

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Mecánica fundamental →
Mecánica newtoniana para la ingeniería

Xavier Jaén
Josep Salud
Carina Serra
Jaume Calaf
Maria Khoury



69

ENGINYERIES
INDUSTRIALS



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecánica fundamental →
Mecánica newtoniana para la ingeniería

Xavier Jaén
Josep Salud
Carina Serra
Jaume Calaf
Maria Khoury

Los autores y los colaboradores: Manel Canales, Josep Sempau y Claudia Grossi, forman parte del profesorado del departamento de física de la UPC.

Diseño y maquetación en \LaTeX realizada por los autores, basada en Tufte-Latex de Bil Kleb, Bill Wood y Kevin Godby (2007-2015) que a su vez se han inspirado en los trabajos de Edward Tufte.

Primera edición: enero de 2023

© Los autores, 2023

© Iniciativa Digital Politècnica, 2023
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Edificio K2M, Planta S1, Despacho S103-S104
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

ISBN digital: 978-84-19184-63-4
ISBN paper: 978-84-19184-62-7
DL B. 3333-2023



Los contenidos de esta obra estan sujetos a la licencia de Creative Commons: Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0.

Prólogo	11
1 Fundamentos fisicomatemáticos de la mecánica	17
Introducción	17
1.1 Espacio, tiempo y sistemas de referencia	17
1.2 Coordenadas cartesianas euclidianas. Distancia	18
1.3 Escalares y vectores	18
1.4 Principio de simetría	24
1.5 Medición y tratamiento de los datos experimentales	25
1.6 Primera ley de Newton. Sistemas de referencia inerciales	33
1.7 Cinemática del punto: posición, trayectoria, velocidad y aceleración	37
2 Dinámica de una partícula	45
Introducción	45
2.1 Primera y segunda leyes de Newton	46
2.2 Fuerza y cantidad de movimiento	51
2.3 Momento de una fuerza y momento angular de una partícula	53
2.4 Trabajo, energía cinética y energía potencial. Potencia	56
2.5 Algunas fuerzas	65
3 Dinámica de N partículas	77
Introducción	77
3.1 Fuerzas entre partículas. Segunda y tercera leyes de Newton	77
3.2 Fuerza resultante y centro de masas	78
3.3 Cantidad de movimiento	83
3.4 Momento angular	84
3.5 Trabajo, energía cinética y energía potencial	87
3.6 Choques	92
3.7 Interacción gravitatoria y electromagnética	94
3.8 Ligaduras y reacciones. Desplazamientos posibles y desplazamientos virtuales	97



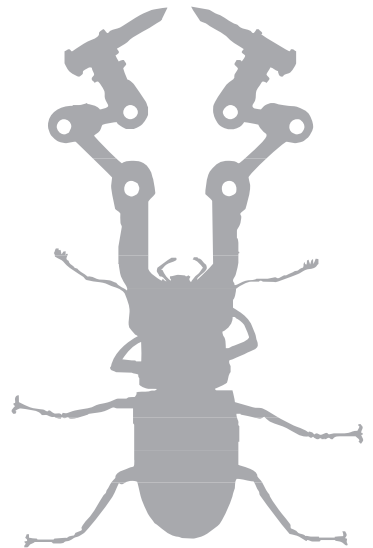
3.9	Ecuación general de la dinámica o principio de D'Alembert	101
3.10	Sistema con ligaduras conservativo. Conservación de la energía	102
3.11	Sólido rígido	107
3.12	Tópicos de cinemática del sólido	109
3.13	Ecuaciones de movimiento del sólido rígido	113
3.14	Par de fuerzas	116
4	Estática de los sólidos rígidos	121
	Introducción	121
4.1	Estática del sólido: condiciones de equilibrio	121
4.2	Peso y centro de gravedad	124
4.3	Fuerzas sobre sólidos debidas a fluidos gravitantes. Principio de Arquímedes	124
4.4	Ligaduras y fuerzas de reacción	129
4.5	Estática de N sólidos rígidos	129
4.6	Principio de los trabajos virtuales	132
4.7	Equilibrio y estabilidad de sistemas conservativos	134
5	Dinámica del sólido rígido en el plano	139
	Introducción	139
5.1	Ecuación de traslación 3D	140
5.2	Ecuación de rotación para el movimiento plano (2D)	140
5.3	Energía cinética de rotación y traslación. Conservación de la energía	148
6	Pequeñas oscilaciones	157
	Introducción	157
6.1	Pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable	157
6.2	Movimiento armónico simple (MAS)	158
6.3	Movimiento armónico amortiguado (MAA)	161
6.4	Movimiento armónico forzado (MAF)	165
7	Ondas mecánicas	171
	Introducción	171
7.1	Ondas	171
7.2	Ondas planas y ecuación de ondas	175
7.3	De las leyes de Newton a la ecuación de ondas	182
7.4	Análisis y síntesis de Fourier	190
8	Fenómenos ondulatorios	195
	Introducción	195
8.1	Potencia e intensidad de las ondas planas	195
8.2	Potencia e intensidad de las ondas esféricas	200



8.3	Transmisión y reflexión de una onda en un cambio de medio	202
8.4	Interferencias y batidos	205
8.5	Ondas estacionarias	209
8.6	Efecto Doppler y ondas de choque	215
8.7	Difracción	218
9	Ecuaciones de Lagrange	221
	Introducción	221
9.1	Ecuaciones de Lagrange de segunda clase	221
9.2	Ecuaciones de Lagrange	223
1	Problemas y cuestiones	229
	1.5 Medición y tratamiento de datos experimentales	230
	1.7 Cinemática del punto: posición, trayectoria, velocidad y aceleración	230
2	Problemas y cuestiones	233
	2.1 Segunda ley de Newton. Fuerza y masa. Mecánica predictiva. Superposición	233
	2.2 Fuerza y cantidad de movimiento	234
	2.3 Momento de una fuerza y momento angular de una partícula	236
	2.4 Trabajo, energía cinética y energía potencial. Potencia	237
	2.5 Algunas fuerzas	242
3	Problemas y cuestiones	249
	3.2 Centro de masas	249
	3.3 Cantidad de movimiento	253
	3.4 Momento angular	254
	3.5 Trabajo, energía cinética y energía potencial	255
	3.6 Choques	256
	3.7 Interacción gravitatoria y electromagnética	258
	3.10 Sistema con ligaduras conservativo. Conservación de la energía	259
	3.12 Tópicos de cinemática del sólido	260
	3.13 Ecuaciones de movimiento del sólido rígido	261
4	Problemas y cuestiones	263
	4.2 Peso y centro de gravedad	263
	4.3 Fuerzas sobre sólidos debidas a fluidos gravitantes. Principio de Arquímedes	263
	4.5 Estática de sólidos N rígidos	266
	4.7 Equilibrio y estabilidad de sistemas conservativos	275
5	Problemas y cuestiones	283
	5.2 Ecuación de rotación para el movimiento plano (2D)	283
	5.3 Energía cinética de rotación y traslación. Conservación de la energía	291



6 Problemas y cuestiones	297
6.2 Movimiento armónico simple (MAS)	297
6.3 Movimiento armónico amortiguado (MAA)	304
6.4 Movimiento armónico forzado (MAF)	307
7 Problemas y cuestiones	319
7.2 Ondas planas y ecuación de ondas	319
7.3 De las leyes de Newton a la ecuación de ondas	321
7.4 Análisis y síntesis de Fourier	322
8 Problemas y cuestiones	325
8.1 Potencia e intensidad de las ondas planas	325
8.2 Potencia e intensidad de las ondas esféricas	325
8.3 Transmisión y reflexión de una onda en un cambio de medio	326
8.4 Interferencias y latidos	328
8.5 Ondas estacionarias	331
8.6 Efecto Doppler y ondas de choque	335
Soluciones a las cuestiones	339
Tablas	343





Prólogo

La mecánica es una rama de la física que trata de las relaciones que tienen los objetos materiales con el espacio y el tiempo. El hecho de tratar con unas nociones tan básicas hace que la mecánica presente unas características y una problemática específicas:

