia del motor + embragatge + eix primari del canvi, eix angular, p ; J_s , eix secundari del canvi, eix angular, s ; eix diferencial i rodes, eix angular, d ; vehicle, eix lineal, v), i de les relacions de transmissió corresponents:

$$i_{dv} = \frac{\omega_p}{v_v} = \frac{2}{d_{roda}} \quad i_{sv} = \frac{\omega_s}{v_v} = \frac{\omega_s}{\omega_p} \cdot i_{dv} = i_{sp} \cdot i_{pv} \quad i_{pv} = \frac{\omega_p}{\omega_s} \cdot i_{sv} = i_{marxes} \cdot i_{sv}$$

$$m_{tot(v)} = m_v + J_d \cdot i_{dv}^2 + J_s \cdot i_{sv}^2 + J_p \cdot i_{marxa}^2 \cdot i_{sv}^2$$

Les relacions de transmissió i_{dv} i i_{sv} són independents de la marxa del canvi, mentre que la relació i_{marxa} pren un valor diferent per a cadascuna de les marxés, més elevat com més reductora és aquella.

Per tant, el valor més elevat de la massa total reduïda a l'eix lineal del vehicle correspon a la primera marxa: $i_{marxa} = i_{primera}$

12. Què és el grau de qualitat d'equilibrament? Per a quina velocitat es defineix?

És la velocitat tangencial del centre de masses d'un rotor, és a dir, el producte de l'excentricitat e per la velocitat angular ω .

No es defineix per a cap velocitat. Un mateix rotor tindrà un grau de qualitat d'equilibrament més baix a velocitat baixa i més alt a velocitat alta.

13. Si una peça quadrada plana ($J_G = m \cdot a^2/6$; a : la longitud del costat) es descompon en masses puntuals i una d'elles se situa en un vèrtex, on caldrà situar l'altra? Quins valors tindran les masses?

És fàcil d'establir:



$$i_G^2 = \frac{J_G}{m} = \frac{a^2}{6} \quad x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,7071 \cdot a \quad x_2 = \frac{i_G^2}{x_1} = \frac{a^2/6}{a/\sqrt{2}} = 0,2357 \cdot a$$

$$m_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \cdot m = \frac{0,2357 \cdot a}{0,7071 \cdot a + 0,2357 \cdot a} \cdot m = 0,25 \cdot m \quad m_2 = 0,75 \cdot m$$

- 14. Per equilibrar un rotor rígid, cal col·locar dues masses m a una excentricitat e en dos plans, A i B. Com dissenyaríeu les masses equilibradores per minimitzar la massa del rotor equilibrat? I per minimitzar-ne el moment d'inèrcia?**

Per equilibrar un rotor rígid, cal assegurar el valor del producte $m \cdot e$ en dos plans, A i B, perpendiculars a l'eix de gir. Tanmateix, se'n pot dissenyar una massa de valor més gran, situada a una excentricitat més petita, o viceversa. Per tant:

- a. *Per minimitzar la massa*

Convé dissenyar unes masses petites, col·locades a una excentricitat gran.

- b. *Per minimitzar el moment d'inèrcia*

Convé dissenyar unes masses grans, col·locades a una excentricitat petita, ja que el moment d'inèrcia depèn del quadrat de les excentricitats:
 $J = J_0 + m_A \cdot e_A^2 + m_B \cdot e_B^2$.

- 15. Un rotor de 8 kg de massa que gira a 1.200 min^{-1} ha estat equilibrat amb un grau de qualitat d'equilibrament de G40. Quina és la força màxima de desequilibri del rotor?**

El grau de qualitat d'equilibrament assenjala la màxima velocitat del centre de masses del rotor ($V_G = 0,040 \text{ m/s}$) per a la velocitat angular de l'equilibrament ($\omega = 1.200 \text{ min}^{-1} \cdot \pi / 30 = 125,664 \text{ rad/s}$). Per tant, l'excentricitat del rotor, en aquest cas, és:

$$e = V_G / \omega = 0,040 \text{ (m/s)} / 125,664 \text{ (rad/s)} = 0,000318 \text{ m}$$

La força d'inèrcia màxima de desequilibri és, doncs:

$$F_I = m \cdot e \cdot \omega^2 = 8 \cdot 0,000318 \cdot 125,664^2 = 40,212 \text{ N}$$

- 16. El grau d'irregularitat d'un sistema amb moment d'inèrcia constant cíclic és de $\delta = 0,1$ a una velocitat angular mitjana de l'eix principal de $\omega_{mP} = 150 \text{ rad/s}$. Quin és el nou grau d'irregularitat si la velocitat angular mitjana baixa a $\omega_{mP} = 120 \text{ rad/s}$ amb els mateixos paràmetres del sistema?**

A partir del càlcul simplificat del grau d'irregularitat en funció de la variació d'energia al llarg del cicle ΔE_c , del moment d'inèrcia total J_T i de la velocitat mitjana ω_m , per a la situació inicial i la final, es pot obtenir una relació entre els graus d'irregularitat i les velocitats mitjanes.

A partir d'aquesta relació, l'obtenció del nou grau d'irregularitat és directa:

$$\delta_1 = \frac{\Delta E_c}{J_T \cdot \omega_{m1}^2}; \quad \delta_2 = \frac{\Delta E_c}{J_T \cdot \omega_{m2}^2}; \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\omega_{m2}^2}{\omega_{m1}^2}; \quad \delta_2 = \delta_1 \cdot \frac{\omega_{m1}^2}{\omega_{m2}^2} = 0,1 \cdot \frac{150^2}{120^2} = 0,15625$$



17. L'equilibrament d'una roda d'automòbil és estàtic o dinàmic?

Avui dia, les rodes d'automòbil són prou amples perquè convingui equilibrar-les en dos plans. Per tant, és un equilibrament dinàmic (força desequilibrada i parell desequilibrat).

18. En quin cas la reducció de paràmetres a un eix (moments i forces, masses i moments d'inèrcia) permet aplicar directament la segona llei de Newton? Poseu un exemple.

La reducció de paràmetres a un eix depèn de les relacions de velocitats entre els eixos de la màquina. Si aquestes són constants, la inèrcia reduïda (massa o moment d'inèrcia) és constant (no depèn de la posició) i permet aplicar directament la segona llei de Newton.

En un aerogenerador, les relacions de velocitats entre l'eix motor (l'eòlica) i l'eix receptor (el generador) són constants (es relacionen per mitjà d'un multiplicador) i, per tant, s'hi pot aplicar la segona llei de Newton, amb els paràmetres reduïts.

19. Quan cal limitar la massa d'un mecanisme, és més favorable situar un volant a l'eix ràpid o a l'eix lent del sistema?

El moment d'inèrcia del volant necessari serà i^2 ($i > 1$), més alt si se situa a l'eix lent que a l'eix ràpid. La massa creix, en general, amb el moment d'inèrcia del volant; per tant, si es vol limitar la massa del sistema, és preferible situar el volant en l'eix ràpid.

20. Quina diferència hi ha entre invertir el sentit del moviment i invertir el flux de potència? Poseu-ne un exemple.

Invertir el sentit del moviment és canviar el signe de la velocitat de tots els eixos d'un mecanisme o màquina. Invertir el flux de potència és canviar la funció motora o receptora dels eixos d'un mecanisme o màquina: fer que l'eix motor passi a ser l'eix receptor, i viceversa.

Exemple de l'automòbil: *Invertir el sentit del moviment*. Passar d'anar endavant a anar enrere. *Invertir el flux de potència*. Passar de ser el motor que arrossega el vehicle (pla, pujada, acceleració) a ser el vehicle que arrossega el motor (baixada, frenada).

21. El moviment de suspensió d'una roda d'automòbil quan circula en línia recta (puja i baixa respecte a la carrosseria) produeix efectes giroscòpics?

No, perquè l'eix de la roda no modifica la seva direcció (es mou paral·lelament). Els moviments giroscòpics es manifesten quan es varia la direcció de l'eix d'un rotor que gira a velocitat elevada.

22. Si s'equilibra un rotor flexible amb un grau de precisió extraordinàriament elevat, s'elimina la velocitat crítica? I si s'aconsegueix un equilibrament perfecte?

No. La velocitat crítica d'un eix flexible no depèn del grau d'equilibrament de l'eix. La diferència de comportament entre un eix molt desequilibrat i un eix molt ben equilibrat



és que, en el primer, els efectes de la inestabilitat seran ja molt més perceptibles a velocitats més allunyades de la crítica.

En la velocitat crítica, independentment del grau d'equilibrament del rotor, tots els eixos són igualment inestables.

23. Sabent que un rotor rígid té una massa de 5 kg i que el centre de masses està desplaçat 0,2 mm de l'eix de gir, es pot definir el grau d'equilibrament del rotor G_{xx} ?

No. El grau d'equilibrament es defineix a partir de la velocitat lineal del centre de masses; per tant, depèn de l'excentricitat (0,2 mm, en aquest cas) i de la velocitat de rotació (desconeguda en aquest cas); en canvi, no cal conèixer-ne la massa.

24. Definiu què caracteritza els règims transitoris d'una màquina cíclica

Els règims transitoris d'una màquina cíclica són aquells en què la velocitat del sistema a l'inici d'un cicle és diferent (més alta o més baixa) a la del cicle anterior. Això significa que l'energia que el sistema motor proporciona al sistema durant el cicle és major (règim d'acceleració) o menor (règim de frenada) que l'energia absorbida pel sistema receptor durant el mateix cicle.

25. L'excentricitat del centre de masses d'un rotor respecte de l'eix de gir és de 0,3 mm. Quin és el seu grau de qualitat d'equilibrament?

No es pot determinar, ja que també depèn de la velocitat angular del rotor.

26. Un rotor format per un arbre d'acer de diàmetre $d = 10$ mm i longitud $L = 400$ mm entre suports, amb una massa puntual d'1 kg al seu centre és un rotor flexible?

Tot rotor pot tenir la consideració de rígid o flexible en funció de la relació entre la velocitat angular de gir i la seva velocitat crítica.

Amb les dades de l'enunciat, es pot calcular la velocitat crítica però, en no donar-se cap indicació sobre la seva velocitat de gir, no se'n pot establir ni la consideració de rígid o ni la de flexible.

Atès que s'han donat les característiques del rotor, se'n pot avaluar la velocitat crítica. La deformació lateral δ d'una biga circular amb una massa al seu centre és:

$$\delta = \frac{m \cdot g \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad I = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$\delta = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{m \cdot g \cdot L^3}{E \cdot d^4} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{19,810,4^2}{(2,1 \cdot 10^{11}) \cdot 0,01^4} = 0,000063 \text{ m} = 0,063 \text{ mm}$$

Segons Rayleigh-Ritz (*Mecanismes i màquines III. Dinàmica de màquines*, p. 40), la fórmula simplificada per calcular la velocitat crítica en un eix amb una massa concentrada és:



$$\omega_c = \sqrt{g / \delta} = \sqrt{9,81 / 0,000063} = 393,2 \text{ rad / s} = 3.755 \text{ min}^{-1}$$

És a dir, aquest rotor es comportarà com a rígid fins al 70 % de la seva velocitat crítica, aproximadament ($0,7 \cdot 3.755 = 2.629 \text{ min}^{-1}$), i es comportarà com un rotor flexible per damunt d'aquesta velocitat. Si es fa girar a la velocitat de 3.755 min^{-1} , entrarà en la inestabilitat de la velocitat crítica i, en un temps molt breu, es deformarà fins a la ruptura.

27. En quins casos la massa reduïda d'un sistema és constant?

Ho és quan totes les relacions de velocitats són constants (engranatges, rodes de fricció, cadenes, corretges, transmissió cargol-femella, pla inclinat, entre d'altres).

També la massa reduïda es pot considerar aproximadament constant en els casos següents:

- a. *Sistemes vibratoris amb petites amplituds d'oscil·lació.* Aleshores, el terme de la derivada de la massa respecte a la posició (multiplicat per la velocitat al quadrat) es pot menystenir, ja que la velocitat és molt petita (proporcional a l'amplitud).
- b. *Sistemes on la variació de la massa reduïda és molt petita en relació amb el seu valor total.* En aquests casos, es pot aproximar la massa reduïda a un valor constant que sigui el valor mitjà al llarg del cicle o la semisuma dels valors extrems de massa reduïda.

28. Un robot industrial és una màquina cíclica? Justifiqueu-ho

Els moviments d'un robot industrial són realitzats per un conjunt de motors que mouen a voluntat el sistema a cada moment, amb l'objectiu de fer-hi moviments contínuament variables.

A les màquines cícliques, hi ha una seqüència de moviments i d'estats d'energia que es repeteix a cada cicle. Per tant, un robot és una màquina pensada perquè pugui no ser cíclica i l'energia cinètica no fa la funció d'acumulador en la transferència de potència entre el motor i el receptor.

29. Si el grau de qualitat d'equilibrament d'un rotor és G40 quan gira a la velocitat de 1.000 min^{-1} , quin grau de qualitat d'equilibrament tindrà si gira a 2.000 min^{-1} ?

El grau de qualitat d'equilibrament és proporcional a la velocitat a què gira el rotor. Per tant, per a una velocitat doble, el grau de qualitat d'equilibrament serà G100, més bast (la norma ISO 1940:1973 no contempla el grau de qualitat d'equilibrament G80).

30. Qualsevol punt d'un cos que es mou amb un moviment pla pot ser el centre de percussió? I el centre d'oscil·lació? En tot cas, quina condició (o condicions) han de complir aquests centres?

Sí. Qualsevol punt d'un cos que es mou amb un moviment pla pot ser el centre de percussió, sempre que el centre d'oscil·lació corresponent sigui l'adequat. I, viceversa.



Si s'articula un cos per un centre d'oscil·lació O i se'l percudeix pel corresponent centre de percussió P, en la direcció perpendicular a OP, l'articulació del centre de percussió no rep cap reacció (els papers es poden intercanviar: $P'=O$; $O'=P$).

El centre de percussió P i el centre d'oscil·lació O són dos punts conjugats. La línia OP que els uneix ha de passar pel centre de masses G i les seves distàncies al centre de masses són conjugades en relació amb el radi de gir, i_G :

$$OG \cdot PG = \frac{J_G}{m} = i_G^2$$

31. En quins casos es pot aplicar l'equació de la dinàmica expressada en paràmetres reduïts: $F_R = m_R \cdot a_R$?

Es pot aplicar sempre que les relacions de velocitats entre els diferents eixos del sistema siguin constants. Aleshores, la massa reduïda és constant i desapareix el terme de derivada de la massa respecte al temps de l'equació general:

$$F_R = m_R \cdot a_R + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_R}{dx_R} \cdot v_R^2 \quad \text{si tot } i_{jk} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{dm_R}{dx_R} = 0$$

32. És el mateix situar un volant en un eix o un altre (motor, receptor, intermedi) d'una cadena cinemàtica? Quines conseqüències té?

La situació del volant d'inèrcia en un eix o un altre d'una cadena cinemàtica té dues conseqüències importants:

- a. Per a un mateix efecte en la inèrcia reduïda del sistema, el valor del moment d'inèrcia del volant varia inversament al quadrat de la seva velocitat angular.
- b. El volant situat entre dos elements d'una cadena cinemàtica, R i S, aïlla les irregularitats i les sotragades entre ells, mentre que, si se situa darrere de S (o de R), amplifica les irregularitats transmeses de R a S (o de S a R).

33. Quin dels rotors següents tenen més perill de velocitat crítica: l'eix d'una batedora domèstica?; un cargol de boles?; l'eix de roda d'una bicicleta?

El perill de velocitat crítica es dona en eixos llargs i prims, i/o amb suports que permeten grans flexions laterals. En els casos esmentats:

Batedora domèstica: No. Tot i tenir un eix llarg i prim, la batedora domèstica té un suport proper a l'hèlice que n'allunya el perill de velocitat crítica.

Cargol de boles: Sí. Els cargols de boles llargs tenen el perill de velocitats crítiques per a valors relativament baixos.

Eix de roda de bicicleta: No. L'eix d'una roda de bicicleta no gira. És la roda que gira sobre ell. Per tant, no pot tenir velocitat crítica.

34. Es pot aplicar l'equació de la dinàmica expressada en paràmetres reduïts ($F_R = m_R \cdot a_R$) per tal d'avaluar l'acceleració i el temps d'arrencada d'una màquina?