- La mecánica actúa como metalenguaje¹ de la física. Es en la mecánica donde hemos de decir algo de lo que entendemos por materia, espacio, tiempo. A pesar de que conceptos como los de fuerza o energía se emplean en muchas ramas de la física, es en la mecánica donde encuentran su primera definición, sobre la cual se asientan las demás.
- La mecánica trata con conceptos muy básicos, que encontramos también en la vida cotidiana, desvinculados de la física. Así, palabras como *longitud*, *distancia*, *tiempo*, *velocidad*, *fuerza*, *trabajo*, *energía*, así como *mecánica*, las utilizamos diariamente en contextos muy diferentes. Cuando nos movemos en entornos cotidianos, no siempre actuamos de manera racional, y todavía menos científica, lo cual es muy recomendable, aunque tiene la pega de que generamos toda una serie de intuiciones que, sin quererlo, acabamos empleando en el contexto de la mecánica como ciencia, y ello ya no es tan recomendable.
- El concepto de mecánica también se emplea en muchos contextos diferentes dentro y fuera de la física. Así, por ejemplo, tenemos:
 - **Mecánica clásica.** Es la que trata con objetos cuyas dimensiones son mucho mayores que las de los átomos y moléculas, para los cuales no tenemos problemas al tomar medidas espacio-temporales sin alterarlos sustancialmente.
 - **Mecánica cuántica.** Es la complementaria a la clásica. Surge cuando tratamos con objetos extremadamente pequeños, del orden de los átomos y las moléculas, para los cuales tenemos problemas al tomar medidas espacio-temporales porque, con ello, los alteramos sustancialmente. No sabemos cómo hacerlo; según la mecánica cuántica, no es posible sin que se produzca esta alteración.

¹ Un metalenguaje es un lenguaje artificial formado por un repertorio de axiomas, postulados y reglas, que sirven para describir otros lenguajes, artificiales o naturales.

- **Mecánica newtoniana.** Es una mecánica clásica que trata con objetos que se mueven a velocidades pequeñas, comparadas con la de la luz.
- **Mecánica relativista.** Es la que trata con objetos que se mueven a gran velocidad, comparada con la de la luz. Puede ser clásica, como la newtoniana, o cuántica. Todavía hoy se intentan establecer los fundamentos de la mecánica cuántica relativista.
- Mecánica de medios continuos, mecánica de fluidos, mecánica del sólido rígido, mecánica estadística, mecánica analítica, mecánica de campos, ingeniería mecánica, biomecánica...

De todas estas, aquí trataremos de la mecánica newtoniana, que es una mecánica clásica no relativista. Trata con objetos que no son extremadamente pequeños ni excesivamente rápidos. Ello abarca una buena parte del mundo que nos rodea. Para entendernos, la mecánica newtoniana es la mecánica *del mundo cotidiano*. Debemos ir con mucho cuidado y evitar las intuiciones no fundamentadas.

El capítulo 1 trata de los fundamentos más básicos de la mecánica: qué entendemos por espacio y tiempo, pero también qué partes de las matemáticas nos serán útiles para describir las magnitudes de la mecánica y su medición. Caracterizaremos las curvas trazadas por puntos en el espacio, pero también su relación con el tiempo: estudiamos la cinemática, que podemos entender como una extensión de la geometría usual al espacio-tiempo. En este capítulo, se introducen los conceptos de sistema de referencia, primera ley de Newton, posición, velocidad y aceleración, entre otros.

El capítulo 2 trata de definir el objeto estrella de la mecánica newtoniana: la partícula *newtoniana*. Este concepto nos permitirá, más adelante, construir objetos más próximos a los reales, como los sólidos rígidos. Y este objetivo nos lleva a definir la partícula newtoniana. Trataremos de la dinámica de la partícula, es decir, de la trayectoria temporal que traza cuando se somete a diferentes fuerzas. En este capítulo, se introducen la ley del movimiento de Newton y los conceptos de cantidad de movimiento, momento angular, fuerza, momento de una fuerza, trabajo y energía, entre otros.

En el capítulo 3 podemos decir que *vamos al grano*. Extendemos los conceptos introducidos en el capítulo anterior a un conjunto N de partículas. Este N podemos entenderlo como un número finito (1, 2, 3...) ¡o infinito! En este último caso, estaremos tratando con cuerpos continuos. Veremos cómo los conceptos introducidos para N finito podemos trasladarlos al caso continuo sin problemas. Empezaremos distinguiendo entre fuerzas internas y externas, y viendo la ley de acción-reacción de Newton. Introduciremos el concepto fundamental de ligadura y de reacciones ideales. Llegaremos así a la parte central del desarrollo de la mecánica: la *ecuación*

general de la dinámica. Esta ecuación es importante porque permite tratar sistemas mecánicos complejos, que los ingenieros denominarían *mecanismos* o *máquinas*, aprovechando al máximo el conocimiento de la geometría del mecanismo y eliminando las fuerzas de reacción que aparecen como consecuencia de este mecanismo. En los sistemas conservativos con un grado de libertad, podemos emplear las propiedades de la *función energía mecánica del sistema* como método de resolución. Para los sistemas con más de un grado de libertad y/o con ligaduras dependientes del tiempo — que quedan fuera del alcance de este libro —, la ecuación general de la dinámica nos llevaría a la mecánica lagrangiana, que introducimos en el capítulo 9 solo para los lectores ávidos de mecánica. En este capítulo 3, introduciremos también el *sólido rígido*, entendido como un sistema de partículas ligadas. La dinámica del sólido rígido no la trataremos aquí, sino en el capítulo 5, mientras que en el capítulo 4 abordaremos la estática de los sólidos rígidos.

Es aquí donde se introduce, en general, el concepto de velocidad *angular*.

El capítulo 4 trata, pues, de la estática o, más generalmente, de los problemas de equilibrio de los sistemas de sólidos rígidos, que incluyen el estudio de la estabilidad de este equilibrio. También explica cómo representar bien algunas fuerzas externas sobre los sólidos, como es el caso del peso y de las fuerzas ejercidas por fluidos gravitantes sobre los sólidos que están en contacto. El problema de la estática se plantea como un problema inverso de mecánica. Si, en general, el problema estándar de la mecánica es encontrar el movimiento del sistema sometido a unas fuerzas conocidas, ahora este *movimiento* es conocido, puesto que queremos que se mantenga en reposo. Las incógnitas, más allá de las fuerzas de reacción, serán algunas otras fuerzas o la misma configuración del sistema.

El capítulo 5 trata de la dinámica del sólido rígido. Para ello, será necesario acabar de expresar las ecuaciones de movimiento halladas en el capítulo 3, en función de los grados de libertad adecuados. Por razones de dificultad, restringiremos nuestro estudio a situaciones en que las rotaciones tienen el eje en una dirección fija del espacio, que denominaremos *rotaciones 2 D*.

Es aquí donde introducimos el concepto de *momento de inercia respecto a un eje*.

El capítulo 6 aborda el problema de las pequeñas oscilaciones en sistemas con un grado de libertad. Veremos que este problema es de gran interés debido a que cualquier sistema en equilibrio estable, ante pequeñas desviaciones de esta configuración, realiza un movimiento armónico cuyas características son independientes del conocimiento exacto de las fuerzas que actúan. Por ello, realizaremos este estudio con un cierto grado de abstracción, introduciendo el concepto de ecuación canónica del movimiento armónico para los casos simple, amortiguado y forzado. En este capítulo, se introducen además los conceptos de elongación, pulsación, período, amplitud y fase, así como el importante concepto de resonancia.

Los capítulos 7 y 8 están dedicados al estudio de los fenómenos ondulatorios, entendidos como fenómenos mecánicos. Se puede entender el estudio del movimiento ondulatorio como una extensión del estudio del movimiento armónico realizado en el capítulo 6, pero, por su complejidad y por la variedad de fenómenos perceptibles que abarca, lo hemos tratado de una forma más próxima a la fenomenología que al puro desarrollo matemático formal.

El capítulo 9, como ya hemos comentado, ofrece una breve introducción a la mecánica analítica y su relación con la mecánica newtoniana a través de la ecuación general de la dinámica. Partiendo de esta, se deducen las ecuaciones de movimiento de Lagrange para sistemas con ligaduras geométricas dependientes del tiempo, que serían la extensión a L grados de libertad de las ecuaciones encontradas en el capítulo 3 para sistemas conservativos empleando la función de la energía mecánica del sistema, que ahora sería substituida, en cierto modo, por la función de Lagrange o lagrangiana. No profundizamos más porque el único objetivo es hacer de puente entre la mecánica newtoniana y la lagrangiana, analítica en general, que podemos encontrar en multitud de textos.

Finalmente, cabe señalar que cada capítulo contiene, en paralelo al desarrollo de la teoría, algunos problemas resueltos que ayudan y contextualizan esta teoría. En la parte final del libro, se proporcionan, ordenados por capítulos y secciones, más problemas y cuestiones. Algunos de ellos ya están resueltos y del resto se da la solución.



→ 1

1 Fundamentos fisicomatemáticos de la mecánica

Introducción

Este capítulo combina la física con las matemáticas. Ello es así porque, cuando trata los conceptos más básicos de física, la línea que los separa de las matemáticas se adelgaza muchísimo.

1.1 Espacio, tiempo y sistemas de referencia

La física, en general, y la mecánica, en particular, estudian el comportamiento de los objetos en el espacio-tiempo. La realidad o no de este espacio-tiempo no la discutiremos, como hacen algunas teorías físicas actuales. Nos basta con pensar que el espacio-tiempo es una construcción intelectual que nos es muy útil para organizar todo lo que acontece. Todos estamos de acuerdo en organizar nuestras percepciones situándolas en diferentes instantes de tiempo en un espacio tridimensional.

Un **observador** (v. figura 1.1) es un sistema de registro (humano o automático) de la posición de los objetos en el espacio en cada **instante**. Puede asignar a cada punto A una tríada de números que lo etiquetan unívocamente: las coordenadas del punto $A = (x_A, y_A, z_A)$. Puede asignar a cada punto A un tiempo t_A **sincronizado** con el tiempo de su reloj t_O utilizando la velocidad **máxima** de que disponga c :

$$t_A - t_O = d_{AO}/c \quad (1.1)$$

donde d_{AO} es la **distancia** entre el punto A y el punto donde se encuentra el reloj del observador. Más adelante veremos que usar una velocidad que no sea la máxima da lugar a inconsistencias.

El conjunto de objetos y marcas que el observador utiliza constituyen el **sistema de referencia**.

Por acuerdo internacional, todos los observadores definen los patrones de espacio

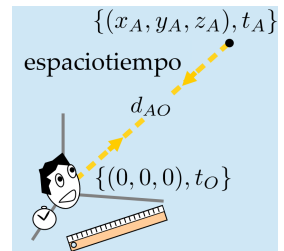


Fig. 1.1: Observador



y tiempo del mismo modo. El Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) es el organismo que supervisa el Sistema Internacional de Unidades (S.I.). Las últimas definiciones son:

→ **Unidad de tiempo: el segundo, s.** Un intervalo temporal de 1 segundo es igual a 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos de los estados fundamentales del átomo de cesio 133. (Adoptada en 1967).

→ **Unidad de distancia: el metro, m.** Un intervalo espacial de 1 metro es igual a la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de $1/299792458$ s. (Adoptada en 1983.)

1.2 Coordenadas cartesianas euclidianas. Distancia

Una característica destacable del espacio físico es que puede ser etiquetado empleando las **coordenadas cartesianas euclidianas** (si no hay dudas, simplemente cartesianas) con la importante propiedad de que la distancia o el camino más corto entre dos puntos $A = (x_A, y_A, z_A)$ y $B = (x_B, y_B, z_B)$ (ver en las figuras 1.2 y 1.3) se puede expresar como

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \quad (1.2)$$

Por ejemplo, en el espacio de puntos de la superficie de una esfera, esto no es posible.

El punto $(0,0,0)$ es el **origen de coordenadas** y las rectas $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ y $(0, 0, z)$ son los **ejes coordenados**.

1.3 Escalares y vectores

Las magnitudes físicas tienen unas características con relación al observador que las mide. Atendiendo a este criterio, destacamos y utilizaremos dos categorías de magnitudes físicas: los escalares y los vectores.

→ **Escalar.** Es una aplicación que asocia puntos e instantes con valores que son independientes de la orientación (o rotación) del observador: $f(x, y, z, t)$. También se denomina *campo escalar*.

→ **Vector.** Es una aplicación que asocia puntos e instantes con vectores: un escalar positivo (o módulo), una dirección y un sentido. $\vec{V}(x, y, z, t)$. También se denomina *campo vectorial*.

Ejemplos de magnitudes escalares son la temperatura, el volumen, la densidad, etc. Ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad de una partícula asociada a

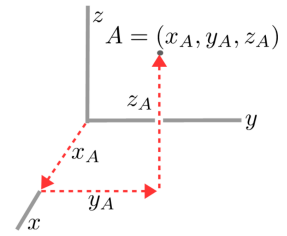


Fig. 1.2: Coordenadas cartesianas euclidianas del punto A

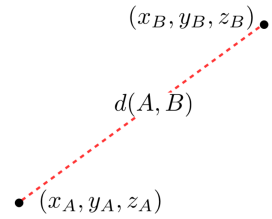


Fig. 1.3: Distancia del punto A al B



los puntos y al instante por donde pasa, el campo gravitatorio asociado a todos los puntos a cualquier instante o la fuerza que una carga eléctrica ejerce donde pueda haber otra.

La idea de que en cada punto del espacio hay un vector es lo que dio nombre al **campo**. Nos podemos imaginar un campo de trigo en que cada espiga es un vector en un punto del espacio. El conjunto de las espigas de trigo, es decir, todo el campo de trigo es lo que denominamos **campo vectorial** o, simplemente, **vector**. Podemos hablar también de **campo escalar**, por ejemplo, un campo de densidades o de temperaturas, en el sentido de que se trata no de una densidad o de una temperatura en un punto del espacio-tiempo, sino de una función que a cada instante y a cada punto le asigna una densidad o temperatura que puede ser distinta.

La **base cartesiana** de vectores está formada por los vectores unitarios $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ paralelos a los ejes coordenados y definidos en todos los puntos del espacio (v. figura 1.4). Un vector cualquiera \vec{V} puede escribirse como

$$\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} = (V_x, V_y, V_z) \quad (1.3)$$

donde V_x , V_y y V_z son las componentes cartesianas del vector, que pueden ser funciones de (x, y, z, t) ¹.

Los vectores base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ no tienen unidades y no están asociados a ninguna magnitud. Representan direcciones (y sentidos) del espacio, en este caso, las tres direcciones y el sentido de los ejes coordenados.

Observemos que una componente de un vector no es un escalar.

Operaciones algebraicas con vectores

Si tenemos dos vectores \vec{A} y \vec{B} , se puede demostrar que $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ es un vector. De acuerdo con esto, definimos la suma de dos vectores.

→ **Suma.** Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , la suma $\vec{A} + \vec{B}$ es el vector que, en coordenadas cartesianas, se puede expresar como:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \quad (1.4)$$

Si U es un escalar y \vec{A} es un vector, se puede demostrar que (UA_x, UA_y, UA_z) es un vector. De acuerdo con esto, definimos el producto externo o producto de un escalar por un vector.

→ **Producto externo.** Dados un escalar U y \vec{A} un vector, el producto externo es el vector $U\vec{A}$ que, en coordenadas cartesianas, se puede expresar como:

$$U\vec{A} = (UA_x, UA_y, UA_z) \quad (1.5)$$

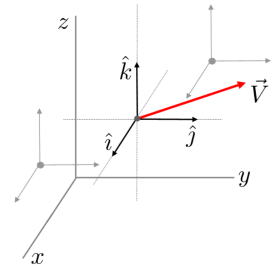


Fig. 1.4: En cada punto del espacio disponemos de los tres vectores base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

¹ Cuando algunas de las componentes son numéricas, en lugar de la coma (,), podemos utilizar el punto y coma (;). Por ejemplo, (2; 5,6; 7)



Si tenemos dos vectores \vec{A} y \vec{B} , se puede demostrar que $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ es un escalar. De acuerdo con esto, definimos el producto escalar.

→ **Producto escalar.** Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , el producto escalar es el escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ que, en coordenadas cartesianas, se puede expresar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.6)$$

→ El **módulo** de un vector \vec{A} es el escalar

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \quad (1.7)$$

→ El coseno del ángulo $0 \leq \theta \leq \pi$ (v. figura 1.5) entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} se puede expresar como:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \quad (1.8)$$

→ El **vector unitario** \hat{A} de un vector dado \vec{A} es el vector de módulo la unidad:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \quad (1.9)$$

Si tenemos dos vectores \vec{A} y \vec{B} , se puede demostrar que:

$$(A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

es un vector. De acuerdo con esto definimos el producto vectorial.