Sí. Es pot aplicar sempre que les relacions de velocitats entre els diferents eixos del sistema siguin constants. Aleshores, la massa reduïda és constant i desapareix el terme de derivada de la massa respecte al temps de l'equació general:

$$F_R = m_R \cdot a_R + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_R}{dx_R} \cdot v_R^2 \quad \text{si tot } i_{jk} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{dm_R}{dx_R} = 0$$

35. El grau d'irregularitat augmenta o disminueix amb la velocitat del sistema?

El grau d'irregularitat és inversament proporcional a la velocitat mitjana de l'eix principal del sistema. Per tant, disminueix amb la velocitat del sistema:

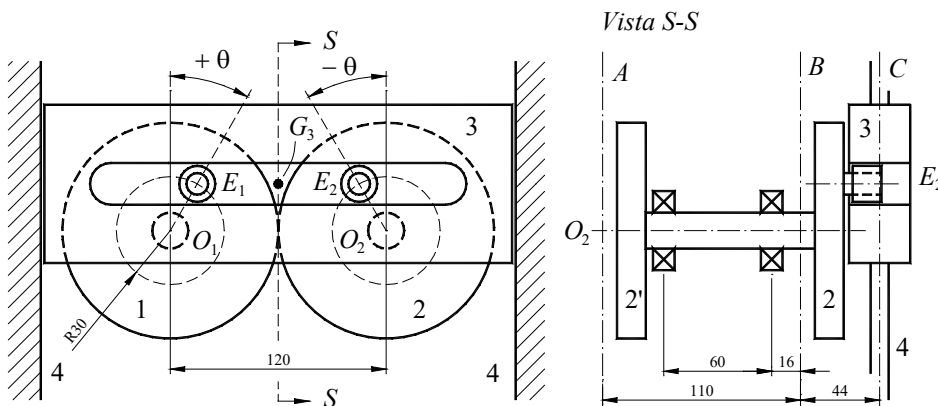
$$\delta = \frac{\Delta E_A}{J_p \cdot \omega_p^2}$$

5.2 Dinàmica de màquines: exercicis

5.2.1 Equilibrament d'un mecanisme

En el mecanisme de la figura adjunta, els membres iguals, 1 i 2, giren amb moviments simètrics gràcies a un engranatge de relació de transmissió $i = 1$ i, a través dels corrons E_1 i E_2 , obliguen el membre 3 a fer un moviment alternatiu.

Les dades del sistema són: *Membres 1 i 2*: diàmetres d'engranament: $d_1 = d_2 = 120$ mm; velocitats angulars: $\omega_1 = \omega_2 = 250$ min⁻¹; masses: $m_1 = m_2 = 1,75$ kg (acer; els centres de masses coincideixen amb els punts O_1 i O_2 ; no es tenen en compte les masses dels corrons); excentricitats dels corrons E_1 i E_2 : $O_1E_1 = O_2E_2 = 30$ mm; moments d'inèrcia respecte a l'eix de rotació: $J_{O1} = J_{O2} = 0,0035$ kg·m²; *membre 3*: massa: $m_3 = 0,75$ kg (alumini; el centre d'inèrcia s'indica al dibuix).



Es demana:

a. Moment d'inèrcia reduït del mecanisme (sense equilibrar) a l'eix O_1



Hi ha tres membres mòbils: 1, 2 i 3. Els membres 1 i 2 tenen la mateixa velocitat (tot i que de sentits contraris), mentre que el membre 3 es mou amb un moviment alternatiu sinusoidal que, quan l'angle és $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, la velocitat és nul·la, mentre que, quan $\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ$, la velocitat és màxima (avall o amunt) i coincideix amb la velocitat tangencial dels corrons:

L'equació del moment d'inèrcia reduït a l'eix O_1 és:

$$v_{G3} = \omega_1 \cdot O_1E_1 = \omega_2 \cdot O_2E_2 = \omega_1 \cdot 0,030 \text{ m/s}$$

$$J_{O1(R)} = J_1 + J_2 \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{v_{G3}}{\omega_1}\right)^2$$

Per a $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, $v_{G3} = 0$, i el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix O_1 és mínim i val:

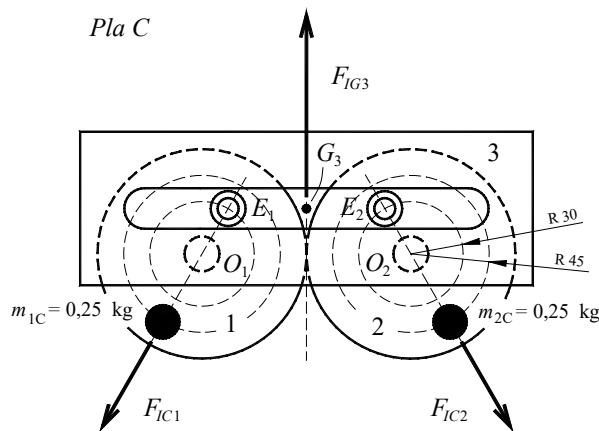
$$J_{O1(R)\min} = J_1 + J_2 \cdot 1^2 = 0,0035 + 0,0035 = 0,0070 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Per a $\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ$, $v_{G3} = \omega_1 \cdot 0,030$, i el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix O_1 és màxim i val:

$$\begin{aligned} J_{O1(R)\max} &= J_1 + J_2 \cdot 1^2 + m_3 \cdot 0,030^2 = 0,0035 + 0,0035 + 0,75 \cdot 0,030^2 = \\ &= 0,007675 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

b. *Equilibreu en la mesura que sigui possible el mecanisme amb masses solidàries als membres 1 i 2 (excentricitat de 45 mm), situades al pla C (constructivament, aquesta solució no és possible ja que interferiria amb el moviment de la corredora)*

En menystenir les masses dels corrons, E_1 i E_2 , els rotors 1 i 2 es consideren equilibrats. La corredora 3, en tenir un moviment sinusoidal, origina una força d'inèrcia també sinusoidal (equivalent a les forces d'inèrcia primàries) de la mateixa freqüència angular que la velocitat angular dels rotors.



Atès que existeixen dos rotors simètrics amb moviments de sentits contraris, és fàcil equilibrar el sistema a partir de dos contrapesos fixats simètricament sobre aquests rotors.

Les masses dels contrapesos, fixades sobre cadascun dels rotors amb una excentricitat de 45 mm), m_{1C} i m_{2C} , es col·loquen en sentit oposat al dels corrons E_1 i E_2 , i cadascun d'ells equilibra la meitat de la massa de la corredora:

$$m_{1C} = m_{2C} = \frac{(m_3 / 2) \cdot O_1 E_1}{e_{eq}} = \frac{(0,75 / 2) \cdot 0,030}{0,045} = 0,25 \text{ kg}$$

c. *Substituiu les masses calculades a l'apartat anterior en el pla C per masses situades als plans A i B (aquesta nova solució és constructivament possible)*

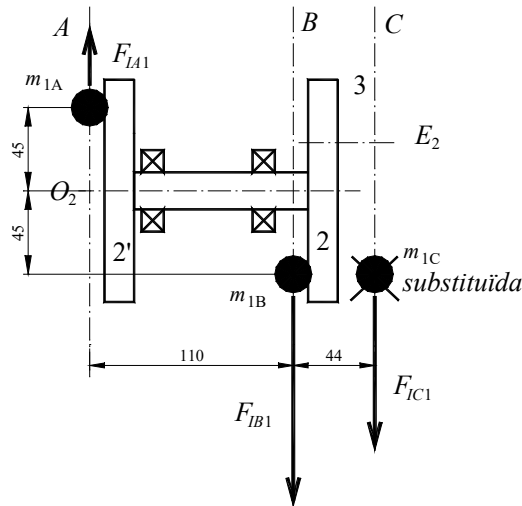
Per fer constructivament viables els contrapesos en els dos rotors, se substitueixen les masses m_1 i m_2 situades al pla C per altres quatre masses (dues a cada rotor), situades als plans A i B, sobre els mateixos plans diametral determinats pels punts $O_1 E_1$ i $O_2 E_2$, respectivament.

S'estudia tan sols aquesta substitució per al rotor 1, atès que, per al rotor 2 es faria exactament igual. Se suposa que tots els contrapesos se situen a 45 mm de l'eix del rotor, per la qual cosa les forces d'inèrcia són proporcionals a les masses:

$$F_{IA1} = \frac{44}{110} \cdot F_{IC1} \qquad F_{IB1} = \frac{110 + 44}{110} \cdot F_{IC1}$$

$$m_{1A} = \frac{44}{110} \cdot m_{1C} = 0,4 \cdot m_{1A} = 0,1 \text{ kg} \qquad m_{1B} = \frac{110 + 44}{110} \cdot m_{1C} = 1,4 \cdot m_{1C} = 0,35 \text{ kg}$$

La situació d'aquestes masses és la que es mostra a la figura següent:



d. *Nou moment d'inèrcia reduït a l'eix O_1 del mecanisme equilibrat. Quin és el percentatge d'increment del moment d'inèrcia causat per les masses equilibradores?*

Respecte al moment d'inèrcia inicial, s'hi han afegit els efectes de les quatre masses m_{1A} , m_{1B} , m_{2A} i m_{2B} . El nou moment d'inèrcia reduït del sistema és:



$$J_{O_1(R)} = J_1 + J_2 \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{v_{G3}}{\omega_1}\right)^2 + (m_{1A} + m_{1B} + m_{2A} + m_{2B}) \cdot \left(\frac{v_{Gm1A}}{\omega_1}\right)^2$$

Per a $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$, $v_{G3} = 0$ i $v_{Gm1A} = 0,045 \cdot \omega_1$; el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix O_1 és mínim i val:

Per a $\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ$, $v_{G3} = \omega_1 \cdot 0,030$, i $v_{Gm1A} = 0,045 \cdot \omega_1$; el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix O_1 és màxim i val:

$$\begin{aligned} J_{O_1(R)\min} &= J_1 + J_2 \cdot 1^2 + (2 \cdot m_{1A} + 2 \cdot m_{1B}) \cdot 0,045^2 = \\ &= 0,003500 + 0,003500 + 0,001823 = 0,008823 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{O_1(R)\max} &= J_1 + J_2 \cdot 1^2 + (2 \cdot m_{1A} + 2 \cdot m_{1B}) \cdot 0,045^2 + m_3 \cdot 0,030^2 = \\ &= 0,003500 + 0,003500 + 0,001823 + 0,000675 = 0,009498 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

5.2.2 Automòbil de joguina amb volant d'inèrcia

La figura mostra un automòbil de joguina amb un volant d'inèrcia (anàleg al problema IIIR-8), amb les característiques següents:

- Massa del vehicle $m_V = 0,240 \text{ kg}$
- Distància entre eixos (o batalla): $AB = 60 \text{ mm}$
- Distància longitudinal entre l'eix del davant i el centre de masses de l'automòbil: $AG = 40 \text{ mm}$
- Diàmetre de les rodes: $d_R = 18 \text{ mm}$
- Relació de multiplicació entre les rodes i el volant d'inèrcia: $i_{RV} = 1/8$
- Coefficient de fricció entre les rodes i el terra: $\mu = 0,65$
- Moment d'inèrcia de cada roda: $J_R = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Moment d'inèrcia del volant: $J_V = 8 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$



Es demana:

a. Si el vehicle és retingut per una paret fent contacte a l'altura de 10 mm, quina és la força que exerceix contra la paret mentre les rodes rellisquen?

Cal determinar l'equilibri de forces sobre el vehicle, que són: 1) reacció vertical del terra sobre les rodes lliures del davant, R_A ; 2) reacció vertical del terra sobre les rodes tractores del darrere, R_B ; 3) reacció tangencial del terra sobre les rodes tractores del darrere, T_B ; atès que, quan el vehicle és retingut per la paret, les rodes rellisquen, aquesta força tangencial és $T_B = \mu \cdot R_B = 0,65 \cdot R_B$; 4) pes del vehicle aplicat al centre d'inèrcia G , $F_G = m \cdot g = 0,24 \cdot 9,81 = 2,354$ N, i 5) força horitzontal de contacte entre l'automòbil i la paret, F_C .

Per tant, hi ha tres variables independents que han de complir les tres equacions d'equilibri del vehicle en el pla del dibuix:

$$\begin{aligned} \sum F_X &= 0 & F_C - T_B &= 0 & F_C = T_B &= 0,65 \cdot R_B \\ \sum F_Y &= 0 & R_A + R_B - P_G &= 0 & R_A + R_B &= P_G = 2,354 \text{ N} \\ \sum M_{Z(B)} &= 0 & R_A \cdot 60 + F_C \cdot 10 - P_G \cdot (60 - 40) &= 0 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema, se n'obtenen els valors següents:

La F_C és la que exerceix el vehicle contra la paret.

$$R_A = 0,59 \text{ N} \quad R_B = 1,76 \text{ N} \quad F_C = 1,14 \text{ N}$$

b. Suposant que, en la situació anterior, el vehicle xoca amb la paret a una velocitat de $v = 0,36$ m/s, quan trigaran les rodes a aturar-se sota l'efecte de la fricció?

El temps d'aturada de les rodes quan l'automòbil xoca contra la paret i les rodes patinen es pot estudiar a partir de considerar l'efecte del fre del parell de fricció amb el terra de les rodes del darrere sobre el moment d'inèrcia reduït del sistema a les rodes. En aquest cas, tan sols es mouen les rodes del darrere i el volant d'inèrcia. Per tant, el moment d'inèrcia reduït del sistema a les rodes és:

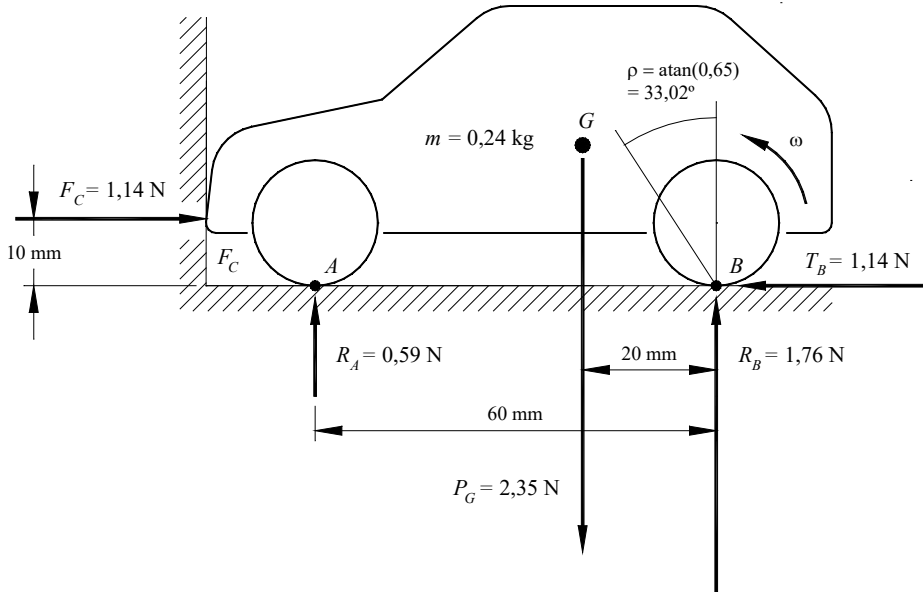
$$\begin{aligned} J_B &= 2 \cdot J_R \cdot \left(\frac{\omega_R}{\omega_R} \right)^2 + J_V \cdot \left(\frac{\omega_V}{\omega_R} \right)^2 = 2 \cdot J_R + J_V \cdot \left(\frac{1}{i_{RV}} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{1/8} \right)^2 = (2,4 + 512) \cdot 10^{-6} = 514,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

El parell de fre a causa de la fricció de les rodes posteriors amb el terra és:

$$M_{fre} = T_B \cdot d_R / 2 = 1,14 \cdot 0,018 / 2 = 0,01026 \text{ N} \cdot \text{m}$$

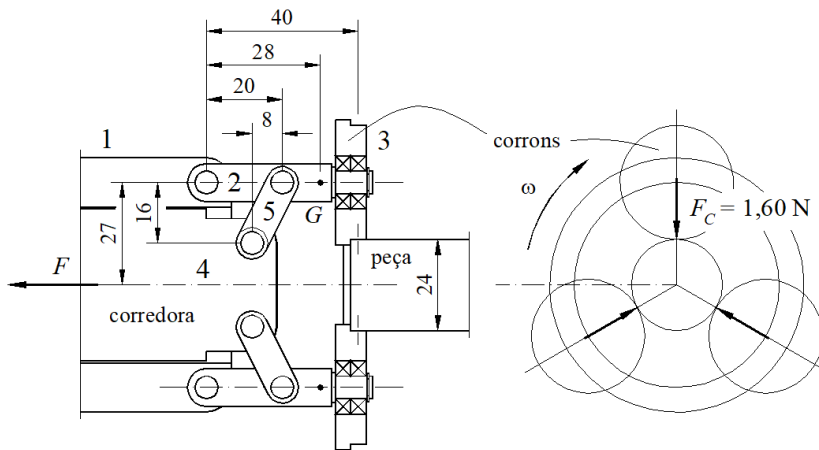
Així doncs, la velocitat angular inicial de les rodes tractores, la seva desacceleració angular i el temps de frenada fins a l'aturada són:

$$\begin{aligned} \omega_{R0} &= \frac{v}{d_R / 2} = \frac{0,36}{0,018 / 2} = 40 \text{ rad/s} & \alpha_R &= \frac{M_{fre}}{J_{B(xoc)}} = \frac{0,01026}{514,4 \cdot 10^{-6}} = 19,945 \text{ rad/s}^2 \\ t &= \frac{\omega_{R0}}{\alpha_R} = \frac{40}{19,945} = 2,005 \text{ s} \end{aligned}$$



5.2.3 Capçal giratori de rebordonar

El capçal giratori d'una petita rebordonadora circular està format per tres mecanismes disposats a simètricament a 120° , que actuen sobre una peça fixa, segons indica la figura.



Cada un dels mecanismes està format per un balancí (2), a l'extrem del qual hi ha articulat el corró de rebordonar (3) i el conjunt s'acciona per mitjà de la corredora interior (4) a través de la biela (5).a

Quan la corredora (4) es mou cap a la dreta, els corrone s'obren i alliberen la peça, mentre que, quan actua cap a l'esquerra amb la força F , cadascun dels corrone ha d'exercir una força $F_C = 1,6 \text{ N}$ sobre la peça fixa. El capçal gira a una velocitat de 500 min^{-1} i la massa conjunta de cada balancí amb el seu corró corresponent és de $m_{2+3} = 0,080 \text{ kg}$ i el seu centre de masses és G .

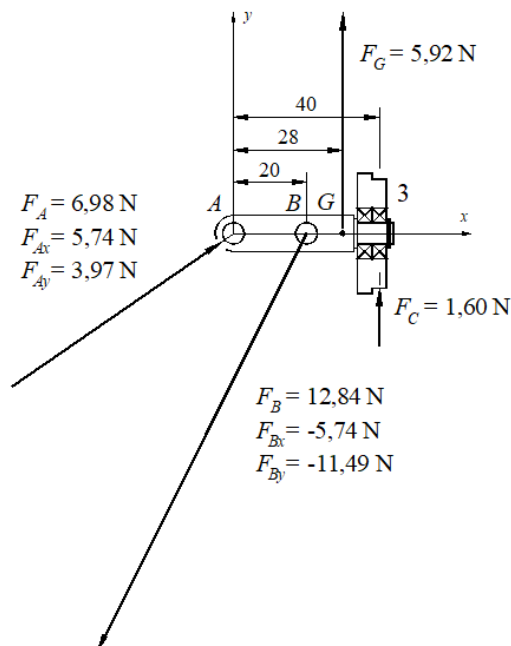
Es demana:

- a. Força F que la corredora (4) ha d'exercir per assegurar la força de rebordament dels tres corrons, tenint en compte els efectes de la inèrcia sobre els balancins i els corrons

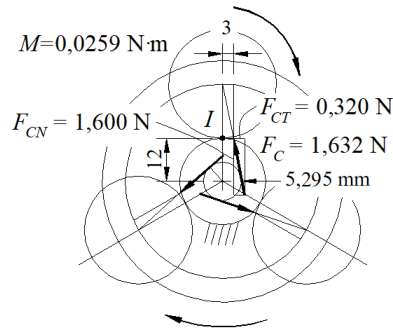
Sobre el conjunt balancí-corró, hi actuen quatre forces: a) la reacció de la peça sobre el corró, coneguda: $F_C = 1,6$ N; b) la força d'inèrcia centrífuga del conjunt balancí-corró (1): $F_G = m_{2+3} \cdot OG \cdot \omega^2 = 0,080 \cdot 0,027 \cdot (500 \cdot 3.1416/30)^2 = 5,92$ N; c) la força transmesa per la biela (5) sobre el balancí (de valor desconegut, però en la direcció de la biela); d) la reacció en l'articulació del balancí (de valor i direcció indeterminats).

La figura d'aquest apartat mostra l'equilibri dinàmic de forces sobre el conjunt format pel balancí i el corró. La biela (5) transmet la força aplicada al punt B , el component axial de la qual és $F_{Bx} = -5,74$ N. Atès que hi ha tres conjunts de balancí-corró, la força de la corredora /4) per assegurar el contacte dels tres corrons i la peça amb una acció de $F_C = 1,60$ N cadascuna (i compensar les tres forces d'inèrcia) és $F = 3 \cdot (-5,74) = -17,22$ N.

Nota 1. Atesa la forma geomètrica dels balancins i dels corrons, un dels moments principals d'inèrcia d'aquests elements és paral·lel a l'eix de rotació; per tant, en la posició de la figura, no apareixeran ni parells adreçadors ni parells giroscòpics (v. Sec. 9.2 de *Mecanismes i màquines III*).



- b. L'acció entre un corró i la peça es pot considerar un contacte de rodolament, amb un coeficient de rodolament de $\delta_R = 3$ mm. Es demana el parell que ha d'exercir sobre el capçal giratori per vèncer aquestes resistències i la potència que absorbeix el capçal giratori.



La resistència al rodolament a causa de l'operació de rebordonament és equivalent a l'avançament de 3 mm de la línia d'aplicació de la força normal. A fi d'establir l'equilibri, hi apareix també una força resistent tangencial. La nova força de contacte entre el corró i la peça amb resistència al rodolament és de $F_{CR} = 1,632$ N, amb components normal $F_{CN} = 1,60$ N i radial $F_{CT} = F_C \cdot (\delta_R / r_{corró}) = 1,60 \cdot (3/15) = 0,32$ N.

El parell que ha de vèncer el capçal és el següent (a la figura s'ha calculat gràficament a partir de determinar el radi del cercle tangent a les tres forces):

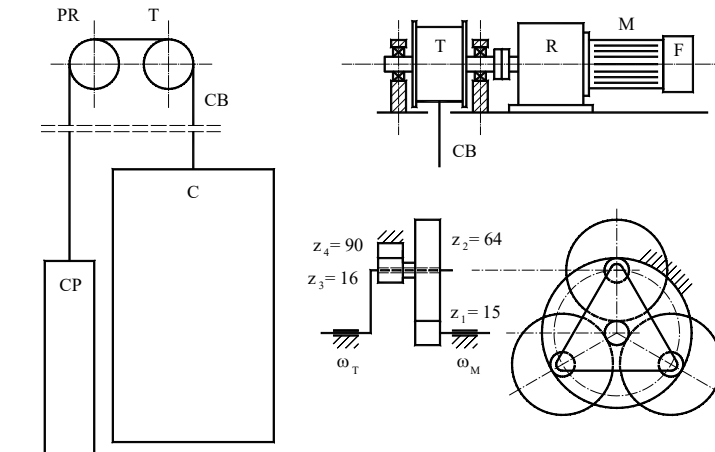
$$M = 3 \cdot (\delta_R \cdot F_{CN} + r_{peça} \cdot F_{CT}) = 3 \cdot (0,003 \cdot 1,60 + 0,012 \cdot 0,32) = 0,0259 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La potència que absorbeix el capçal durant els temps de treball és:

$$P = M \cdot \omega = 0,0259 \cdot (500 \cdot 3,1416/30) = 1,356 \text{ W}$$

5.2.4 Fallada del fre de retenció d'un ascensor

La figura mostra l'esquema d'un ascensor format per una cabina (C) i un contrapès (CP), enllaçats per un cable que passa per un tambor (T) i una politja de reenviament (PR). El motor (M) sobre l'eix del qual hi ha el fre de retenció (F) està connectat amb l'eix del tambor a través d'un reductor planetari (R). Es vol estudiar la caiguda de la cabina de l'ascensor en cas que falli el fre de retenció.



Dades:

Massa de la cabina carregada: $m_C = 600 \text{ kg}$

Massa del contrapès: $m_{CP} = 450 \text{ kg}$

Moment d'inèrcia de l'eix motor: $J_M = 0,050 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Diàmetre del tambor: $d_T = 320 \text{ mm}$

Les dades del reductor planetari figuren a l'esquema adjunt.

Es demana:

- a. *Relació de transmissió entre l'eix del motor i el moviment de la cabina. Velocitat de la cabina, sabent que el motor gira a 1.400 min^{-1} .*

Relació de transmissió

La relació de transmissió entre l'eix angular del motor i l'eix lineal de la cabina de l'ascensor es compon de dues parts: la relació de transmissió del reductor planetari, i_R , i la relació de transmissió del tambor, i_T :

$$i = i_R \cdot i_T = \frac{\omega_M}{\omega_T} \cdot \frac{\omega_T}{v_C}$$

La relació de transmissió del reductor planetari s'obté a partir de l'equació de Willis, que, aplicada al tren de la figura, és:

$$\frac{\omega_M - \omega_T}{\omega_{corona} - \omega_T} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = -\frac{64 \cdot 90}{15 \cdot 16} = -24$$

Atès que la corona està immobilitzada (la seva velocitat és nul·la: $\omega_{corona} = 0$), l'expressió anterior es transforma en:

$$\frac{\omega_M - \omega_T}{0 - \omega_T} = -\frac{\omega_M}{\omega_T} + 1 = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} - 24 \quad i_R = \frac{\omega_M}{\omega_T} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} + 1 = 25$$

La relació de transmissió total és, doncs:

$$i = i_R \cdot i_T = \left(\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} + 1 \right) \cdot \frac{\omega_T}{\omega_T \cdot (d_T / 2)} = 25 \cdot \left(\frac{2}{0,320} \right) = 156,25 \text{ rad/m}$$

Velocitat de l'ascensor

La velocitat angular de l'eix motor $\omega_M = 1.400 \text{ min}^{-1} = 146,1 \text{ rad/s}$. Per tant, la velocitat lineal de la cabina de l'ascensor és:

$$v_C = \frac{\omega_M}{i} = \frac{146,1 \text{ rad/s}}{156,25 \text{ rad/m}} = 0,938 \text{ m/s}$$

- b. *Massa del sistema reduïda a la cabina. Es consideren tan sols les masses de la cabina i del contrapès, i el moment d'inèrcia de l'eix motor*

La massa de la cabina i del contrapès es mouen a la velocitat de l'eix de reducció (la cabina) i, per tant, resten inalterades; el moment d'inèrcia de l'eix motor s'ha de reduir per mitjà del quadrat de la relació de transmissió entre aquests dos eixos al quadrat:



$$\begin{aligned}
 m_{\text{reduïda}C} &= m_C + m_{CP} + J_M \cdot i^2 = 600 + 450 + 0,050 \cdot 156,25^2 = \\
 &= 600 \text{ (cabina)} + 450 \text{ (contrapès)} + 1220,7 \text{ (motor)} = 2270,7 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

- c. *Força reduïda del sistema a la cabina quan falla el fre de retenció. Quin parell mínim seria necessari en el fre (F) per retenir l'ascensor?*

Força reduïda

Atès que el motor no està connectat i que el fre de retenció falla, les dues úniques forces exteriors sobre el sistema són els pesos de la cabina i del contrapès; atès que actuen sobre eixos amb la mateixa velocitat que el de reducció (l'eix de la cabina C), resten inalterades en valor. L'efecte del pes del contrapès és contrari al pes de la cabina, però aquest darrer pes domina amb un efecte descendent. Sobre l'eix C de la cabina, és:

$$F_{\text{reduïda}C} = m_C \cdot g - m_{CP} \cdot g = -600 \cdot 9,81 + 450 \cdot 9,81 = -1.471,5 \text{ N}$$

Parell mínim del fre

El parell mínim que cal fer sobre el fre per retenir el conjunt de cabina i contrapès és el que, situat a l'eix motor, equilibra la força reduïda anterior:

$$M_F \text{ (mòdul)} = \frac{F_{\text{reduïda}C}}{i} = \frac{1.471,5 \text{ N}}{156,25 \text{ rad/m}} = 9,42 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- d. *Acceleració de la cabina quan falla el fre (F). Quin temps trigaria a baixar 15 m i a quina velocitat impactaria amb el terra? Compareu aquests valors amb els que s'obtidrien d'una caiguda lliure per ruptura del cable*

Acceleració (descendent) de la cabina

Atès que les relacions de transmissions d'aquest sistema són constants, l'acceleració de la cabina és el quocient de la força reduïda i la massa reduïda del sistema en aquest eix:

$$a_C = \frac{F_{\text{reduïda}C}}{m_{\text{reduïda}C}} = \frac{1471,5 \text{ N}}{2270,7 \text{ kg}} = 0,648 \text{ m/s}^2$$

Temps de caiguda

A partir de les equacions del moviment uniformement accelerat, es pot obtenir el temps de caiguda de 15 m amb l'acceleració que s'acaba d'obtenir:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot e_C}{a_C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{0,648}} = 6,80 \text{ s}$$

Velocitat d'impacte

Finalment, la velocitat d'impacte amb el terra és:

$$v_C = a_C \cdot t = 0,648 \cdot 6,80 = 4,41 \text{ m/s}$$

Caiguda lliure de la cabina

En el cas de ruptura del cable, l'acceleració de la caiguda de la cabina seria l'acceleració de la gravetat: $g = 9,81 \text{ m/s}$. A partir d'aquest valor, el temps i la velocitat d'impacte de la cabina són:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot e_C}{a_C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{9,81}} = 1,749 \text{ s}$$

$$v_C = a_C \cdot t = 9,81 \cdot 1,749 = 17,16 \text{ m/s}$$

Com es pot comprovar, el temps de caiguda és sensiblement més curt, però la velocitat d'impacte amb el terra s'ha multiplicat per quatre.

5.2.5 Moment d'inèrcia reduït d'un motor monocilíndric

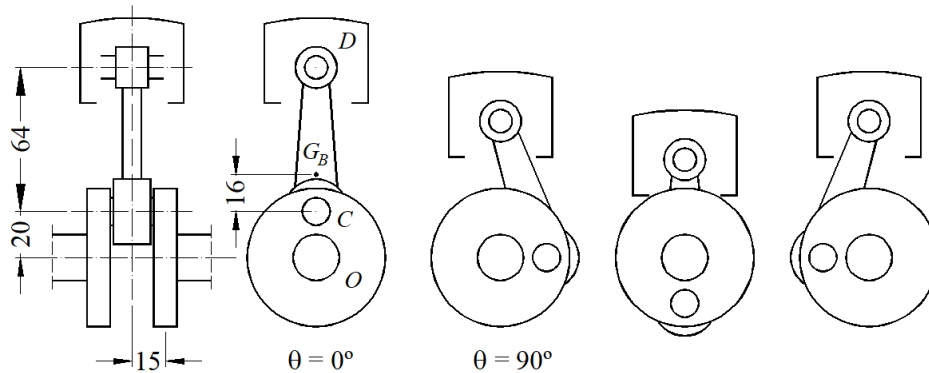
La figura mostra l'esquema d'un motor monocilíndric que té com a membres mòbils el cigonyal, la biela i el cilindre.

Dades:

Cigonyal: excentricitat: $OC = 20 \text{ mm}$; massa: $m_C = 440 \text{ g}$; centre de masses: aproximadament, O ; moment d'inèrcia: $J_{C(O)} = 225000 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$

Biela: longitud: $CD = 64 \text{ mm}$; massa: $m_B = 200 \text{ g}$; centre de masses: $CG_B = 16 \text{ mm}$; moment d'inèrcia: $J_{C(G_B)} = 145.000 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$

Pistó: massa: $m_P = 120 \text{ g}$



Es demana:

- Descompondre la massa de la biela en dues masses puntuals en les seves articulacions (punts C i D). Quin error es produeix amb aquesta substitució en relació amb el moment d'inèrcia real de la biela?

Les masses que, situades als punts C i D , tenen la mateixa massa i el mateix centre de masses de la biela són:



$$m_{B(C)} = m_B \cdot \frac{G_B D}{CD} = 200 \cdot \frac{(64-16)}{64} = 150 \text{ g}$$

$$m_{B(D)} = m_B \cdot \frac{CG_B}{CD} = 200 \cdot \frac{16}{64} = 50 \text{ g}$$

El moment d'inèrcia d'aquestes dues masses ($m_{B(C)}$ i $m_{B(D)}$) respecte al centre de masses de la biela G_B és:

$$J_{B(CD)} = m_{B(C)} \cdot (CG_B)^2 + m_{B(D)} \cdot (G_B D)^2 = 150 \cdot 16^2 + 50 \cdot 48^2 = 153.600 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Atès que el moment d'inèrcia real és de $145.000 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$, amb aquesta substitució es comet un error per excés de:

$$\text{error} = \frac{J_{B(CD)} - J_{B(G_B)}}{J_{B(G_B)}} = \frac{153.600 - 145.000}{145.000} = 0,0593 \text{ (5,93\% de més)}$$

b. Calculeu el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix del cigonyal (punt O): $J_{T(O)}$. Estudieu les posicions $\theta = 0^\circ$ (valor mínim) i $\theta = 90^\circ$ (aproximadament, valor màxim)

Posició $\theta = 0^\circ$

En aquesta posició (punt mort superior), el pistó no té velocitat i, per tant, tan sols caldrà tenir en compte les masses rotatives:

$$J_{T(O; \theta=0^\circ)} = J_{C(O)} + m_{B(C)} \cdot OC^2 = 225.000 + 150 \cdot 20^2 = 285.000 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Posició $\theta = 90^\circ$

En aquesta posició, el pistó es mou a la mateixa velocitat que el punt C i, per tant, també cal tenir en compte les masses alternatives:

$$\begin{aligned} J_{T(O; \theta=90^\circ)} &= J_{T(O; \theta=0^\circ)} + (m_P + m_{B(C)}) \cdot OC^2 = 285.000 + (120 + 50) \cdot 20^2 = \\ &= 353.000 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 \end{aligned}$$

c. Equilibrar les masses rotatives i la meitat de les masses alternatives (forces d'inèrcia primàries $a + \omega$) amb dues masses unides al cigonyal, desplaçades 15 mm a cada costat del pla de simetria del mecanisme i amb una excentricitat de $e = 18 \text{ mm}$

La situació dels dos contrapesos (m_{EQ}) és simètrica i, per tant, seran iguals. El seu efecte sumat ha d'equilibrar les masses alternatives desequilibrades (la massa de cap de biela, $m_{B(C)}$) i la meitat de la massa alternativa (la suma de la massa del pistó, m_P , i la massa del peu de biela, $m_{B(D)}$):

$$\begin{aligned} 2 \cdot m_{EQ} \cdot e &= m_{B(C)} \cdot OC + \frac{1}{2} (m_P + m_{B(D)}) \cdot OC = 150 \cdot 20 + \frac{1}{2} (120 + 50) \cdot 20 = \\ &= 4.700 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad m_{EQ} = \frac{4.700}{2 \cdot 18} = 130,55 \text{ g} \end{aligned}$$

d. Calculeu el nou moment d'inèrcia reduït del sistema (punt O, i posicions $\theta = 0^\circ$ i $\theta = 90^\circ$) amb els anteriors contrapesos incorporats $J_{T+CP(O)}$

En tots dos casos, se suma el moment d'inèrcia, corresponent als dos contrapesos equilibradors, m_{EQ} , que és:

$$\Delta J_{T(O)} = 2 \cdot m_{EQ} \cdot e^2 = 2 \cdot 130,55 \cdot 18^2 = 84.596,4 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Per tant, els nous moments d'inèrcia esdevenen:

Posició $\theta = 0^\circ$

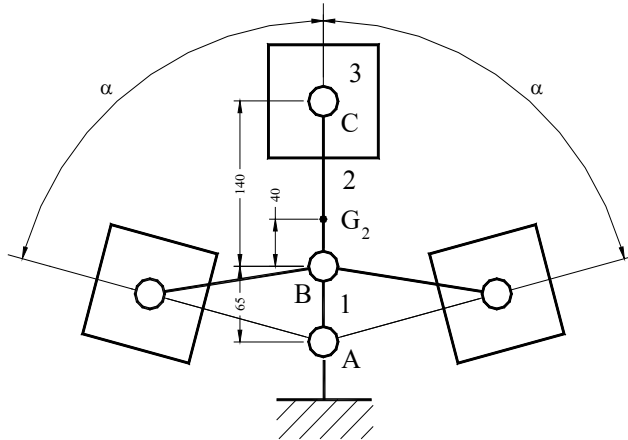
$$J_{T+EQ(O; \theta=0^\circ)} = J_{T(O; \theta=0^\circ)} + \Delta J_{T(O)} = 285.000 + 84.596,4 = 369.596,4 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

Posició $\theta = 90^\circ$

$$J_{T+EQ(O; \theta=90^\circ)} = J_{T(O; \theta=90^\circ)} + \Delta J_{T(O)} = 353.000 + 84.596,4 = 437.596,4 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$$

5.2.6 Moment d'inèrcia reduït d'un motor tricilíndric

La figura mostra un primer esquema del disseny d'un motor de tres cilindres iguals, disposats en un mateix pla i formant entre ells angles de α° , encara en fase de definició.