→ **Producto vectorial.** Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , el producto vectorial es el vector $\vec{A} \times \vec{B}$ (v. figura 1.6) que, en coordenadas cartesianas, se puede expresar como:

$$\vec{A} \times \vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.10)$$

→ El seno del ángulo $0 \leq \theta \leq \pi$ entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} se puede expresar como:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} \quad (1.11)$$

→ **Regla del tornillo.** Podemos expresar el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = B A \sin \theta \hat{u} \quad (1.12)$$

donde \hat{u} es un vector unitario normal a \vec{A} y \vec{B} cuyo sentido es el del avance de un tornillo dextrógiro al girar de \vec{A} a \vec{B} por el lado más corto (v. figura 1.6).

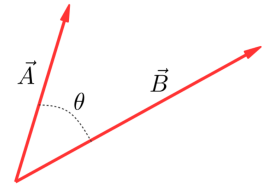


Fig. 1.5: Ángulo θ entre dos vectores

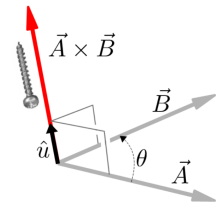


Fig. 1.6: Producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ entre dos vectores. Regla del tornillo



Es especialmente importante utilizar sistemas de referencia $\{x, y, z\}$ de **orientación positiva**, es decir, que puedan yuxtaponerse únicamente por traslación y rotación al sistema de la figura 1.7.

Relaciones algebraicas con vectores

Son igualdades entre vectores (que daremos sin demostración) que involucran las operaciones definidas anteriormente:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (1.13)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.14)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (1.15)$$

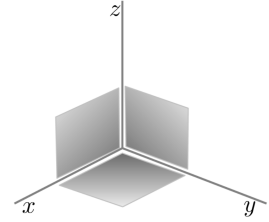


Fig. 1.7: Sistema de referencia $\{x, y, z\}$ de orientación positiva

Operaciones diferenciales con vectores

Dada una función del tipo $f(x, y, z, t)$, podemos querer derivar respecto a alguna de las variables. Por ejemplo, si queremos derivar solo respecto a x lo indicaremos con el operador $\frac{\partial f}{\partial x}$ y diremos que hacemos la derivada **parcial respecto a x** . Si queremos derivar solo respecto a t , lo indicaremos con $\frac{\partial f}{\partial t}$ y diremos que hacemos la derivada parcial respecto a t .

Recordemos que la **regla de la cadena** para funciones señala que, si $F(\lambda) = f(g(\lambda), \lambda)$, entonces $\frac{d}{d\lambda} F = \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Cuando derivamos vectores, podremos aplicar las reglas usuales de la derivación, especialmente la regla de Leibniz para el producto. En general, los escalares y las componentes de vectores son funciones del tipo $f(x, y, z, t)$; además, puede pasar que las coordenadas $\{x, y, z\}$ formen parte de una trayectoria y, por consiguiente, puedan depender de t o de algún otro parámetro λ : $\{x(t), y(t), z(t)\}$ o $\{x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\}$. El operador de derivación D podrá ser: $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D = \frac{\partial}{\partial y}$, $D = \frac{\partial}{\partial z}$, $D = \frac{\partial}{\partial t}$, $D = \frac{d}{dt}$, $D = \frac{\partial}{\partial \lambda}$, $D = \frac{d}{d\lambda}$. Todos ellos cumplirán las reglas usuales de derivación y, en especial, la regla de Leibniz.

La **regla de Leibniz** para funciones f y g con el producto usual es $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$. En caso de que las expresiones involucren escalares U y vectores \vec{A} y \vec{B} con el producto escalar \cdot y vectorial \times

$$D(U\vec{A}) = (DU)\vec{A} + U(D\vec{A}) \quad (1.16)$$

$$D(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (D\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot (D\vec{B}) \quad (1.17)$$



$$D(\vec{A} \times \vec{B}) = (D\vec{A}) \times \vec{B} + \vec{A} \times (D\vec{B}) \quad (1.18)$$

Una propiedad importante de la base cartesiana (asociada a las coordenadas $\{x, y, z\}$) $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es que

$$D\hat{i} = D\hat{j} = D\hat{k} = 0 \quad (1.19)$$

Ello es así porque los vectores en cada punto del espacio de los campos $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ se mantienen paralelos (v. figura 1.8). Esto no pasa si, por ejemplo, utilizamos una base esférica. Los vectores en cada punto del espacio del campo unitario radial \hat{r} no se mantienen paralelos. Tampoco lo hacen los otros dos campos que completan la base esférica (v. figura 1.9).

La propiedad (1.19) es muy útil. Al derivar un vector en base cartesiana

$$D\vec{V} = D(V_x\hat{i}) + D(V_y\hat{j}) + D(V_z\hat{k}) = D(V_x)\hat{i} + D(V_y)\hat{j} + D(V_z)\hat{k}$$

basta con derivar sus componentes.

$$D\vec{V} = (DV_x, DV_y, DV_z)$$

En caso de derivar respecto a t , nos puede interesar tener en cuenta que las otras variables x, y y z también pueden variar con t porque forman parte de una trayectoria, es decir, de hecho son funciones de t y la función f es, aunque no lo explicitamos, una función solo de t , $f(x(t), y(t), z(t), t)$. En este caso, la derivada con respecto a t se denomina **derivada total** y se escribe $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Para calcularla, usaremos la regla de la cadena para cada coordenada, además de la derivada parcial del tiempo, es decir:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.20)$$

Con respecto a las derivadas totales, hay dos resultados importantes:

→ Dado un escalar f , la derivada total $\frac{df}{dt}$ es un escalar.

→ Dado un vector \vec{v} , la derivada total $\frac{d\vec{v}}{dt}$ es un vector.

Otras operaciones diferenciales básicas entre escalares y vectores son:

→ Dado un escalar U , el **gradiente** $\vec{\nabla}U$ es el vector que en coordenadas cartesianas se puede escribir como

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (1.21)$$

→ La **diferencial** de $U(x, y, z)$ es la expresión infinitesimal escalar dU , que en coordenadas cartesianas se puede escribir

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad (1.22)$$

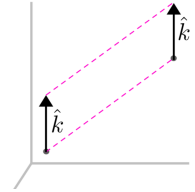


Fig. 1.8: Los vectores base \hat{k} son paralelos. También \hat{i} y \hat{j}

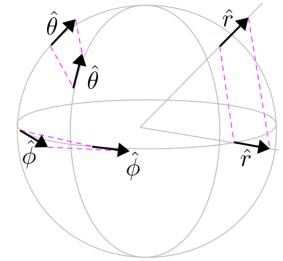


Fig. 1.9: Los vectores base \hat{r} no son paralelos. Tampoco lo son $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$



que también podemos expresar como $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}$ donde $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$.

En física, podemos identificar dx con un incremento arbitrario de la magnitud x , con la condición de que sea del mismo orden o menor que el error ε_x con que medimos x : $dx \lesssim \varepsilon_x$. Lo mismo ocurre con dy, dz y dt . Tendremos también $dU \lesssim \varepsilon_u$ (v. apartado *Propagación de errores* de la sección 1.5).

Operaciones integrales con vectores

Hay tres operaciones integrales básicas que relacionan los escalares con los vectores.

La integral **temporal** de un escalar $U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ definido sobre una trayectoria $\vec{r}(t)$ es el escalar:

$$\int U dt = \int U(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) dt \quad (1.23)$$

La integral **temporal** de un vector \vec{V} definido sobre una trayectoria $\vec{r}(t)$ es el vector

$$\int \vec{V} dt = \left(\int V_x dt, \int V_y dt, \int V_z dt \right) \quad (1.24)$$

La integral de un vector \vec{F} definido en el espacio sobre un camino C , que también se denomina **circulación de \vec{F} a lo largo de C** , si el camino viene dado en forma paramétrica por $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ de λ_1 a λ_2 (v. figura 1.10), es el escalar

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (1.25)$$

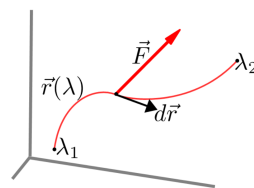


Fig. 1.10: Circulación de \vec{F} a lo largo de un camino C

Problema 1.3.1. Dados los vectores $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{j} + \hat{k}$ calcula:

- los módulos,
- los productos escalar y vectorial,
- el ángulo formado entre ellos.
- Encuentra un vector unitario perpendicular a \vec{A} y \vec{B} .