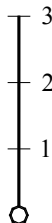


Es demana:

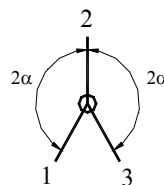
- Establiu genèricament (en funció de l'angle α) els esquemes de les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ i a $-\omega$

A continuació, es donen les gràfiques per a les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ i a $-\omega$ en funció de l'angle α :

Primàries a $+\omega$



Primàries a $-\omega$





b. Per a quin angle α les forces d'inèrcia primàries a $-\omega$ s'anul·len?

Les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ s'anul·len si se situen simètricament.

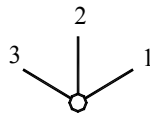
Aquesta circumstància es dona si $2 \cdot \omega = 120^\circ$ o $2 \cdot \omega = 240^\circ$. En el primer cas, $\omega = 60^\circ$ (solució adoptada als dos apartats següents) i, en el segon cas, $\omega = 120^\circ$.

c. Adoptant l'angle del cas anterior, trobeu els diagrames de forces d'inèrcia secundàries a $+2\omega$ i a -2ω (en cas que no hagueu resolt el punt anterior, adopteu $\alpha = 90^\circ$)

Si $\alpha = 60^\circ$, les forces d'inèrcia secundàries adopten la disposició següent:

Malgrat estar desequilibrades, la resultant de les de $+2\omega$ és el doble de la d'un cilindre i la resultant de les de -2ω equival tan sols a la d'un cilindre.

Secundàries a $+2\omega$



Secundàries a -2ω



d. Quant val el desequilibri de les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$?

Les masses que, situades a les articulacions, tenen la mateixa massa i el mateix centre de masses de la biela són:

$$m_{2(B)} = m_2 \cdot \frac{(l - l_{G2})}{l} = 350 \cdot \frac{(140 - 40)}{140} = 250 \text{ g}$$

$$m_{2(C)} = m_2 \cdot \frac{l_B}{l} = 350 \cdot \frac{40}{140} = 100 \text{ g}$$

Les masses alternatives de cada cilindre són la suma de la del pistó més la massa puntual equivalent de la biela: $m_{alt} = m_3 + m_{2(C)} = 220 + 250 = 470 \text{ g}$. El desequilibri global (suma dels tres cilindres) de les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ és, en termes de producte, $m \cdot e$:

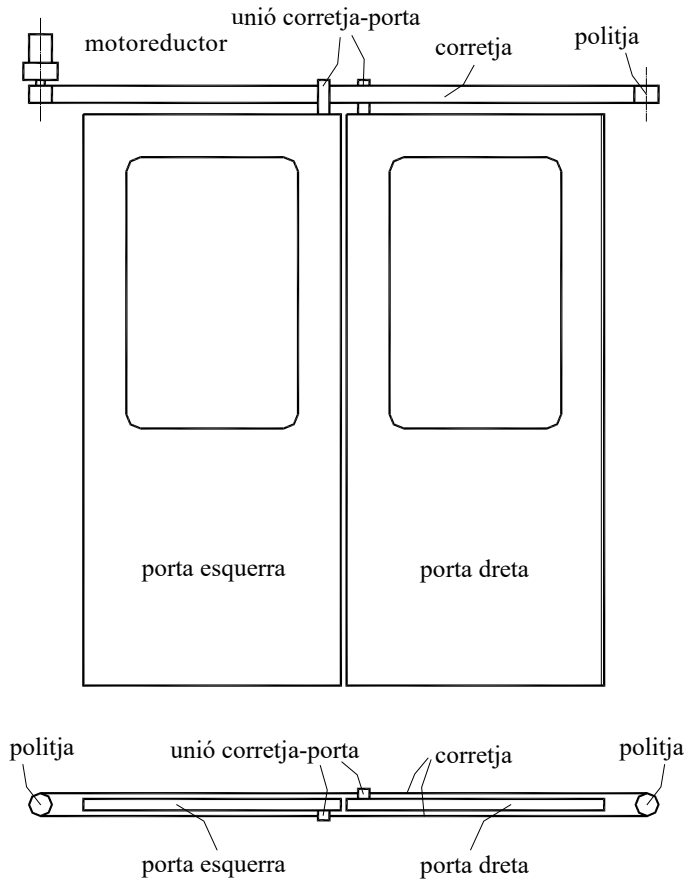
$$(m \cdot e)_{prim+\omega} = 3 \cdot (m_3 + m_{2(C)}) \cdot r = 3 \cdot (220 + 100) \cdot 65 = 62.400 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

5.2.7 Portes d'un vagó de ferrocarril metropolità

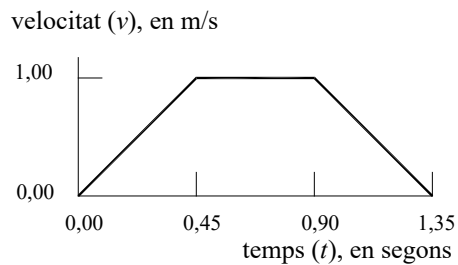
La figura mostra l'esquema d'un sistema de portes corredisses de ferrocarril metropolità que s'obren simètricament per mitjà d'una corretja dentada amb un ramal unit a cada porta. El sistema es mou per mitjà d'un motoreductor que acciona una de les dues polities iguals extremes.

Dades del problema:

Portes: moviment segons el gràfic adjunt; massa, $m = 15 \text{ kg}$
 Politges: dents, $z = 25$; pas, $p = 10 \text{ mm}$; moment d'inèrcia, $J_{pol} = 0,000650 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
 Reductor: relació de transmissió, $i = 6$
 Motor: moment d'inèrcia, $J_m = 0,000300 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$



Moviment de la porta



Suposant que no hi ha pèrdues a les transmissions (rendiment $\eta = 1$), es demana:



a. *Moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix del motor.*

Els membres del sistema amb massa que intervé en l'avaluació del moment d'inèrcia reduït del sistema són el motor, les politges i les portes. L'expressió general del moment d'inèrcia reduït és:

$$J_M = J_m + 2 \cdot J_{pol} \cdot \left(\frac{\omega_{pol}}{\omega_M} \right)^2 + 2 \cdot m_{por} \cdot \left(\frac{v_{por}}{\omega_M} \right)^2$$

Les relacions de velocitats són ($d_{pol} = z \cdot p / \pi = 25 \cdot 10 / 3,14 = 79,577$ mm):

$$\frac{\omega_{pol}}{\omega_M} = \frac{1}{i_{red}} = \frac{1}{6} = 0,16666$$

$$\frac{v_{por}}{\omega_M} = \frac{v_{por}}{\omega_{pol}} \cdot \frac{\omega_{pol}}{\omega_M} = \frac{d_{pol}}{2} \cdot \frac{1}{i_{red}} = \frac{0,0796}{2 \cdot 6} = 0,00663 \text{ m/rad}$$

Aplicant els valors, s'obté:

$$J_M = 0,000300 + 2 \cdot 0,000650 \cdot 0,16666^2 + 2 \cdot 15 \cdot 0,00663^2 =$$

$$= 0,000300 + 0,000036 + 0,001320 = 0,001656 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b. *Parell reduït del frec del sistema de guiatge de les portes (15 N cadascuna) a l'eix motor*

El parell reduït a l'eix motor de les forces de frec, M_{Mfrec} , s'obté per mitjà de la fórmula següent:

$$M_{Mfrec} = 2 \cdot F_{frec} \cdot \frac{v_{por}}{\omega_M} = 2 \cdot 20 \cdot 0,00663 = 0,265 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c. *Parell motor necessari per accelerar i desaccelerar les portes i potència necessària del motor en el tram de moviment de velocitat constant*

L'acceleració de les portes, a_{por} , en els trams d'arrencada i frenada es pot deduir de la gràfica del moviment de l'enunciat. En efecte:

$$a_{por} = \frac{v_{por.màx}}{t_{arrencada}} = \frac{1 \text{ m/s}}{0,45 \text{ s}} = 2,222 \text{ m/s}^2$$

L'acceleració angular corresponent del motor és:

$$\alpha_{Mpor} = a_{por} \cdot \left(\frac{\omega_M}{v_{por}} \right) = 2,222 \cdot \frac{1}{0,00663} = 335,17 \text{ rad/s}^2$$

Cal, doncs, aplicar l'equació dinàmica a l'eix motor amb paràmetres reduïts a aquest eix.

Durant l'acceleració:

$$M_M = M_{Mfrec} + J_M \cdot \alpha_{Mpor} = 0,265 + 0,001656 \cdot 335,17 = 0,265 + 0,555 = 0,820 \text{ N}\cdot\text{m}$$

I, durant la desacceleració:

$$\begin{aligned} M_M &= M_{Mfrec} + J_M \cdot (-\alpha_{Mpor}) = 0,265 + 0,001656 \cdot (-335,17) = \\ &= 0,265 - 0,555 = 0,290 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

La potència del motor en el tram de moviment de velocitat constant tan sols haurà de vèncer el parell corresponent al frec:

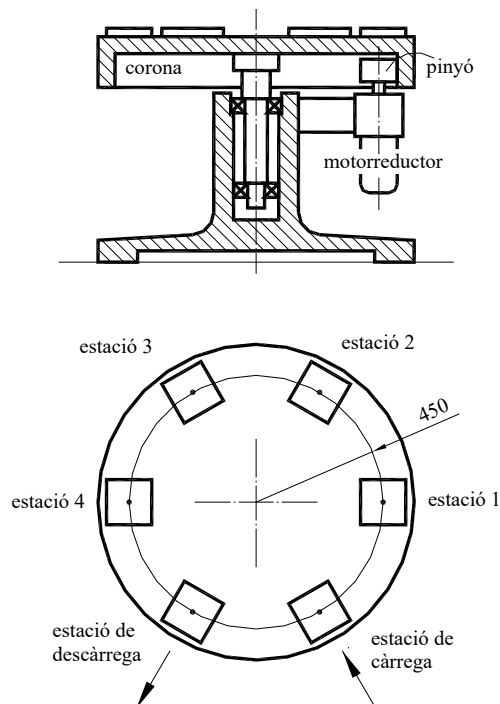
$$P_M = M_{Mfrec} \cdot \omega_M = M_{Mfrec} \cdot v_{por} \cdot \frac{\omega_M}{v_{por}} = 0,265 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0,00663} = 39,97 \text{ W}$$

d. Estudieu i, si és el cas, avalueu els desequilibris que produeixen les portes sobre el cos del vagó durant els moviments d'obertura o de tancament

Gràcies al mecanisme de corretja, els moviments de les dues portes (posicions, velocitats i acceleracions) són, en tot moment, simètrics. Per tant, es produeix l'equilibri de les forces d'inèrcia de D'Alembert sobre el conjunt. No hi ha desequilibris.

5.2.8 Taula giratòria amb estacions de treball

La figura mostra una taula giratòria amb $n=6$ estacions de treball destinada a un procés de fabricació en sèrie. A cada estació, es fa una operació i les peces (amb els seus utillatges) van muntades sobre la taula.





El gir entre una estació i la següent es realitza en un temps $T=1$ s. El moment d'inèrcia de la taula és $J_{taula} = 78 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ i el del motor, $J_{motor} = 0,015 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. (Se suposen negligibles els efectes d'inèrcia de la resta d'elements de la cadena cinemàtica.)

Els conjunts utilatge-peça, de massa $m_{u-p} = 18 \text{ kg}$, se situen sobre la taula amb el centre de masses a una distància $e_{u-p} = 450 \text{ mm}$ de l'eix de gir de la taula. Entre el motor i la taula, hi ha un reductor de relació de transmissió $i = 16,5$ i una transmissió pinyó-corona amb un nombre de dents: $z_1 = 15$ i $z_2 = 82$.

Suposant que, a la primera meitat, el moviment és uniformement accelerat i, la segona, uniformement desaccelerat, amb el mateix valor d'acceleració/desacceleració, es demana (enunciat i resolució):

a. *Acceleració/desacceleració angular de la taula i velocitat angular màxima, durant el moviment de pas d'una estació a la següent*

En un desplaçament (en aquest cas, angular), suposant un primer moviment uniformement accelerat i un segon moviment uniformement desaccelerat, l'acceleració i la velocitat màxima es relacionen amb el desplaçament i el temps a través de les expressions següents:

$$\omega_r = \frac{2\theta_r}{T} = \frac{2(2\pi/6)}{1} = 2,094 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_r = \frac{4\theta_r}{T^2} = \frac{4(2\pi/6)}{1^2} = 2,094 \text{ rad/s}^2$$

b. *Moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix motor, J_M , amb la taula buida*

En primer lloc, s'estableix la relació de transmissió total entre el motor i el receptor:

$$i_{red} = 16,5 \quad i_{pc} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{82}{15} = 5,467$$

$$i_T = i_{red} \cdot i_{pc} = 16,5 \cdot 5,467 = 90,2$$

D'acord amb aquesta relació, el moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix motor és:

$$J_M = J_{mot} + \frac{J_{taula}}{i_T^2} = 0,015 + \frac{78}{90,2^2} = 0,024587 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

c. *Nou moment d'inèrcia del sistema reduït a l'eix motor, J_{Mc} , quan es col·loquen cinc conjunts utilatge-peça sobre la taula giratòria*

El moment d'inèrcia d'un conjunt utilatge-peça respecte al centre de la taula és:

$$\Delta J_{r(1)} = m_{up} \cdot e_{up}^2 = 18 \cdot 0,450^2 = 3,645 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El nou moment d'inèrcia del sistema reduït a l'eix motor quan hi ha cinc conjunts utilatge-peça col·locats sobre la taula, és:

$$J_{Mcar} = J_M + n \cdot \frac{\Delta J_{r(1)}}{i_T^2} = 0,024587 + 5 \cdot \frac{3,645}{90,2^2} = 0,026827 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Representa un increment del 9,1 % en el moment d'inèrcia del sistema.

d. Parell necessari en el motor per produir l'acceleració/desacceleració requerida pel sistema carregat, i potència a la velocitat màxima

En primer lloc, cal conèixer la velocitat i l'acceleració angular del motor en funció de la velocitat i l'acceleració angular de la taula:

$$\omega_{M.\max} = \omega_{taula.\max} \cdot i_T = 2,094 \cdot 90,2 = 188,914 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_M = \alpha_{taula} \cdot i_T = 4,189 \cdot 90,2 = 377,829 \text{ rad/s}^2$$

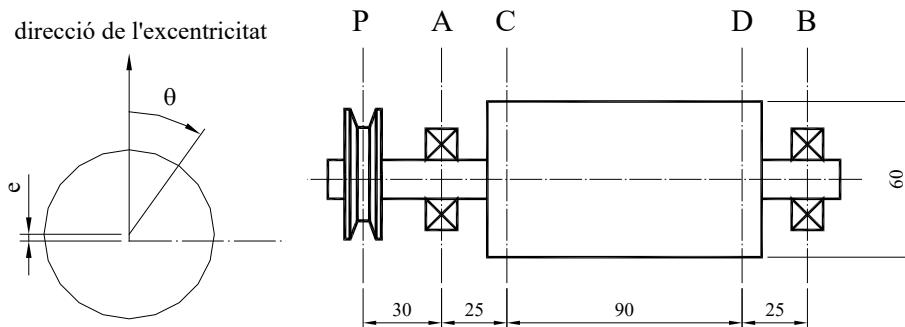
A partir d'aquests valors, es poden obtenir el parell motor necessari i la potència màxima a la velocitat màxima:

$$M_M = J_{Mcar} \cdot \alpha_M = 0,026827 \cdot 377,829 = 10,136 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$P_{Mm\grave{a}x} = M_M \cdot \omega_{M.\max} = 10,136 \cdot 188,914 = 1914,8 \text{ W}$$

5.2.9 Politja desequilibrada

En una aplicació, les politges es munten calades sobre l'arbre del motor (la politja s'escalfa i es dilata, entra sobre l'arbre fred i, en contraure's, s'abraça sobre l'arbre tan fort que ja no es pot desmuntar si no és destruïnt-la).