Solución

a)

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}} = \sqrt{B_x B_x + B_y B_y + B_z B_z} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$



b)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -5$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 10\hat{i} - 5\hat{j} - 10\hat{k}$$

c) A partir del producto escalar, obtendremos el ángulo entre los vectores

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 108,4^\circ$$

d) El producto vectorial da la expresión de un vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ perpendicular a \vec{A} y \vec{B}

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{10\hat{i} - 5\hat{j} - 10\hat{k}}{\sqrt{10^2 + (-5)^2 + (-10)^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \quad \blacksquare$$

Problema 1.3.2. Sea el vector $\vec{A}(t)$ un vector en función del tiempo. Demuestra que

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt}$$

y que, si \vec{A} tiene módulo constante, entonces es perpendicular a $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

Solución

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$\frac{d(A \cdot A)}{dt} = 2A \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{A})}{dt} = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt}$$

si \vec{A} tiene módulo constante, $\frac{dA}{dt} = 0$, $\Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ y, por consiguiente, estos vectores son perpendiculares. \blacksquare

1.4 Principio de simetría

La idea de simetría no es exclusiva de la mecánica, ni siquiera de la física. Se ha utilizado en muchos campos de las ciencias. Se dan *razones de simetría* o *argumentos de simetría* para justificar unas consideraciones que simplifican mucho algunos problemas, pero hasta tiempos relativamente recientes no se ha tratado de concretar qué se quiere decir con “razón de simetría”. Pierre Curie fue el primero en enunciar un principio de simetría, en 1894:

Un efecto no puede tener una carencia de simetría si esta carencia no está presente en la causa.



Fig. 1.11: Pierre Curie (1859-1906) fue un físico francés



Es decir, si la causa tiene una simetría, esta debe estar presente en el efecto. Daremos una versión más detallada de esta idea. Primero, vamos a precisar qué es una simetría.

Con un objeto S y una transformación del tipo que sea T (v. figura 1.12), decimos que T es una transformación de simetría de S o que S tiene la simetría T si S queda inalterado al aplicarle T :

$$T(S) = S \quad (1.26)$$

→ **Principio de simetría.** Si las causas tienen unas simetrías, entonces los efectos tienen, como mínimo, las mismas simetrías.

Fijémonos que hemos de estar seguros de que controlamos todas las causas. Podría pasar que una parte de las causas fueran simétricas pero no tuviéramos información del resto. En este caso, ¡los efectos no tendrían por qué ser simétricos! Este principio lo empleamos muchas veces sin ser conscientes de ello, porque lo encontramos muy intuitivo. Otras veces, no nos lo parece tanto, pero también puede ser aplicable.

Problema 1.4.1. Una distribución esférica uniforme de masa crea un campo gravitatorio. Argumentando exclusivamente con el principio de simetría, ¿qué podemos decir del campo gravitatorio?

Solución

La causa, la distribución esférica uniforme de masa, tiene simetría esférica: si le damos una rotación cualquiera entorno a su centro, queda inalterada. También debe tener simetría esférica el efecto, en este caso el campo gravitatorio. El campo gravitatorio ha de ser radial y solo puede depender de la distancia al centro de la distribución. ■

1.5 Medición y tratamiento de los datos experimentales

Al hacer una medición, nunca podemos dar el resultado en forma de un número real, por muchas razones. Por ejemplo, supongamos que queremos medir la longitud de una varilla como la de la figura 1.13.

- 1) La suposición de que la varilla tiene una longitud muy definida es una idealización. Las varillas reales no son un prisma cortado nítidamente.
- 2) El aparato de medición tiene unas limitaciones por construcción. La regla empleada, por muy bien construida que esté, tiene unas divisiones con un cierto grosor para que puedan ser vistas por nosotros. Estas divisiones están separadas, de modo que es casual que coincida una división con el final de la varilla.
- 3) Nuestra vista tiene unas limitaciones que, además, pueden variar según la iluminación, la edad, etc.

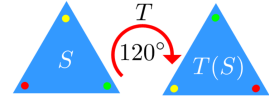


Fig. 1.12: Si no marcamos los vértices, los dos triángulos son indistinguibles

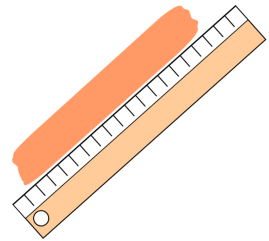


Fig. 1.13: El error en la medición puede ser inherente al objeto medido



Así pues, el resultado de una medición no es un número real; es un intervalo. Podemos decir, por ejemplo, que la longitud de la varilla está dentro del intervalo $[27,30; 27,40]$ cm (si la regla tiene divisiones hasta los mm), que también puede expresarse de esta otra forma: $27,35 \pm 0,05$ cm. Esto mismo podemos expresarlo simplemente como $27,3$ cm, entendiendo que la cifra que iría después de la última por la derecha puede variar en una unidad, es decir, que podemos trabajar con un intervalo $[27,30; 27,40]$ cm.

La anchura del intervalo viene dada por los denominados **errores en la medición**. Es evidente que la palabra *error* no debemos entenderla como algo negativo.

→ Un error “grande” de medición no tiene por qué reflejar ningún tipo de incompetencia de la persona que mide.

Tipo de error

Para dar con algunas garantías el resultado de una medición x , lo que haremos es repetirlo un número M de veces, $x_1, x_2, x_3 \dots x_M$. Descartaremos aquellos valores que claramente se apartan de la mayoría y nos quedaremos con un número N de mediciones buenas, $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$. Expresaremos el resultado de la medición como:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon \tag{1.27}$$

con

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{1.28}$$

\bar{x} es la media de las mediciones realizadas y el número ε , positivo, es el error de la medición, que redondeamos en general a una cifra significativa (como se explica más adelante). Este error se descompone, en función de sus causas, en

$$\varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_P \tag{1.29}$$

Errores de imprecisión o sistemáticos, ε_I . Son debidos normalmente al propio aparato de medición. Siempre que hacemos una medición, cometemos un error de forma sistemática, que siempre tiene el mismo valor.

Aparatos analógicos. Por ejemplo, una aguja que se desplaza en una escala, una regla (v. figura 1.14). Son aparatos que dan una respuesta continua. En este caso, $\varepsilon_I = R/2$ donde R es la resolución del aparato de medición o intervalo entre marcas. En una regla típica, $R = 1$ mm.

Aparatos digitales. Dan una respuesta a intervalos discretos (típicamente, incorporan un indicador o *display* numérico, v. figura 1.15). En este caso, $\varepsilon_I = R$ y



Fig. 1.14: Pie de rey con salida analógica



Fig. 1.15: Pie de rey con salida digital



coincide con el incremento mínimo que muestra el aparato.

Errores de incertidumbre o probables ε_p . Son debidos a factores aleatorios. En el ejemplo de la varilla de la figura 1.13, pueden ser debidos al hecho de que el corte no es nítido y depende de donde pongamos la regla. Pueden intervenir factores ambientales, como la temperatura, la presión, etc. La suposición de que todas las mediciones realizadas están en torno a un cierto valor (distribución gaussiana), junto con el tratamiento estadístico del conjunto de las N mediciones, que no expondremos aquí, da un valor para ε_p :

$$\varepsilon_p = \sigma f \quad (1.30)$$

donde

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad (1.31)$$

es la **desviación estándar** y

$$f = \frac{t}{\sqrt{N}} \quad (1.32)$$

donde la t es la función **estadística de Student**. Así, f es una función que depende del número de mediciones N realizadas y, a través de la t de Student, de la probabilidad con que queremos asegurar que el valor real esté dentro del intervalo de error dado. Si trabajamos con una probabilidad del 95 %, f se calcula de acuerdo con la tabla 1.1.

N	f	N	f	N	f	N	f
		11	0,6718	21	0,4552	40	0,3198
2	8,984	12	0,6354	22	0,4438	60	0,2583
3	2,484	13	0,6043	23	0,4324	120	0,1808
4	1,592	14	0,5775	24	0,4223	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$
5	1,241	15	0,5538	25	0,4128		
6	1,050	16	0,5329	26	0,4039		
7	0,9248	17	0,5142	27	0,3956		
8	0,8360	18	0,4973	28	0,3876		
9	0,7687	19	0,4820	29	0,3804		
10	0,7154	20	0,4680	30	0,3734		

Tabla 1.1: Valores de f en función del número de mediciones N para una probabilidad del 95 %:
 $f = \frac{t_{0,975; N-1}}{\sqrt{N}}$



→ **Nota:** Las calculadoras científicas usuales (v. figura 1.16) y/o las hojas de cálculo tienen procedimientos para introducir datos $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ y hacer los cálculos de \bar{x} y σ . Si es necesario, lee el manual de tu calculadora y/u hoja de cálculo.

Fig. 1.16: Consulta las instrucciones de tu calculadora



Propagación de errores

En los apartados anteriores, hemos visto cómo obtener y expresar una variable sometida a error a partir de mediciones directas de esta. Hay situaciones en que se debe hacer lo mismo con variables que dependen de otras variables que pueden medirse directamente. Por ejemplo, en el caso de una variable z que dependa de varias variables x, y, \dots : $z = z(x, y, \dots)$, suponiendo que los errores sean pequeños, podremos identificarlos con los valores diferenciales de las magnitudes correspondientes. Así, $\varepsilon_z = dz$, $\varepsilon_x = dx$, $\varepsilon_y = dy, \dots$, etc. Como sabemos que $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \dots$ solo debemos evaluar los diferentes factores $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, etc., con los valores medios $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, etc., y tomar siempre el valor absoluto (positivo), como también hacemos con los diferentes errores ε_x , ε_y , etc. Obtenemos así:

$$z = \bar{z} \pm \varepsilon_z \quad ; \quad \bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.33)$$

con

$$\varepsilon_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \varepsilon_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \varepsilon_y + \dots \quad (1.34)$$

Cifras significativas en las mediciones directas

En muchos casos, no es necesario afinar tanto con la precisión. Basta con expresar el resultado de una medición con una anchura de intervalo $10^n \geq 2\varepsilon$, siendo n el mínimo entero que cumple la desigualdad. Por ejemplo, y volviendo al caso de la regla y la varilla de la figura 1.13, el resultado de la medición en cm es un intervalo [27,300000...; 27,399999...] cm.

Podemos decir que 27,3 es el resultado dado con “un decimal”. Pero ¡ojo!: si, en vez de trabajar en cm, lo hiciéramos en m, tendríamos 0,273 y entonces diríamos que el resultado es dado “con tres decimales”. Si lo hiciéramos en mm, tendríamos 273 como resultado, “sin decimales”. Debe quedar claro que las expresiones “con tantos decimales” o “sin decimales” no tienen mucho sentido si queremos reflejar la precisión con que estamos trabajando. Es mejor hablar de cifras significativas: 2,73; 273; 0,000273; 273000... son el resultado de mediciones (intervalos) con tres cifras significativas. Veamos algunas reglas para detectar cuántas cifras significativas tiene un intervalo determinado:

En vez de hablar de intervalos o del resultado de la medición, hablaremos de números, siguiendo la práctica habitual. Recordemos que no son estrictamente números, como los naturales, los enteros, los reales..., sino intervalos expresados en forma de número.

- **Regla 1.** En números que no contengan ceros, todos los dígitos son significativos.
- **Regla 2.** Todos los ceros entre dígitos significativos son significativos.



→ **Regla 3.** Los ceros a la izquierda del primer dígito que no sea cero sirven solo para fijar la posición del punto decimal y no son significativos.

→ **Regla 4.** En un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha de la última cifra diferente de cero son significativos.

→ **Regla 5.** En un número que no tiene punto decimal y que acaba con ceros, estos pueden ser significativos o no. En este caso, se evitan confusiones si se emplea la notación científica.

Consulta los ejemplos de la tabla 1.2.

Ejemplo	CS
4,523	4
70,054	5
0,0789	3
0,0020	2
3600	2+?
$3,6 \times 10^3$	2
$3,60 \times 10^3$	3
$3,600 \times 10^3$	4

Tabla 1.2: Ejemplos de cifras significativas (CS)

Cifras significativas en las mediciones indirectas

¿Cómo se suman, restan, multiplican... los resultados de las mediciones? Está claro que se hace más o menos como con los números usuales... pero ¿que hacemos con las cifras significativas? ¿Cuántas cifras significativas tiene el resultado de una suma, resto...?

Pongamos un ejemplo concreto. Supongamos que hemos medido los lados de una chapa (supuestamente) rectangular y que queremos conocer su superficie (v. figura 1.17). Digamos que los lados son $a = 5237$ mm y $b = 325$ mm. ¿Cómo tenemos que expresar el resultado para reflejar correctamente el error cometido en la medición indirecta de la superficie? ¿Es correcto 1702025 mm², es decir, con siete cifras significativas? Si el error en este ejemplo es de 1 mm por lado, el error que cometemos en la superficie es del orden de $5237 \times 1 + 325 \times 1 + 1 \times 1 = 5563 \approx 6000$ mm².

Esta anchura de intervalo afecta el dígito marcado en rojo 1702025 mm². Lo correcto, pues, es expresar el resultado como $1,70 \times 10^6$ mm², es decir, con tres cifras significativas.

Se pueden deducir unas reglas generales para la manipulación de cifras significativas:

→ **Las constantes matemáticas** ($1/2, 2/3, \sqrt{2}, \pi, \dots$). Siempre que se tomen con un número de cifras superior al de los otros números implicados, no afectan al cómputo de cifras significativas.

→ **Multiplicación y división.** El resultado de la operación tendrá el mismo número de cifras significativas que el operando que tenga menos cifras significativas.

→ **Suma y resta.** El resultado no debe tener dígitos en posiciones más allá de la posición del último dígito común a todos los sumandos. Por ejemplo, $34,6 + 85 - 17,8 = 101,8$ se debe redondear a 102, puesto que la posición del último dígito común a todos los términos se encuentra en las unidades.

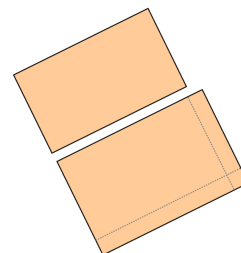


Fig. 1.17: Medida indirecta del área de la chapa rectangular



Ajuste de una recta a los datos experimentales

Otra situación usual es encontrar la posible dependencia entre dos o más variables que pueden medirse experimentalmente de forma independiente, cuyos valores se puedan graficar. A través de esta representación, puede deducirse una posible relación entre las variables. A continuación, se presenta la metodología que debe seguirse en la determinación de esta gráfica.

- La representación puede hacerse por ordenador o manualmente (en este último caso, es conveniente utilizar papel milimetrado).
- Hay que elegir las escalas de los ejes, considerando los valores extremos de X y de Y , de forma que la gráfica ocupe gran parte del papel y que las mediciones representadas queden, siempre que sea posible, repartidas uniformemente (por ejemplo, no se amontonen en un extremo).
- El punto de intersección de los ejes no ha de ser necesariamente el $(0,0)$; puede ser cualquier otro que haga fácil la representación (**escala con 0 desplazado**).
- Tienen que dibujarse todos los puntos obtenidos, sin excluir ninguno por principio. No deben escribirse las coordenadas de los datos ni en los ejes ni cerca de cada punto, puesto que ello dificulta la observación de la gráfica.
- La curva resultante del ajuste de los puntos experimentales ha de ser continua. Nunca deben unirse los puntos experimentales con tramos rectos.
- Si un punto queda claramente separado de la curva, no debe tenerse en cuenta en el ajuste y debe señalarse como erróneo.
- Toda gráfica se debe acompañar de un pie explicativo de qué representa. Si se utilizan varios símbolos para las diferentes variables medidas, es preceptivo indicar qué símbolo corresponde a cada variable.