En una de les unitats fabricades, la politja (de massa $m = 75 \text{ g}$) té un error d'excentricitat $e = 0,20 \text{ mm}$, que provoca desequilibris inadmissibles en el motor quan gira a $n = 6.000 \text{ min}^{-1}$.

El rotor s'equilibra eliminant material mitjançant una broca de diàmetre $d_{bro} = 8 \text{ mm}$. El diàmetre del rotor sobre el qual es fan els forats és $d_{rot} = 60 \text{ mm}$ i el material que es mecanitza és alumini (densitat $\rho = 2,7 \text{ Mg/m}^3$).

Es demana:



a. Valor de la força de desequilibri sobre el propi pla P de la politja

El valor de la força d'inèrcia de desequilibri sobre el propi pla P de la politja depèn tan sols de la massa de la politja m , l'excentricitat de la politja e i la velocitat angular ω , funció de n :

$$F_{IP} = m \cdot e \cdot \omega^2 = m \cdot e \cdot \left(\frac{n \cdot (2 \cdot \pi)}{60} \right)^2 = 0,075 \cdot 0,0002 \cdot \left(\frac{6.000 \cdot 2 \cdot 3,141592}{60} \right)^2 = 5,884 \text{ N}$$

b. Forces de desequilibri (en valor i orientació angular) que reben els rodaments A i B

La repercussió de la força d'inèrcia de desequilibri del punt anterior, F_{IP} , sobre els dos plans dels rodaments A i B (distàncies donades per la figura: $d_{PA} = 30 \text{ mm}$; $d_{PB} = 170 \text{ mm}$) són:

$$F_A = F_{IP} \cdot \frac{d_{PB}}{d_{PB} - d_{PA}} = 5,884 \cdot \frac{170}{170 - 30} = 7,145 \text{ N} \quad \theta_A = 0^\circ$$

$$F_B = F_{IP} - F_A = 5,884 - 7,145 = 1,261 \text{ N} \quad \theta_B = 180^\circ$$

c. Productes ($m \cdot e$) massa per excentricitat, equilibrants (valor i orientació), sobre els plans d'equilibrament C i D.

En aquest apartat, en lloc de treballar amb forces, es treballa amb productes ($m \cdot e$). El producte ($m \cdot e$)_P a la politja en el propi pla P és:

$$(m \cdot e)_P = m \cdot e = 75 \cdot 0,2 = 15 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

Anàlogament al punt anterior, s'equilibra sobre els plans C i D (cal tenir en compte que, en representar una eliminació de massa, les orientacions són les contràries que en una addició de massa):

$$(m \cdot e)_C = (m \cdot e)_P \cdot \frac{d_{PD}}{d_{PD} - d_{PC}} = 15 \cdot \frac{145}{145 - 55} = 24,167 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad \theta_A = 0^\circ$$

$$(m \cdot e)_D = (m \cdot e)_P - (m \cdot e)_C = 24,167 - 15,000 = 9,167 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad \theta_B = 180^\circ$$

d. Profunditat dels forats d'equilibrament en cada pla

La profunditat dels forats (que se suposen cilíndrics en tota la seva longitud), l_C i l_D , influeix en dos aspectes de l'equilibrament: a) d'una banda, és directament proporcional a la massa manllevada; b) de l'altra, modifica la posició del seu centre de masses, que és $e_C = (d_{rot} - l_C)/2$ o $e_D = (d_{rot} - l_D)/2$.

Així, doncs:

$$(m \cdot e)_C = m_C \cdot e_C = \frac{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho}{4} \cdot l_C \cdot \left(\frac{d_{rot} - l_C}{2} \right)$$

$$(m \cdot e)_D = m_D \cdot e_D = \frac{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho}{4} \cdot l_D \cdot \left(\frac{d_{rot} - l_D}{2} \right)$$

Aquestes relacions es transformen en les equacions següents de segon grau:

$$l_C^2 - d_{rot} \cdot l_C + \frac{2 \cdot (m \cdot e)_C}{A_{bro} \cdot \rho} = 0 \quad l_D^2 - d_{rot} \cdot l_D + \frac{2 \cdot (m \cdot e)_D}{A_{bro} \cdot \rho} = 0$$

$$A_{bro} = \frac{\pi \cdot d_{bro}^2}{4} = \frac{3,141592 \cdot 8^2}{4} = 50,265 \text{ mm}^2$$

Resolent les equacions anteriors de segon grau en l_C i l_D , s'obtenen les profunditats dels dos forats:

$$a = 1 \quad b = d_{rot} = 60 \text{ mm}$$

$$c_C = \frac{2 \cdot (m \cdot e)_C}{A_{bro} \cdot \rho} = \frac{2 \cdot 24,167}{50,265 \cdot 0,0027} = 356,134 \text{ mm}^2$$

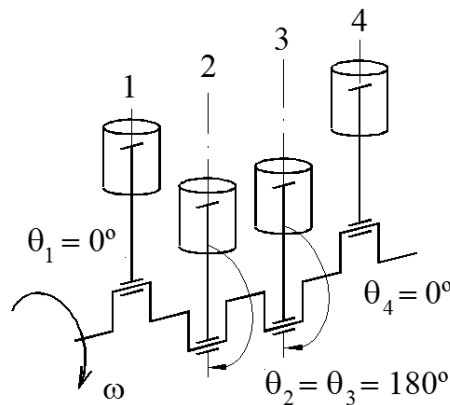
$$c_D = \frac{2 \cdot (m \cdot e)_D}{A_{bro} \cdot \rho} = \frac{2 \cdot 9,167}{50,265 \cdot 0,0027} = 135,185 \text{ mm}^2$$

$$l_C = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c_C}}{2 \cdot a} = \frac{-(-60) + \sqrt{(-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 356,134}}{2 \cdot 1} = 6,679 \text{ mm}$$

$$l_D = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c_D}}{2 \cdot a} = \frac{-(-60) + \sqrt{(-60)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 135,185}}{2 \cdot 1} = 2,343 \text{ mm}$$

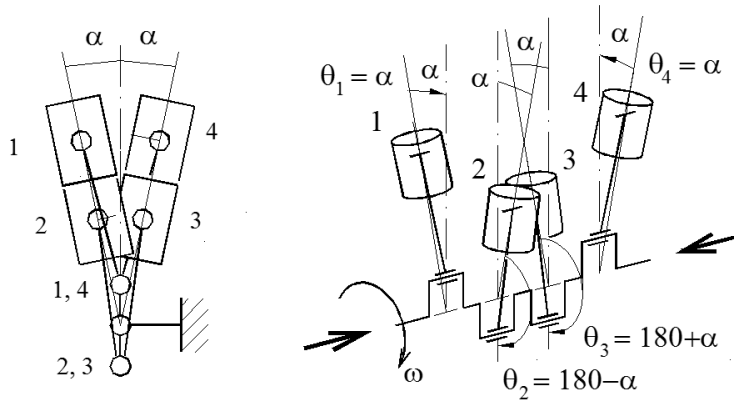
5.2.10 Motor compacte de quatre cilindres en línia

A fi de possibilitar una construcció més compacta d'un motor de quatre cilindres en línia (figura primera), s'inclinen alternativament un petit angle α els cilindres cap a un costat i cap a l'altre (figura segona).



Suposant que es conserva la mateixa disposició de colzes del cigonyal, es vol estudiar quin és el nou grau d'equilibrament del motor.

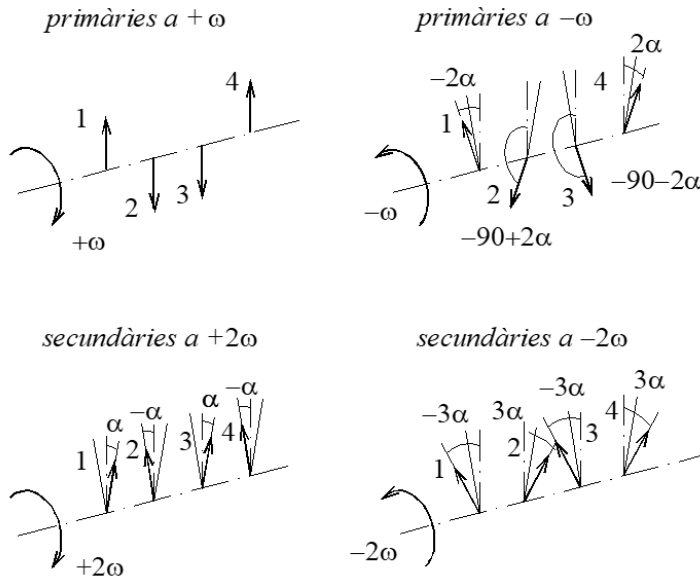
S'observa que les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ són les mateixes que en el motor convencional.



Es demana:

- a. Forces d'inèrcia primàries a $+\omega$, forces d'inèrcia primàries a $-\omega$, forces d'inèrcia secundàries a $+2\omega$ i forces d'inèrcia secundàries a -2ω

S'analitzen conjuntament. Cal tenir en compte que els angles de referència són els de les direccions dels quatre cilindres, això és, alternativament: $-\alpha$, $+\alpha$, -2α , i $+2\alpha$



- b. Valoració dels resultats

L'equilibri més important és el de les forces d'inèrcia primàries a $-\omega$. Doncs bé, en la nova disposició de motor, aquestes forces d'inèrcia formen dos parells (1-3 i 2-4) sobre dos plans inclinats entre si de 4α . Per tant, la resultant continua essent nul·la, però els dos moments dels parells de forces 1-3 i 2-4 donen lloc a un parell total resultant, que serà relativament petit si l'angle α també és petit.

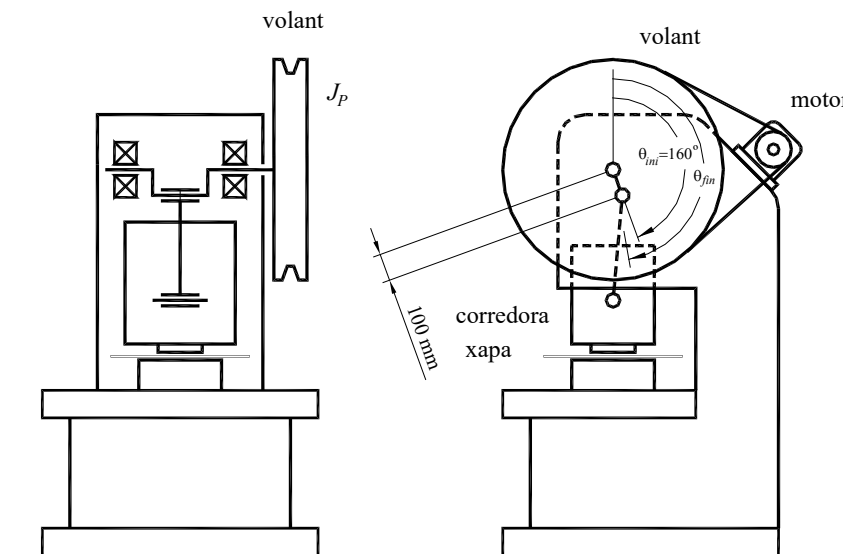
Amb relació a les forces d'inèrcia secundàries a $+2\omega$, aquestes apareixen alternativament girades a $+\alpha$ i a $-\alpha$ respecte al motor convencional (increment pràcticament insignificant del seu desequilibri). Finalment, amb relació a les forces d'inèrcia secundàries a -2ω , aquestes apareixen alternativament girades a -3α i a $+3\alpha$, respecte al motor convencional (desequilibri lleugerament més significatiu).

Si l'angle α és petit, els desequilibris de les dues disposicions de motor presenten poques diferències, a efectes pràctics.

5.2.11 Dinàmica d'una premsa de volant

La figura mostra l'esquema d'una premsa de volant, en què la corredora fa un moviment de recorregut curt (100 mm) i de cadència baixa (75 cicles per minut), que s'acciona a través d'un mecanisme de cigonyal i biela, amb un volant que proporciona un moment d'inèrcia reduït a l'eix principal de $J_P = 30 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. El motor proporciona una energia constant al llarg del cicle.

La premsa s'utilitza per tallar xapa amb una matriu de tall.



El tall s'inicia a partir de 160° respecte al punt mort superior del mecanisme de cigonyal-biela-corredora i finalitza a $165,9^\circ$. La força màxima correspon al moment inicial del tall: $F_{tall} = L \cdot g \cdot \tau_{tall}$ (unitats del SI) i el treball per fer un tall és: $E_{tall} = L \cdot g^2 \cdot \tau_{tall} / 2$ (L = longitud de tall, g = gruix de la xapa, τ_{tall} = resistència al cisallament del material, mesurades en unitats del SI).

Es tracta d'una peça de xapa de gruix $g = 3 \text{ mm}$, amb un perímetre de tall de $L = 320 \text{ mm}$ d'un material de resistència de cisallament $\tau_{tall} = 280 \text{ MPa}$.

Es demana:

a. Força màxima necessària de la premsa i energia absorbida en un tall



La força màxima a l'inici del tall és alhora la força necessària a la premsa:

$$F_{tall} = L \cdot g \cdot \tau_{tall} = 0,320 \cdot 0,003 \cdot 280 = 179200 \text{ N} = 268,8 \text{ kN}$$

L'energia de tall s'avalua per mitjà de la fórmula de l'enunciat (com que la força va disminuint a mesura que el tall avança fins a zero, correspon al producte de la força mitjana de tall –força inicial de tall dividida per 2–, multiplicada pel desplaçament, que és el gruix):

$$E_{tall} = \frac{L \cdot g^2 \cdot \tau_{tall}}{2} = \frac{0320 \cdot 0,003^2 \cdot 280}{2} = 403,2 \text{ J}$$

b. Potència necessària en el motor P_{75} i variació màxima d'energia del sistema durant un cicle ΔE_A

La potència necessària en el motor és l'energia absorbida pel tall en un cicle dividit pel temps d'un cicle ($T = (60 \text{ segons/ minut}) / (75 \text{ cicles/ minut}) = 0,8 \text{ s/cicle}$):

$$P_{75} = \frac{E_{tall}}{T_{75}} = \frac{403,2 \text{ J/cicle}}{0,8 \text{ s/cicle}} = 504,0 \text{ W}$$

La variació de l'energia del sistema és la proporcionada pel motor durant tot el cicle, excepte el temps durant el qual es realitza el tall:

$$\Delta E_A = E_{tall} \cdot \frac{\theta_{fin} - \theta_{ini}}{360} = 403,2 \cdot \frac{360 - (165,858 - 160)}{360} = 396,64 \text{ J}$$

c. Grau d'irregularitat δ_{75} del sistema

Aplicant la fórmula del grau d'irregularitat:

$$\delta_{75} = \frac{\Delta E_A}{\omega_p^2 \cdot J_p} = \frac{\Delta E_A}{(2 \cdot \pi / T_{75})^2 \cdot J_p} = \frac{396,64}{(6,2832 / 0,8)^2 \cdot 30} = 0,214$$

d. Si la cadència del sistema augmenta fins a 150 cicles/min, la nova potència del motor P_{150} i el nou grau d'irregularitat del sistema δ_{150}

Repetint les expressions:

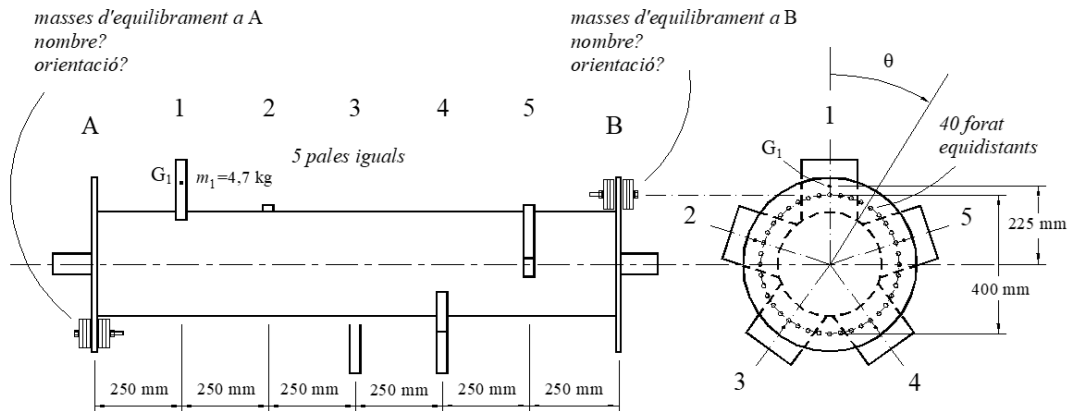
$$P_{150} = \frac{E_{tall}}{T_{150}} = \frac{403,2 \text{ J/cicle}}{0,4 \text{ s/cicle}} = 1008,0 \text{ W}$$

$$\delta_{150} = \frac{\Delta E_A}{\omega_p^2 \cdot J_p} = \frac{\Delta E_A}{(2 \cdot \pi / T_{150})^2 \cdot J_p} = \frac{396,64}{(6,2832 / 0,4)^2 \cdot 30} = 0,054$$

5.2.12 Rotor trossejador de pales

La figura mostra un rotor trossejador amb cinc pales disposades segons una espiral damunt de la seva perifèria. La base cilíndrica del rotor pesa 60 kg i se suposa ben equilibrada. Les pales pesen 4,7 kg cadascuna i el seu centre de masses G se situa excèntricament a $e = 225 \text{ mm}$.