El caso más simple es el de dos variables x, y entre las cuales puede existir una dependencia lineal. La recta que las relaciona se denomina **recta de ajuste** y el procedimiento más usual para obtenerla, **regresión lineal por mínimos cuadrados**. En esta situación, disponemos de una serie de N mediciones $x_1, x_2 \dots x_N$ de una variable x y N mediciones $y_1, y_2 \dots y_N$ de una variable y , y “sospechamos” que están aproximadamente relacionadas por una función lineal $y = ax + b$. Los coeficientes a y b , así como la bondad del ajuste, se determinan utilizando el **método de los mínimos cuadrados**, según el cual los valores de estos parámetros corresponden a una recta que minimiza la suma de las desviaciones cuadráticas, χ^2 , entre los puntos de medición y_i y el valor $(ax_i + b)$ que toma la función para la variable x_i :

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad (1.35)$$



Del proceso de minimalización resulta

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (1.36)$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i ; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 ; \quad \overline{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (1.37)$$

Podemos ajustar cualquier conjunto de puntos a una recta. Sin embargo, existe un índice, denominado *coeficiente de correlación* $|r| \leq 1$, que nos indica la bondad del ajuste. Este coeficiente se puede calcular de acuerdo con la expresión siguiente:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}} \quad (1.38)$$

Cuánto más se ajustan los puntos a la hipótesis de linealidad, más cerca de 1 está r^2 . En la práctica, se considera un buen ajuste lineal cuando $|r| \geq 0,95$ y no se puede ajustar linealmente cuando $|r| < 0,8$, a pesar de que estos límites son discutibles.

Los errores probables y/o de imprecisión de las mediciones de x y y provocan unos errores probables ε_a y ε_b de los coeficientes a y b que se pueden evaluar utilizando métodos estadísticos:

$$\varepsilon_a = f\sigma_a ; \quad \varepsilon_b = f\sqrt{\overline{x^2}}\sigma_a ; \quad \sigma_a = \frac{a}{r} \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}} \quad (1.39)$$

donde la función f está tabulada en la tabla 1.1 con la misma interpretación (para el 95 %).

→ **Nota.** Las calculadoras científicas usuales y/o las hojas de cálculo tienen procedimientos para entrar parejas de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_N, y_N)$ y hacer los cálculos de a, b y r . Si es necesario, lee el manual de tu calculadora y/u hoja de cálculo.

Problema 1.5.1. En una experiencia para averiguar la viscosidad del aceite de ricino, una esfera de aluminio, de densidad ρ_{Al} y radio R , se suelta dentro de un recipiente con aceite de ricino de densidad ρ_{Ac} y viscosidad no conocida η_{Ac} ². Se sabe que, pasado un cierto tiempo, el movimiento es aproximadamente uniforme, con un velocidad límite v_L que viene dada por la expresión:

$$v_L = \frac{P_{ap}}{b} \quad (1)$$

donde P_{ap} es el peso aparente, teniendo en cuenta que hay el empuje de Arquímedes (se estudia en la sección 4.3):

² El aceite de ricino empleado en esta experiencia tiene una viscosidad de $0,985 \text{ N s/m}^2$. Es este el valor que queremos determinar a través de la experiencia descrita



$$P_{ap} = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_{Al} - \rho_{Ac}) \quad (2)$$

y b es el coeficiente de la fuerza de fricción viscosa \vec{F}_b (se estudia en la sección 2.5):

$$\vec{F}_b = -b\vec{v} \quad (3)$$

b se puede relacionar con el radio de la esfera y la viscosidad del aceite según:

$$b = 6\pi R\eta_{Ac} \quad (4)$$

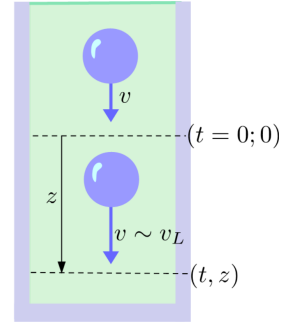


Figura del problema 1.5.1

La experiencia consiste en medir el tiempo que tarda la esfera en recorrer una cierta distancia z , evaluada después de dejar que el movimiento se acerque al movimiento uniforme.

Datos: $R = 0,02$ m, $\rho_{Al} = 2700$ kg/m³, $\rho_{Ac} = 960$ kg/m³.

De las mediciones realizadas entre $z = 0,25$ m y $z = 2,5$ m, se han obtenido los resultados de la tabla.

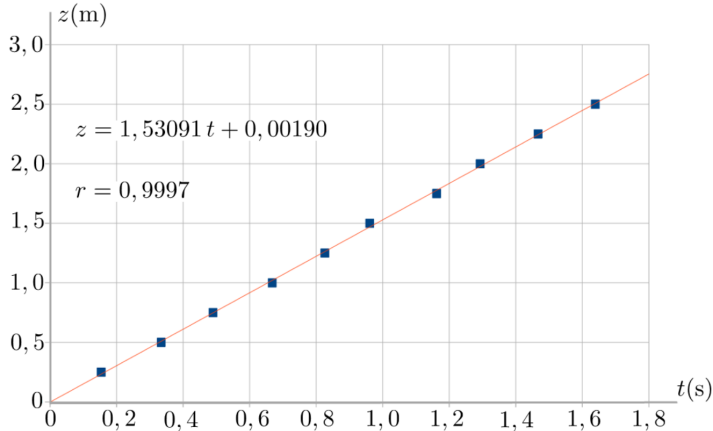
z (m)	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
t (s)	0,154	0,334	0,490	0,668	0,826	0,961	1,162	1,293	1,467	1,639

Tabla del problema 1.5.1

- a) Representa los puntos (t, z) de acuerdo con las mediciones realizadas.
- b) Encuentra **gráficamente** la recta que se ajusta mejor a estos puntos.
- c) Encuentra por **regresión lineal** la recta que mejor se ajusta a estos puntos. Razona la bondad de este ajuste.
- d) Utilizando la recta de ajuste encontrada en **c)** y las expresiones (1, 2, 4), encuentra v_L, b y η_{Ac} .
- e) Encuentra el error de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ajuste y calcula, a continuación, el error propagado a la viscosidad η_{Ac} .

Solución

a), b) y c). En la figura, puedes ver los puntos representados y la recta de regresión. Hemos utilizado una hoja de cálculo para hacer la regresión lineal. La expresión analítica de la recta de regresión resulta: $z = At + B = 1,53091t + 0,00190$, con un coeficiente de correlación $r = 0,9997$



Solución del problema 1.5.1

d) Comparando la recta con el hecho de que esperamos que el movimiento sea uniforme según $z = v_L t$, obtenemos $v_L = 1,5309 \text{ m/s}$. Teniendo en cuenta (2), $P_{\text{ap}} = 0,5720 \text{ N}$ y, con (1), obtenemos $b = 0,3736 \text{ N s/m}$. Utilizando (4), tenemos $\eta_{\text{Ac}} = 0,9911 \text{ N s/m}^2$.

e) Para encontrar los errores de la pendiente A y la ordenada en el origen B , usamos (1.39). Con un número de mediciones $N = 10$, tenemos $\sigma_A = 0,01326$ y, de la tabla 1.1, $f = 0,7154$. El error de la pendiente resulta $\varepsilon_A = 0,0095 \text{ m/s}$, que será también el error de v_L . Teniendo en cuenta que podemos escribir:

$$\eta_{\text{Ac}} = \frac{P_{\text{ap}}}{6\pi R} \frac{1}{v_L}$$

y que la única magnitud sujeta a error del miembro de la derecha es v_L , tenemos, usando (1.34):

$$\varepsilon_{\eta_{\text{Ac}}} = \frac{P_{\text{ap}}}{6\pi R} \frac{1}{v_L^2} \varepsilon_{v_L}$$

donde $\varepsilon_{v_L} = \varepsilon_A = 0,0095 \text{ m/s}$, obtenemos $\varepsilon_{\eta_{\text{Ac}}} = 0,0062 \text{ N s/m}^2$. El error de la ordenada en el origen B resulta $\varepsilon_B = 0,0097 \text{ m}$. Observamos que este valor hace que la B encontrada por regresión sea compatible con el valor 0, valor que ya esperábamos según la expresión $z = v_L t$. Finalmente, podremos expresar el resultado de la experiencia por lo que respecta al valor encontrado por η_{Ac}

$$\eta_{\text{Ac}} = (0,991 \pm 0,007) \text{ N s/m}^2$$

■

1.6 Primera ley de Newton. Sistemas de referencia inerciales

Primera ley de Newton

La primera ley que enunció Newton estuvo motivada por la necesidad de “dejar claro” qué pasa cuando no pasa nada. Es decir, necesitaba expresar cuál es el escenario espaciotemporal por el cual se moverían más tarde los actores: las partículas interactuantes y las fuerzas correspondientes. Tengamos en cuenta que, en aquellos



Fig. 1.18: Isaac Newton (1643-1727) fue un físico, matemático y filósofo inglés

tiempos, casi todo el mundo pensaba que las cosas no se movían solas... Galileo ya concibió que los cuerpos tienen *inercia*, una tendencia natural a mantener su estado de movimiento.