Les valones extremes del rotor, A i B, presenten 40 forats de 12 mm, distribuïts uniformement sobre una circumferència de 400 mm de diàmetre, per col·locar-hi masses d'equilibrament formades per diverses peces circulars de 430 g cadascuna, formant paquets de N unitats unides per un conjunt cargol-femella de 120 g.



Es demana:

- Valor i orientació dels productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$ sobre els plans A i B, a fi d'equilibrar perfectament aquest rotor trossejador de pales

Per calcular els dos productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$, cal procedir a partir de les equacions de la pàgina 14 de *Mecanismes i màquines III. Dinàmica de màquines*. Les dades i els càlculs s'organitzen en el full de càlcul Excel que es mostra a continuació:

Càlcul de l'equilibrament

Dades		Càlculs				Desequilibri		Masses equilib.	
kg	mm	mm	°	kg·mm	kg·mm	kg·mm	kg·mm	kg	°
plans		a		$(m \cdot e)_{AX}$		$(m \cdot e)_{AY}$		$(m \cdot e)_A$ $\theta_{A\text{deseq}}$	
A		0		440,6	-606,5	749,6	-54,0	3,75	126,00
	m	e	θ	$(m \cdot e)_X$	$(m \cdot e)_Y$	$(m \cdot e)_X \cdot (l-a)/l$	$(m \cdot e)_Y \cdot (l-a)/l$		
i=1	4,7	225	250	0	1057,5	0,0	881,3	0,0	
2	4,7	225	500	-72	326,8	-1005,7	217,9	-670,5	
3	4,7	225	750	-144	-855,5	-621,6	-427,8	-310,8	
4	4,7	225	1000	-216	-855,5	621,6	-285,2	207,2	
5	4,7	225	1250	-288	326,8	1005,7	54,5	167,6	
Σ_i				0,0	0,0	440,6	-606,5		
B		1500				-440,6	606,5	749,6	126,0
						$(m \cdot e)_{BX}$	$(m \cdot e)_{BY}$	$(m \cdot e)_B$	$\theta_{B\text{deseq}}$
								m_B	θ_{Beq}

Primer requadre de xifres. Correspon a les dades: masses m (que poden ser considerades puntuals al seu centre de masses G); excentricitats respecte a l'eix de gir e ; distàncies a al pla d'equilibrament A; angle d'orientació θ respecte a la primera massa desequilibrada (v. figura).

Segon requadre de xifres. Correspon als càlculs efectuats: les projeccions dels productes $m \cdot e$ per a cadascuna de les masses puntuals desequilibrades sobre l'eix de les x ($\theta = 90^\circ$),



$(m \cdot e)_x$, i sobre l'eix de les y ($\theta = 0^\circ$), $(m \cdot e)_y$; repartiment d'aquests components dels productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$ sobre els plans A i B en funció de les distàncies a al pla d'equilibrament A . De fet, només cal trobar el producte al pla A ja que, essent el rotor equilibrat estàticament (repartiment angular uniforme de les 5 pales, $\Sigma (m \cdot e)_{Xi} = 0$ i $\Sigma (m \cdot e)_{Yi} = 0$), els productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$ seran iguals i de sentits contraris.

Tercer requadre de xifres. Correspon als resultats del càlcul del desequilibri sobre els dos plans d'equilibrament: *a)* productes $m \cdot e$ $(m \cdot e)_{A\text{deseq}}$ i $(m \cdot e)_{B\text{deseq}}$, per mitjà del teorema de Pitàgores; *b)* angles d'orientació $\theta_{A\text{deseq}}$ i $\theta_{B\text{deseq}}$, com a l'arc tangent dels quocients $(m \cdot e)_X / (m \cdot e)_Y$.

Quart requadre de xifres. Correspon als resultats de l'equilibrament. Concretament:

1. masses m_A i m_B ;
2. angles d'orientació θ_{Aeq} i θ_{Beq} .

b. Sabent que les masses equilibradores s'han de situar sobre alguns dels 40 forats de les valones coincidents amb els plans A i B , i que les masses equilibradores han de ser una combinació de peces circulars unides per un cargol-femella, quins són els forats i quin nombre de masses s'aproxima més a l'equilibrament ideal del rotor? I quin desequilibri residual subsisteix?

Per equilibrar el rotor, a partir dels resultats anteriors ($(m \cdot e)_A = 749,6 \text{ kg} \cdot \text{mm}$, $\theta_A = -54^\circ$, i $(m \cdot e)_B = 749,6 \text{ kg} \cdot \text{mm}$ i $\theta_B = 126^\circ$), cal situar unes determinades masses m_A i m_B amb una excentricitat sobre l'eix del rotor de $e_{Aeq} = e_{Beq} = 0,2 \text{ m}$ (situació dels forats sobre les valones) i en les orientacions oposades als desequilibris obtinguts anteriorment.

Masses equilibradores

Les masses equilibradores haurien de ser de:

$$m_{Aeq} = m_{Beq} = \frac{(m \cdot e)_A = (m \cdot e)_B}{e_A = e_B} = \frac{749,6}{200} = 3,748 \text{ kg}$$

Aquest valor es podria aconseguir per mitjà de 8 o 9 peces circulars (de 0,430 kg cadascuna), més el conjunt cargol-femella (0,120 kg) de masses:

$$m_{A(\text{real})} = m_{B(\text{real})} = 8 \cdot 0,43 + 0,12 = 3,560 \text{ kg} \quad \text{diferència de } -0,19 \text{ kg}$$

$$m_{A(\text{real})} = m_{B(\text{real})} = 9 \cdot 0,43 + 0,12 = 3,990 \text{ kg} \quad \text{diferència de } +0,24 \text{ kg}$$

Per tant, s'elegeixen 8 peces circulars (4 a cada costat dels plans A i B), amb un error inferior a 0,19 kg per a cadascuna de les dues masses.

Orientacions

Pel que fa a les orientacions de les masses d'equilibri, s'observa que els angles $\theta_A = 126^\circ$ ($-54+180$) i $\theta_B = -54^\circ$ ($126 - 180$) corresponen a un forat, ja que són múltiples de $360/40 = 9^\circ$. Per tant, en aquest cas, no hi ha error teòric.

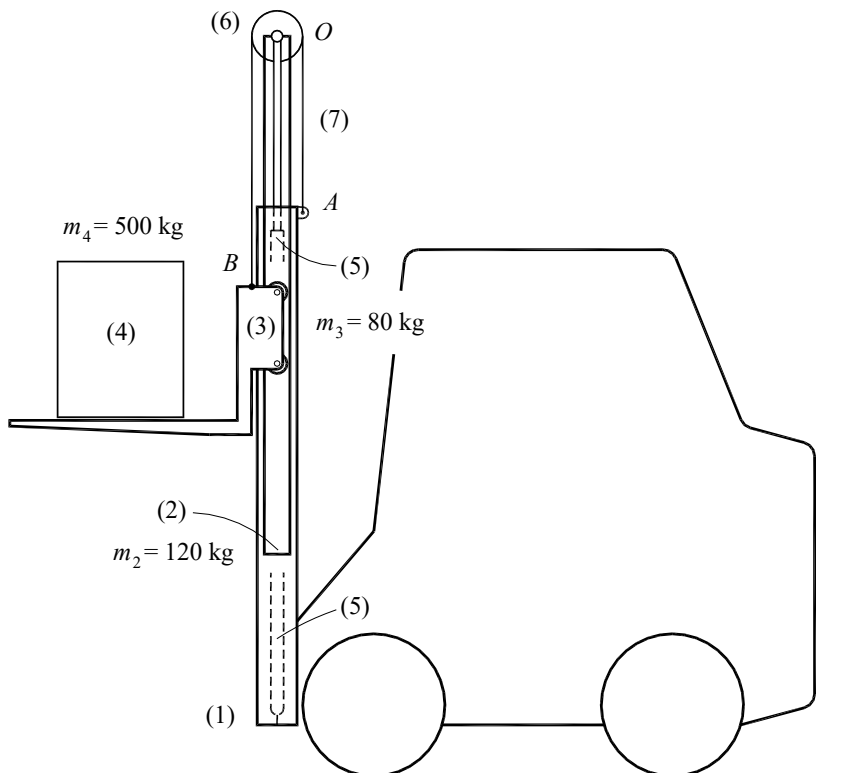
5.2.13 Dinàmica d'un carretó elevador (o toro mecànic)

La figura mostra l'esquema d'un carretó elevador en què es vol estudiar el sistema elevador.

Aquest està format per una guia vertical articulada al vehicle (1), una segona guia mòbil (2) que es mou telescòpicament amb la primera i una corredora (3) que es mou sobre la segona guia (2) i que porta les "banyes" sobre les quals suporta la càrrega (4). El cilindre pneumàtic d'elevació (5) actua verticalment sobre l'extrem superior de la guia telescòpica (2) on hi ha la politja (6), que empeny el cable (7) amb un extrem fix a la guia (1) al punt *A* i l'altre a la corredora (3) al punt *B*.

Amb aquest dispositiu, s'aconsegueixen dos resultats interessants: *a*) una altura petita del conjunt elevador quan està plegat i una altura molt més gran quan està desplegat; *b*) un efecte multiplicador del recorregut del cilindre (punt *O*) en l'elevació de la càrrega.

Per simplificar el sistema, no es consideren pèrdues per rendiments.



Es demana:

a. Força estàtica (amb el sistema parat) que ha de fer el cilindre hidràulic

El sistema hidràulic ha de suportar el pes de la guia telescòpica mòbil (2), unida directament a l'extrem de la tija del cilindre, més la tensió *T* dels dos ramals del cable (7), que serà igual, ja que la politja (6) és lliure.



L'extrem del cable unit a la corredora (3) suporta el pes de la pròpia corredora i el pes de la càrrega (4). Per tant, la força estàtica que ha de suportar el cilindre hidràulic és:

$$F_{Cest} = m_2 \cdot g + 2 \cdot T = m_2 \cdot g + 2 \cdot (m_3 + m_4) \cdot g = \\ = 120 \cdot 9,81 + 2 \cdot (80 + 500) \cdot 9,81 = 12.556,9 \text{ N}$$

b. *Massa reduïda m_O i força reduïda dels pesos $F_{O(P)}$ del sistema elevador a l'extrem del cilindre (5) (punt O)*

Massa reduïda m_O

En aquest sistema, hi ha tres cossos mòbils amb massa significativa, (2), (3) i (4), i dues velocitats lineals diferents, la velocitat del punt A de la guia mòbil (2) i la velocitat del punt G de la corredora (3) i la càrrega (4).

A més, una de les velocitats coincideix amb la de l'eix de reducció (punt A). Per tant, només cal trobar la relació de velocitats entre els punts G i O. Un extrem del cable (7) està unit a la guia fixa pel punt A i, per tant, no té velocitat.

En conseqüència, quan la politja s'elevi empesa pel cilindre (5) a una velocitat v_A , la politja de diàmetre d es veurà obligada a girar a la velocitat angular $\omega = v_A/(d/2)$. L'altre extrem del cable es mourà, doncs, a la velocitat:

$$v_B = v_O + \omega \cdot \frac{d}{2} = v_O + \frac{v_O}{d/2} \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot v_O \quad i_{BO} = \frac{v_B}{v_O} = 2$$

La massa reduïda de les parts mòbils del sistema d'elevació a l'eix de reducció lineal O és:

$$m_O = m_2 + (m_3 + m_4) \cdot \left(\frac{v_B}{v_O}\right)^2 = m_2 + (m_3 + m_4) \cdot 2^2 = m_2 + 4 \cdot (m_3 + m_4) = \\ = 120 + 4 \cdot (80 + 500) = 2.440 \text{ kg}$$

Força reduïda dels pesos $F_{O(P)}$

Sobre la base de les relacions de velocitats, la força reduïda dels pesos a l'extrem del cilindre O s'expressa de la manera següent:

$$F_{O(P)} = P_2 + (P_3 + P_4) \cdot \frac{v_B}{v_A} = P_2 + 2 \cdot (P_3 + P_4) = \\ = (m_2 + 2 \cdot (m_3 + m_4)) \cdot g = (120 + 2 \cdot (80 + 500)) \cdot 9,81 = 12.556,8 \text{ N}$$

c. *Força que ha de fer el cilindre sobre l'articulació O, F_{O-acc} , quan el sistema puja amb una acceleració de la càrrega (punt G) de 2 m/s^2*

Atès que s'han trobat primer la massa reduïda i la força reduïda dels pesos a l'eix de reducció A, i que les relacions de velocitats són constants, es pot aplicar l'equació de la dinàmica amb paràmetres reduïts.

Cal tenir en compte que l'acceleració de l'eix A també és la meitat de l'acceleració del punt B:

$$F_{O-acc} = F_{O(P)} + m_O \cdot a_{O-acc} = F_{O(P)} + m_O \cdot \frac{a_{B-acc}}{i_{BO}} = 12.556,8 + 2.440 \cdot \frac{2}{2} = 14.998,8 \text{ N}$$

Aquesta és una força lleugerament superior a l'estàtica causada pels pesos.

d. Força del cable F_{B-fre} i força del cilindre F_{O-fre} quan, baixant, es produeix una frenada sobtada de la càrrega (4) de 15 m/s^2

Aplicant novament la fórmula anterior, però ara per a una frenada sobtada (l'acceleració continua essent cap amunt), la força del cilindre és:

$$F_{O-fre} = F_{O(P)} + m_O \cdot a_{O-fre} = F_{O(P)} + m_O \cdot \frac{a_{B-fre}}{i_{BO}} = 12.556,8 + 2.440 \cdot \frac{15}{2} = 30.856,8 \text{ N}$$

Durant la frenada sobtada, el cable suporta directament el pes i les forces d'inèrcia de la corredora (3) i la càrrega (4):

$$F_{B-fre} = (m_3 + m_4) \cdot (g + a_{B-fre}) = (80 + 500) \cdot (9,81 + 15) = 14.389,8 \text{ N}$$

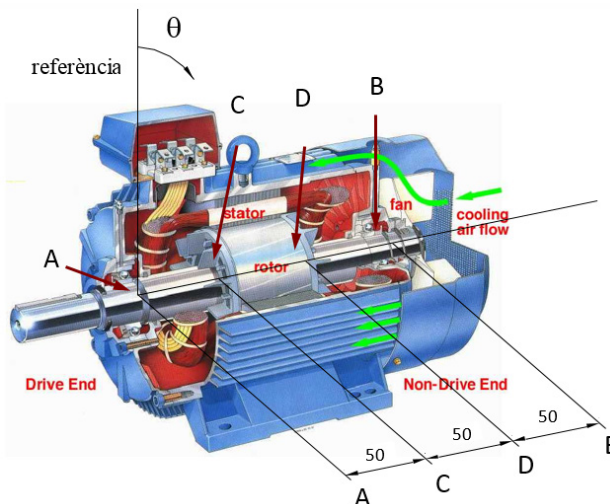
La força dinàmica sobre el cilindre F_{O-fre} també és dues vegades la força del cable F_{B-fre} , més el pes i la força d'inèrcia de la guia mòbil (2):

$$F_{O-fre} = 2 \cdot F_{B-fre} + m_3 \cdot \left(g + \frac{a_{B-fre}}{i_{BO}} \right) = 2 \cdot 14.389,8 + 120 \cdot \left(9,81 + \frac{15}{2} \right) = 30.856,8 \text{ N}$$

En aquest cas, la força del cilindre és sensiblement superior a l'estàtica.

5.2.14 Equilibrament de rotor de motor elèctric asíncron

La figura mostra un motor elèctric asíncron amb el rotor situat al seu interior. Per equilibrar el rotor, aquest se situa en una màquina d'equilibrar que mesura l'equilibri transmes a través dels rodaments. Quan el rotor gira a la velocitat angular de 1.000 min^{-1} , la màquina d'equilibrar detecta els desequilibris següents:



Pla A. Força màxima, $F_{A\max} = 0,025 \text{ N}$, segons un angle de $\theta_A = +40^\circ$ respecte a la direcció de referència assenyalada en el rotor.



Pla B. Força màxima, $F_{Bm\grave{a}x} = 0,020$ N, segons un angle de $\theta_B = +100^\circ$ respecte a la direcció de referència assenyalada en el rotor.

Es vol compensar aquest desequilibri en els plans d'equilibrament C i D dels extrems de la gàbia d'esquirol (la part de més diàmetre del rotor, $d_{rot} = 50$ mm). Es demana:

a. *Valors dels productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$ sobre els plans A i B on es mesuren les forces*

Per obtenir els dos productes $(m \cdot e)_A$ i $(m \cdot e)_B$, cal dividir les forces mesurades, $F_{Am\grave{a}x}$ i $F_{Bm\grave{a}x}$, pel quadrat de la velocitat angular en radiants:

$$(m \cdot e)_A = \frac{F_{Am\grave{a}x}}{\omega^2} = \frac{F_{Am\grave{a}x}}{(n \cdot \pi / 30)^2} = \frac{0,025}{(1.000 \cdot \pi / 30)^2} = 2,280 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m} = 2,280 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$(m \cdot e)_B = \frac{F_{Bm\grave{a}x}}{\omega^2} = \frac{F_{Bm\grave{a}x}}{(n \cdot \pi / 30)^2} = \frac{0,020}{(1.000 \cdot \pi / 30)^2} = 1,824 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m} = 1,824 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

D'ara endavant, es treballarà en g·mm.

b. *Valors dels productes $(m \cdot e)_C$ i $(m \cdot e)_D$ sobre els plans C i D de les masses equilibradores.*

En aquest cas, cal considerar les forces (o productes $(m \cdot e)$) mesurades com les causes (les dades) i calcular les reaccions (o productes $(m \cdot e)$) als plans C i D, sobre la base dels quals calcularem les masses (o forats) que s'han de sostreure.

Les dades d'aquest problema són (les distàncies en profunditat, a , es prenen amb referència a un dels dos plans de les reaccions; en aquest cas, C; $l = CD = 50$ mm):

$$\text{Pla A: } (m \cdot e)_A = 2,280 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad \theta_A = +40^\circ = 0,698 \text{ rad} \quad a_A = CA = -50 \text{ mm}$$

$$\text{Pla B: } (m \cdot e)_B = 1,824 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad \theta_B = +100^\circ = 1,745 \text{ rad} \quad a_B = CB = +100 \text{ mm}$$

Aplicant aquests valors a les equacions de l'equilibri, s'obté:

$$\text{Pla C: } (m \cdot e)_{Cx} = -(m \cdot e)_A \cdot \frac{l - a_A}{l} \cdot \cos(\theta_A) - (m \cdot e)_B \cdot \frac{l - a_B}{l} \cdot \cos(\theta_B) = -3,809 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$(m \cdot e)_{Cy} = -(m \cdot e)_A \cdot \frac{l - a_A}{l} \cdot \sin(\theta_A) - (m \cdot e)_B \cdot \frac{l - a_B}{l} \cdot \sin(\theta_B) = -1,135 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$(m \cdot e)_C = \sqrt{(m \cdot e)_{Cx}^2 + (m \cdot e)_{Cy}^2} = 3,975 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad \theta_C = \text{atan} \frac{(m \cdot e)_{Cy}}{(m \cdot e)_{Cx}} = 196,587^\circ$$

$$\text{Pla D: } (m \cdot e)_{Dx} = -(m \cdot e)_A \cdot \frac{a_A}{l} \cdot \cos(\theta_A) - (m \cdot e)_B \cdot \frac{a_B}{l} \cdot \cos(\theta_B) = 2,380 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$(m \cdot e)_{Dy} = -(m \cdot e)_A \cdot \frac{a_A}{l} \cdot \sin(\theta_A) - (m \cdot e)_B \cdot \frac{a_B}{l} \cdot \sin(\theta_B) = -2,127 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$(m \cdot e)_D = \sqrt{(m \cdot e)_{Dx}^2 + (m \cdot e)_{Dy}^2} = 3,192 \text{ g} \cdot \text{mm}$$

$$\theta_D = \text{atan} \frac{(m \cdot e)_{Dy}}{(m \cdot e)_{Dx}} = 318,213^\circ = -41,787^\circ$$

En general, aquestes màquines d'equilibrar actuen sobre el rotor fixat fent uns forats amb una broca sobre la superfície del rotor en l'orientació adequada, és a dir, traient massa en comptes d'afegir-ne. La gàbia d'esquirol es fabrica amb un aliatge d'alumini de densitat $\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$. Es demana:

c. Orientació ϑ_C i ϑ_D dels forats en els plans d'equilibrament C o D

Els valors i les orientacions dels productes $(m \cdot e)_C$ i $(m \cdot e)_D$ s'han obtingut a l'apartat anterior per a unes masses afegides. Si les masses són eliminades (forats), cal que les orientacions siguin les inverses. És a dir:

$$\theta_C = 196,587 - 180 = 16,587^\circ \quad \theta_D = 318,213 - 180 = 138,213^\circ$$

d. Suposant (per simplificar) que el centre de masses del forat se situa a la perifèria del rotor, quina seria la profunditat de cadascun dels dos forats, L_A i L_B (se suposen de forma cilíndrica), realitzats amb una broca de diàmetre $d_{bro} = 6 \text{ mm}$?

L'expressió del producte $(m \cdot e)$ en forma de forat a la perifèria (diàmetre de la broca $d_{bro} = 6 \text{ mm}$; longitud dels forats L_A i L_B ; material de base, alumini $\rho = 0,0027 \text{ g/mm}^2$; diàmetre del rotor $d_{rot} = 50 \text{ mm}$) és:

$$(m \cdot e) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot d_{bro}^2 \cdot L \right) \cdot \rho \cdot \frac{d_{rot}}{2}$$

A partir d'aquí, es poden establir les fórmules per determinar la profunditat de cadascun dels dos forats.

$$L_C = \frac{8 \cdot (m \cdot e)_C}{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho \cdot d_{rot}} = \frac{8 \cdot 3,975}{3,1416 \cdot 6^2 \cdot 0,0027 \cdot 50} = 2,083 \text{ mm}$$

$$L_D = \frac{8 \cdot (m \cdot e)_D}{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho \cdot d_{rot}} = \frac{8 \cdot 3,192}{3,1416 \cdot 6^2 \cdot 0,0027 \cdot 50} = 1,672 \text{ mm}$$

5.2.15 Desfrenada i caiguda d'un ascensor amb contrapès

Un dels accidents que es podria donar en un ascensor és la caiguda per fallada del fre de retenció. S'estudia la caiguda d'un ascensor carregat amb quatre persones (massa total: 750 kg) en la seva posició més alta (12 m, 4 plantes) amb un contrapès de 600 kg.

Suposant inicialment tan sols l'ascensor i el contrapès, sense la resta de cadena cinemàtica, es demana:

a. Força reduïda $F_{R(a)}$ i massa reduïda $m_{R(a)}$ al centre de masses de l'ascensor

Tant l'ascensor com el contrapès es mouen a la mateixa velocitat, però en sentit contrari (mentre un puja, l'altre baixa).

Reducció de forces

$$F_{R(a)} = -(m_a \cdot g) \cdot \frac{v_a}{v_R} - (m_{cp} \cdot g) \cdot \frac{v_{cp}}{v_R} = -(750 \cdot 9,81) \cdot 1 - (600 \cdot 9,81) \cdot (-1) = -1.471,5 \text{ N}$$



Reducció de masses

$$m_{R(a)} = m_a \cdot \left(\frac{v_a}{v_R} \right)^2 + m_{cp} \cdot \left(\frac{v_{cp}}{v_R} \right)^2 = 750 \cdot 1^2 + 600 \cdot (-1)^2 = 1.350 \text{ kg}$$

b. Acceleració de caiguda del sistema i velocitat amb què arriba a terra

Acceleració de caiguda

Atès que les relacions de velocitats són constants, es pot aplicar l'equació general de la dinàmica amb paràmetres reduïts. L'acceleració del punt de reducció és:

$$a_{R(a)} = \frac{F_{R(a)}}{m_{R(a)}} = \frac{-1.471,5}{1.350} = -1,090 \text{ m/s}^2$$

Velocitat d'arribada a terra

És un moviment de caiguda uniformement accelerat des d'una altura $e = 12 \text{ m}$, amb l'acceleració trobada a l'apartat anterior. Les equacions són:

$$e = \frac{1}{2} a_{R(a)} t^2 \quad v_{m\grave{a}x} = a_{R(a)} t \quad v_{m\grave{a}x} = \sqrt{2 \cdot e \cdot a_{R(a)}} = \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 1,09} = 5,11 \text{ m/s}$$

Com recorda l'enunciat, l'ascensor en caiguda lliure hauria arribat a terra a una velocitat de 15,34 m/s (55,24 km/h): 3,00 vegades més ràpid.

Suposant també la inèrcia de la cadena cinemàtica fins al motor d'accionament desactivat (reductor de relació de transmissió $i = 22,5$; tambor de diàmetre $d_{tamb} = 300 \text{ mm}$; moment d'inèrcia del rotor del motor $J_{mot} = 0,018 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; moment d'inèrcia del tambor $J_{tamb} = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$), es demana novament:

c. Massa reduïda del sistema $m_{R(a)}$ al centre de masses de l'ascensor

Ara la cadena cinemàtica s'amplia amb dos eixos més amb inèrcia significativa, tots dos de rotació: l'eix del tambor i l'eix del motor.

$$m_{R(a)} = m_a \cdot \left(\frac{v_a}{v_R} \right)^2 + m_{cp} \cdot \left(\frac{v_{cp}}{v_R} \right)^2 + J_{mot} \cdot \left(\frac{\omega_{mot}}{v_R} \right)^2 + J_{tamb} \cdot \left(\frac{\omega_{tamb}}{v_R} \right)^2$$

Per operar l'equació anterior, cal establir les noves relacions de velocitats (reductor de relació de transmissió del reductor $i_{red} = 22,5$; diàmetre del tambor $d_{tamb} = 0,3 \text{ m}$):

$$i_{tamb} = \frac{\omega_{tamb}}{v_R} = \frac{\omega_{tamb}}{\omega_{tamb} \cdot (d_{tamb} / 2)} = \frac{2}{d_{tamb}} = \frac{2}{0,3} = 6,667 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega_{mot}}{v_R} = \frac{\omega_{mot}}{\omega_{tamb}} \cdot \frac{\omega_{tamb}}{v_R} = i_{red} \cdot i_{tamb} = 22,5 \cdot 6,667 = 150 \text{ rad/s}$$

Aplicant valors a l'equació anterior (moment d'inèrcia del rotor del motor $J_{mot} = 0,018 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; moment d'inèrcia del tambor $J_{tamb} = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$), se n'obtenen els valors següents:

$$\begin{aligned} m_{R(a)} &= 750 \cdot 1^2 + 600 \cdot (-1)^1 + 0,018 \cdot 150^2 + 0,5 \cdot 6,666^2 = \\ &= 750 + 600 + 405,0 + 22,2 = 1.777,2 \text{ kg} \end{aligned}$$

Amb aquests nous eixos, la massa reduïda ha crescut un 31,6 %, fonamentalment a causa de la inèrcia del rotor del motor.

d. *Acceleració de caiguda del sistema, velocitat amb què arriba a terra i velocitat final a la qual gira el motor arrossegat*

Acceleració de caiguda

Amb la nova massa reduïda, l'acceleració del punt de reducció és:

$$a_{R(a)} = \frac{F_{R(a)}}{m_{R(a)}} = \frac{-1.471,5}{1.777,2} = -0,828 \text{ m/s}^2$$

Velocitat d'arribada a terra

És un moviment de caiguda uniformement accelerat des d'una altura $e = 12 \text{ m}$, amb l'acceleració trobada a l'apartat anterior. Les equacions són:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a_{R(a)} \cdot t^2 \quad v_{\text{màx}} = a_{R(a)} \cdot t \quad v_{\text{màx}} = \sqrt{2 \cdot e \cdot a_{R(a)}} = \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 1,09} = 4,46 \text{ m/s}$$

És lleugerament inferior a l'anterior (5,11 m/s) i encara a més distància de la velocitat en caiguda lliure: 15,34 m/s (55,24 km/h); 3,44 vegades més lenta.

Velocitat final del motor arrossegat

Simplement, cal aplicar la relació de velocitats a la velocitat final de l'ascensor:

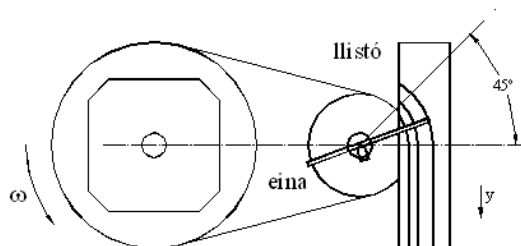
$$\omega_{\text{mot.màx}} = v_{\text{a.màx}} \cdot \left(\frac{\omega_{\text{mot}}}{v_a} \right) = 4,46 \cdot 150 = 668,7 \text{ rad/s} = 6.385,2 \text{ min}^{-1}$$

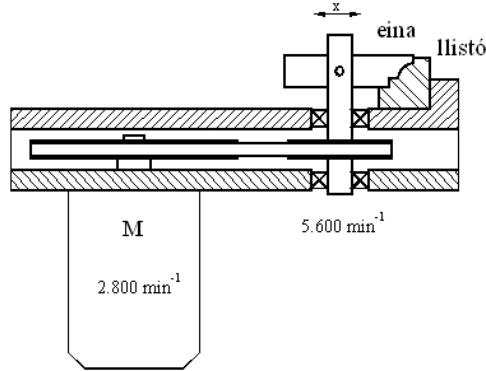
5.2.16 Dinàmica d'una màquina tupí de fusteria

Una tupí (o fresadora de fusteria) és una màquina que permet fabricar peces longitudinals amb ranures o perfils (a l'estil d'alguns llistons de marcs de portes). Una disposició elemental d'aquesta màquina es basa en un motor elèctric asíncron que, a través d'una transmissió de corretja, multiplica per dos la velocitat sobre l'eix de la tupí.

L'eina (que gira molt ràpid) és una platina d'acer amb la forma del tall que es vol fer que, a cada volta, treu un encenall del llistó que avança més lentament.

El motor proporciona 1.500 W i se suposa que l'eina treballa contra la fusta amb una força constant al llarg d'un angle de 45° (v. figura).





Es demana:

a. *Determineu l'eix principal de la màquina cíclica*

És l'eix de l'eina (no el del motor), ja que es produeix un cicle de variació de l'energia per a cada volta d'aquest eix.

b. *Diagrama de la massa o moment d'inèrcia reduït del sistema a l'eix principal al llarg d'un cicle. És constant o variable?*

Suposant que la transmissió per corretja és suficientment rígida, el moment d'inèrcia del sistema reduït a l'eix principal P (eix de l'eina) és:

$$J_B = J_{mot} \cdot \left(\frac{\omega_{mot}}{\omega_B} \right)^2 + J_{eina} = 0,0045 \cdot \left(\frac{2}{1} \right)^2 + 0,0025 = 0,0205 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La relació de transmissió de la corretja és constant i, per tant, el moment d'inèrcia reduït també ho és.

c. *Diagrama de la força o parell reduït resistent al llarg d'un cicle de l'eix principal*

Es pren com a referència del gir de l'eix principal (eix de l'eina) el moment en què l'eina inicia el contacte amb la fusta (45°). A partir d'aleshores es considera que el treball absorbit durant el tall disminueix l'energia cinètica del sistema i, per tant, la velocitat.

Els valors i les orientacions dels productes $(m \cdot e)_C$ i $(m \cdot e)_D$ s'han obtingut a l'apartat anterior per a unes masses afegides. Si les masses són eliminades (forats), cal que les orientacions siguin les inverses. És a dir:

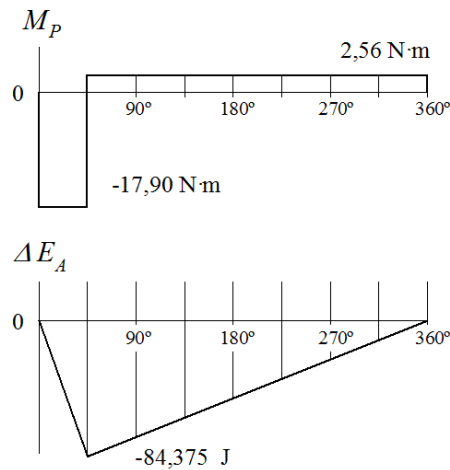
$$\theta_C = 196,587 - 180 = 16,587^\circ$$

$$\theta_D = 318,213 - 180 = 138,213^\circ$$

d. *Profunditat de cadascun dels dos forats L_A i L_B (que se suposen de forma cilíndrica), realitzats amb una broca de diàmetre $d_{bro} = 6 \text{ mm}$*

L'expressió del producte $(m \cdot e)$ en forma de forat a la perifèria (diàmetre de la broca $d_{bro} = 6 \text{ mm}$; longitud dels forats L_A i L_B ; material de base, alumini $\rho = 0,0027 \text{ g/mm}^3$; diàmetre del rotor $d_{rot} = 50 \text{ mm}$) és:

$$(m \cdot e) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot d_{bro}^2 \cdot L \right) \cdot \rho \cdot \frac{d_{rot}}{2}$$



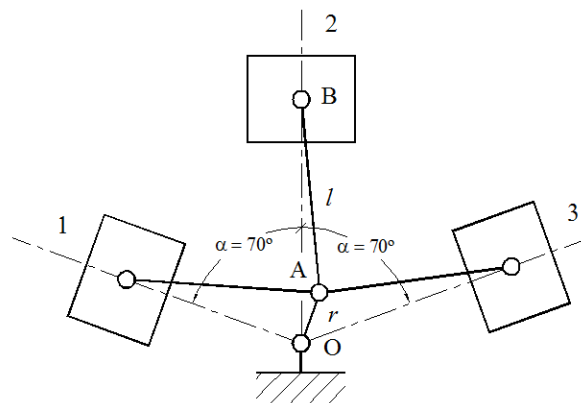
A partir d'aquí, es poden establir les fórmules per determinar la profunditat de cadascun dels dos forats:

$$L_C = \frac{8 \cdot (m \cdot e)_C}{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho \cdot d_{rot}} = \frac{8 \cdot 3,975}{3,1416 \cdot 6^2 \cdot 0,0027 \cdot 50} = 2,083 \text{ mm}$$

$$L_D = \frac{8 \cdot (m \cdot e)_D}{\pi \cdot d_{bro}^2 \cdot \rho \cdot d_{rot}} = \frac{8 \cdot 3,192}{3,1416 \cdot 6^2 \cdot 0,0027 \cdot 50} = 1,672 \text{ mm}$$

5.2.17 Equilibrament d'un motor tricilíndric

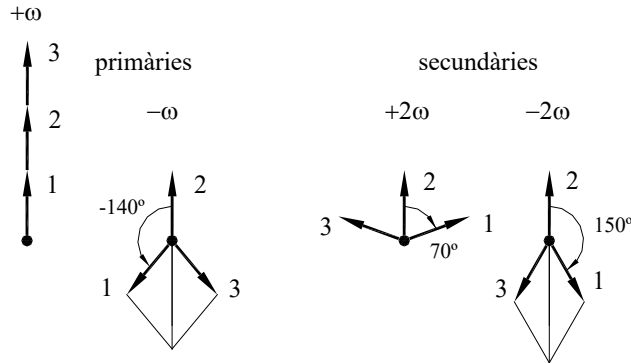
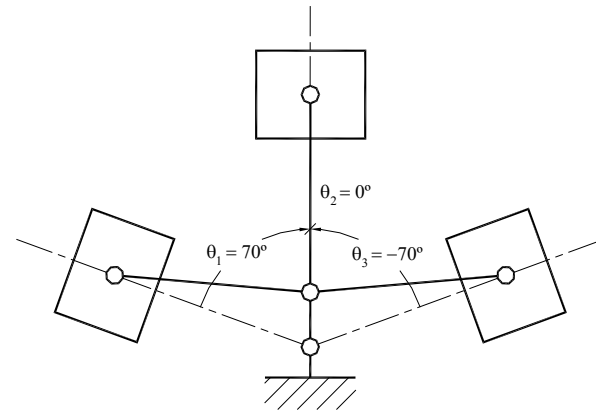
La figura mostra l'esquema d'un motor tricilíndric pla amb les bieles dels tres cilindres articulades al mateix colze del cigonyal.



A partir de la posició del mecanisme que més convingui, es demana:



a. Grau d'equilibrament de les forces d'inèrcia primàries i secundàries si és l'angle $\vartheta = 70^\circ$ (angle de la figura)



La figura mostra el grau d'equilibrament de cadascun dels quatre rotors i contrarotors virtuals del motor tricilíndric amb $\theta = 70^\circ$. Per a cadascun dels casos, s'indica l'angle de la força d'inèrcia corresponent del cilindre 1 respecte a l'eix de simetria del motor.

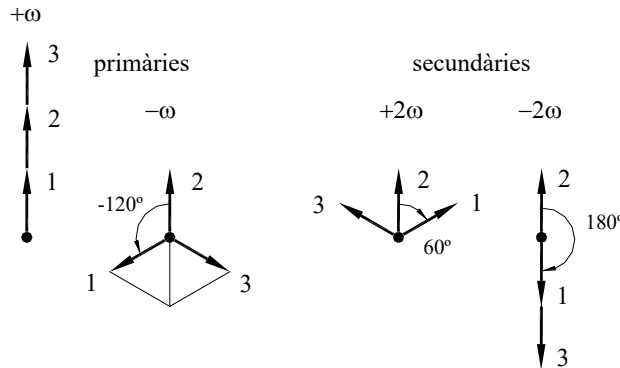
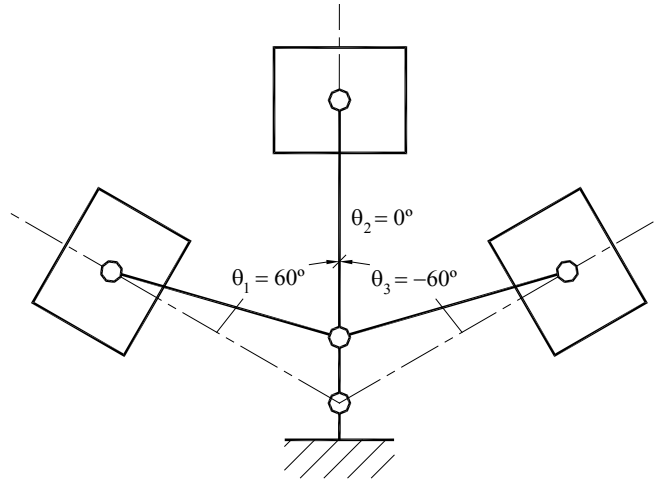
Les forces d'inèrcia primàries a $-\omega$ no s'equilibren. Les corresponents als cilindres 1 i 3 sumen $\sqrt{3}/2$ vegades la força d'inèrcia del cilindre 2 de sentit contrari.

b. Hi ha algun angle ϑ per al qual s'anul·len les forces primàries a $-\omega$?

Sí. Perquè les forces d'inèrcia dels tres cilindres sumin 0 cal que estiguin disposades a 120° . Això es dona per a les forces d'inèrcia primàries a $-\omega$ quan l'angle $\alpha = 60^\circ$ (la figura es mostra a l'apartat següent).

c. Per a l'angle α obtingut a l'apartat apartat 2, el grau d'equilibrament de la resta de forces primàries i secundàries

La figura mostra el resultat complet de l'anàlisi dels equilibris dels diferents rotors i contrarotors virtuals del motor tricilíndric per al cas de $\alpha = 60^\circ$.



- d. Per a l'angle α obtingut a l'apartat 2, i essent la massa alternativa $m_{alt} = 0,120 \text{ kg}$ i les distàncies $r = OA = 0,025 \text{ m}$ i $l = AB = 0,090 \text{ m}$, calculeu el contrapès que cal situar sobre l'eix del cigonyal per equilibrar les forces d'inèrcia primàries a $+\omega$ (excentricitat del contrapès sobre el cigonyal, $e = 0,030 \text{ m}$).

El producte $(m \cdot e)$ corresponent al desequilibri de les forces primàries dels tres cilindres és:

$$(m \cdot e)_{p+\omega} = \frac{F_{ip+\omega}}{\omega^2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m_{alt} \cdot r = \frac{3}{2} \cdot 0,120 \cdot 0,025 = 0,00454 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

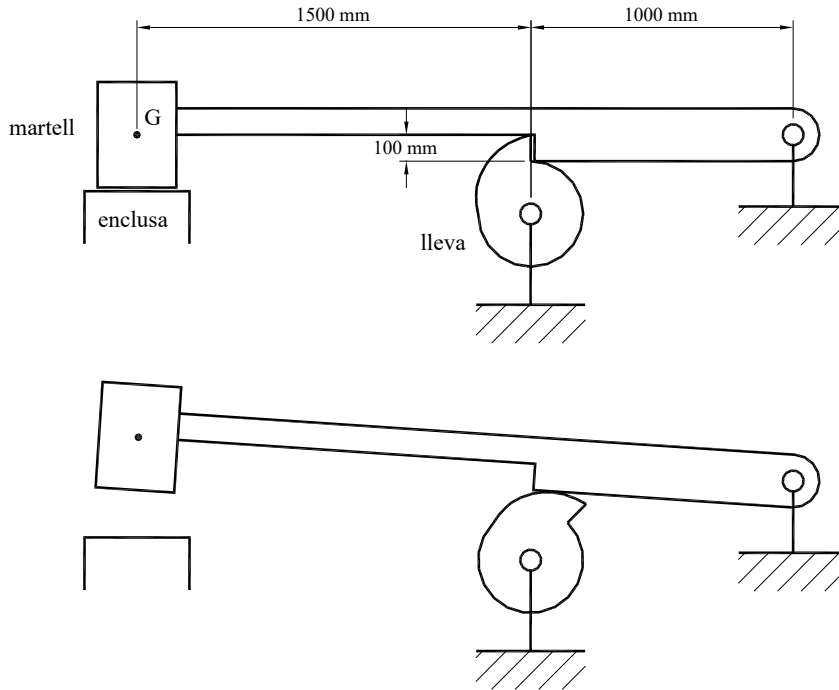
Per equilibrar-ho a una distància de $e = 0,030 \text{ m}$, cal una massa de:

$$m_{eq-p+\omega} = \frac{(m \cdot e)_{p+\omega}}{e} = \frac{0,00454}{0,030} = 0,15133 \text{ kg} = 151,33 \text{ g}$$

És probable que, per raons constructives, s'hagin de posar dues masses de valor la meitat a cada costat del colze del cigonyal.

5.2.18 Dinàmica d'un martell de piló

La figura mostra l'esquema d'un martell de piló mogut per un arbre amb una lleva. L'eix de la lleva està connectat a una roda hidràulica accionada per un corrent d'aigua.



La lleva és del tipus de cor i fa pujar el martell (equivalent a 100 kg en el punt d'aplicació) a una velocitat constant durant un gir de 90° . Després, la lleva s'interromp i el martell salta de cop fins a topar amb l'enclusa. El corrent d'aigua d'1,5 m/s actua tangencialment a una distància de 2,5 m sobre la roda hidràulica de 5,5 m de diàmetre d'un moment d'inèrcia de $250 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Es demana:

- a. Valor del parell resistent sobre l'eix principal (P , eix de la lleva i la roda hidràulica) durant l'elevació del martell

El martell, de massa equivalent 100 kg al punt G , s'eleva a una velocitat constant durant $1/4$ de la volta de l'eix principal, P . El valor de l'elevació al punt de contacte amb la lleva és de 100 mm (v. figura). Aplicant relacions geomètriques senzilles al braç del martell, l'elevació del punt G és:

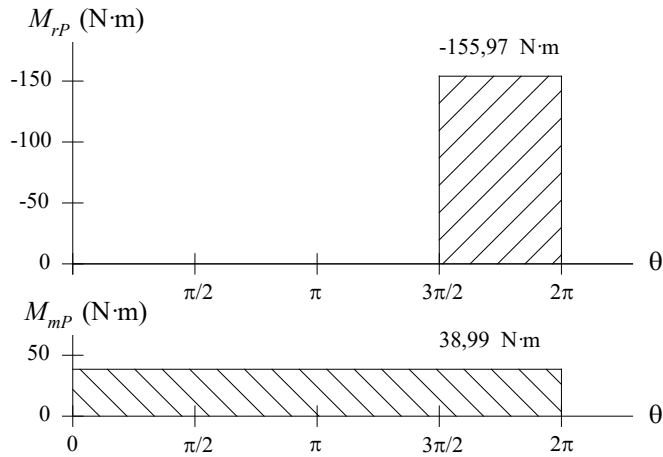
$$\Delta h_G = \Delta h_{lleva} \cdot \frac{1.500 + 1.000}{1.000} = 100 \cdot \frac{2.500}{1.000} = 250 \text{ mm}$$

Aplicant el principi dels treballs virtuals durant el primer quart de volta ($\pi/2$) durant el qual s'eleva el martell, permet obtenir el valor mitjà del parell receptor reduït a l'eix principal:

$$M_{rP} = (m_G \cdot g) \cdot \frac{\Delta h_G}{\Delta \theta_P} = 100 \cdot 9,8 \cdot \frac{0,25}{(3,1416/2)} = 155,97 \text{ N}\cdot\text{m}$$

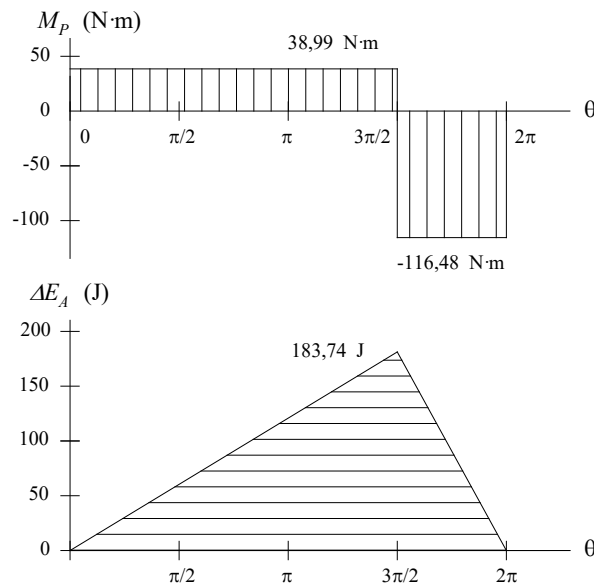
b. *Diagrames del parell motor i del parell resistent a l'eix principal prenent com a referència l'angle ϑ*

Atès que la velocitat d'elevació és constant, el parell receptor reduït a l'eix principal P també ho serà durant el darrer quart de volta. El parell motor serà constant al llarg de tot el cicle i de valor quatre vegades inferior, 38,99 N·m.



c. *Variació màxima de l'energia del sistema durant el cicle ΔE_c i velocitat mitjana de l'eix principal ω_P*

Per calcular la variació màxima de l'energia del sistema durant el cicle, cal determinar el parell total (motor + receptor) a l'eix principal i integrar-lo al llarg d'un cicle. La figura següent proporciona aquests resultats:





És a dir, $\Delta E_A = 183,74 \text{ J}$.

Es pot associar la velocitat mitjana de la roda hidràulica a la del corrent d'aigua:

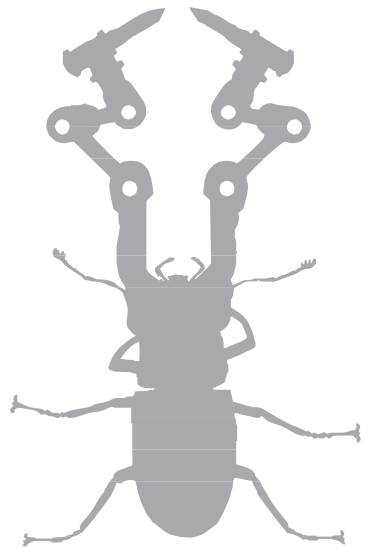
$$\omega_p = \frac{v_T}{r} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \text{ rad/s}$$

d. *Grau d'irregularitat de l'eix principal δ . És un valor acceptable o seria necessari un volant addicional?*

El valor del grau d'irregularitat és:

$$\delta = \frac{\Delta E_A}{J_p \cdot \omega_p^2} = \frac{183,74}{250 \cdot 0,6^2} = 2,04$$

Aquest valor del grau d'irregularitat no és acceptable. La màquina s'aturaria.







Bibliografia

- AGULLÓ I BATLLE, J. (1995): *Mecànica de la partícula i del sòlid rígid*. Barcelona: Publicacions OK Punt. ISBN: 84-920850-6-1, 414 pàgines.
- CARDONA FOIX, S.; CLOS COSTA, D. (2000): *Teoria de màquines*. Barcelona: Edicions UPC (Col·lecció Politext, 80). ISBN: 978-84-9880-379-2.
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.3/36644/9788498803792.pdf>
- RAMON MOLINER, P. (1980): *Vibraciones*. Barcelona: Centre de Publicacions d'Abast, ETSEIB-UPC.
- RIBA ROMEVA, Carles (1988): *Selecció de motors i transmissions en el projecte mecànic. Introducció, articles i recull de documentació*. Barcelona: Centre de Publicacions d'Abast, núm. edició M434, ETSEIB-UPC. Dipòsit Legal: B: 13 223-1997.
- RIBA ROMEVA, Carles (1994): *Disseny de màquines I. Mecanismes*. Barcelona: Edicions UPC (Col·lecció TEM, 13). ISBN: 84-7563-482-, 111 pàgines.
- RIBA ROMEVA, C. (1994): *Disseny de màquines II. Estructura constructiva*. Barcelona: Edicions UPC (Col·lecció TEM, 14). ISBN 84-7653-447-7.
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.3/36688/9788498800807.pdf>
- RIBA ROMEVA, Carles (1999): *Mecanismes i màquines I. El frec en les màquines*. Barcelona: Edicions UPC (Aula Politècnica, 19). ISBN: 84-8301-652-4 (ISBN de l'obra completa, 84-8301-445-9), 170 pàgines.
<http://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36254>
- RIBA ROMEVA, Carles (1999): *Mecanismes i màquines II. Transmissions d'engranatges*. Barcelona: Edicions UPC (Aula Politècnica, 20). ISBN: 84-8301-620-6 (ISBN de l'obra completa, 84-8301-352-5), 194 pàgines.
<http://upcommons.upc.edu/handle/2099.3/36526>
- RIBA ROMEVA, Carles (2000): *Mecanismes i màquines III. Dinàmica de màquines*. Barcelona: CPDA Edicions UPC (Aula Politècnica, 21). ISBN: 84-8301-347-9 (ISBN de l'obra completa, 84-8301-352-5), 214 pàgines.
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.3/36255/9788498802221.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