→ **Primera ley de Newton o ley de inercia:** *Un cuerpo no afectado por ninguna causa se mueve con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme).*

La podemos entender como la definición de la ausencia de causa: si observamos que un cuerpo se mueve con velocidad constante es que no le afecta nada. Podemos decir que tiene un **movimiento inercial**.



Fig. 1.19: Galileo Galilei (1564-1642) fue un físico, matemático, y filósofo toscano

Sistemas de referencia inerciales

Si un observador o sistema de referencia se mueve inercialmente, con velocidad rectilínea y uniforme, no le afecta ningún agente físico externo. ¿Cómo podrá saber a qué velocidad se mueve? Todo lo que observe le parecerá consecuencia de las mismas leyes de la física que aplica estando en reposo. Esta reflexión sugiere la definición de los sistemas de referencia inerciales.

→ **Sistemas de referencia inerciales.** Los sistemas de referencia obtenidos por transformaciones de un sistema dado y respecto a los cuales las leyes de la física adoptan la misma forma se denominan *sistemas de referencia inerciales*. Las transformaciones que permiten pasar de unos a otros se denominan *transformaciones inerciales* (v. figura 1.20).

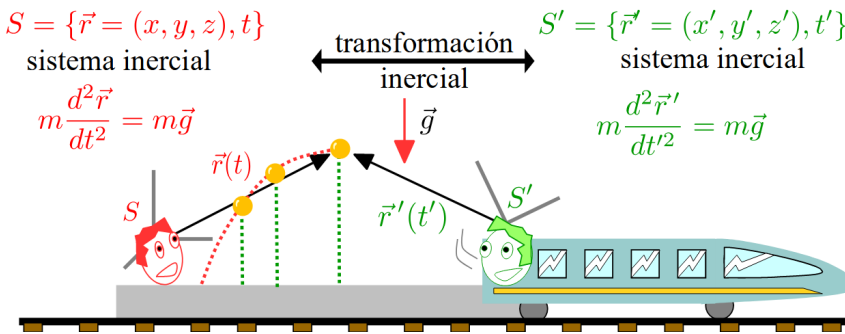


Fig. 1.20: Dos observadores inerciales usan las mismas leyes de movimiento para explicar las observaciones del mismo hecho

Transformaciones inerciales

Con hipótesis muy generales del espacio-tiempo, se obtiene que dos sistemas de referencia S y S' son inerciales si están relacionados entre ellos por una composición de traslación, rotación y cambio del tiempo en su origen y por una transformación de velocidades: los dos sistemas viajan a una velocidad relativa constante \vec{V} . La



expresión de esta última depende de la existencia o no de una velocidad máxima con la cual realizar la sincronización temporal de los diferentes puntos del espacio.

→ **Transformaciones de Galileo.** Si la naturaleza no pone límite a las velocidades, no tenemos problemas en sincronizar. Para la transformación de las velocidades, obtenemos:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.40)$$

Estas transformaciones definen los sistemas inerciales de Galileo sobre los cuales se basa la mecánica newtoniana que estudiamos en este curso.

→ **Transformaciones de Lorentz-Poincaré.** Si la naturaleza pone límite a las velocidades, tenemos una **velocidad máxima** c , que utilizamos al sincronizar. Obtenemos:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \gamma \vec{V} t + \frac{(\gamma-1)}{V^2} (\vec{V} \cdot \vec{r}) \vec{V} \\ t' = \gamma t - \frac{1}{c^2} \gamma \vec{V} \cdot \vec{r} \end{cases} \quad (1.41)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$. Al ser c la máxima velocidad, no hay ninguna contradicción, $V < c$ y la raíz siempre es real. Estas transformaciones definen los sistemas inerciales de Poincaré sobre los cuales se basa la teoría especial de la relatividad debida a Albert Einstein.

Es un hecho experimental que hay una velocidad máxima que coincide con la de la luz en el vacío $c = 299792458$ m/s. Las consecuencias de este hecho, la teoría especial de la relatividad, se han podido contrastar experimentalmente. A pesar de ello, siempre que tratamos con sistemas con velocidades $v \ll c$ podemos hacer la aproximación $c \rightarrow \infty$ y utilizar para los cálculos la mecánica newtoniana. En la mecánica newtoniana, el tiempo es absoluto: para todo punto A : $t_A = t_o$, es decir, todos los puntos del espacio de un observador se pueden sincronizar con un mismo tiempo t . Si no indicamos explícitamente lo contrario, estudiaremos la mecánica newtoniana.

Independientemente de si aplicamos o no la teoría de la relatividad, la elección de un sistema de referencia inercial a partir del cual poder definir otros sistemas depende del grado de aproximación con que trabajemos. En general, nos bastará con considerar la Tierra como un sistema inercial, aunque sabemos que se mueve alrededor del Sol y, por consiguiente, no es estrictamente inercial. Si se necesita más precisión, se puede tomar el sistema inercial ligado al Sol. Actualmente, por ejemplo, en relación con la tecnología GPS (Global Positioning System), se llegan a utilizar sistemas de referencia ligados a los cuásares (*quasi-stellar radio source*), objetos celestes extremadamente lejanos.

Para acabar esta sección, presentamos un único problema relativista para ilustrar,



Fig. 1.21: Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) fue un físico y matemático neerlandés



Fig. 1.22: Henri Poincaré (1854-1912) fue un matemático francés

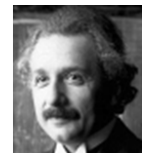


Fig. 1.23: Albert Einstein (1879-1955) fue un físico de origen alemán, nacionalizado posteriormente suizo y norteamericano



mediante un caso concreto y real, cómo la mecánica relativista encuentra una explicación a un hecho que en su momento sorprendió y del cual no se hallaba explicación alguna en el marco de la mecánica newtoniana.

Problema 1.6.1. En el laboratorio, los muones μ^- de baja velocidad tienen una vida media de $\tau = 2,197 \times 10^{-6}$ s. Los rayos cósmicos llegan a la atmósfera a una altura $h = 2,5 \times 10^6$ m y producen muones μ^- , que son detectados en la superficie de la Tierra. Calcula la velocidad (constante) con que llegan a Tierra los muones...

- a) sin tener en cuenta la mecánica relativista,
- b) utilizando la mecánica relativista.

Solución

a) El tiempo es igual para todos los observadores. El μ^- puede “vivir”, como mucho, $\tau = 2,197 \times 10^{-6}$ s. Según el sistema de referencia S , en reposo en el suelo, el μ^- tendría que ir a una velocidad mínima $v = \frac{h}{\tau} = \frac{2,5 \times 10^6}{2,197 \times 10^{-6}} = 1,138 \times 10^{12}$ m/s, ¡que supera con creces la máxima velocidad posible!

b) Damos la explicación relativista. El tiempo depende del observador. El tiempo que hemos de tener en cuenta para el muon μ^- es “su” tiempo propio, en este caso, el tiempo del sistema de referencia S' , que viaja con el muon. Con esta interpretación, el muon, “él”, puede “vivir”, como mucho, $\Delta t' = \tau = 2,197 \times 10^{-6}$ s, que es un tiempo medido según un reloj en reposo respecto a S' . En cambio, en la medición de la velocidad del muon, v , el observador S usa su tiempo Δt , $v = \frac{h}{\Delta t}$.

Si tomamos incrementos en la transformación relativista de Lorentz-Poincaré del tiempo (1.41), con $\vec{V} = \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{r} = vz$, $\Delta z = h$ y $\frac{h}{\Delta t} = v$, tenemos:

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} vh$$

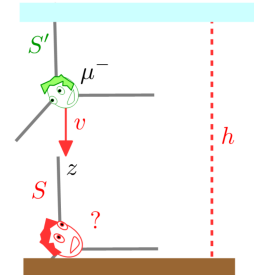
Dividiendo todo por h y simplificando:

$$\frac{\Delta t'}{h} = \frac{1}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

y, por consiguiente, la velocidad mínima v a que debe ir el muón para poder llegar a tierra “vivo” cumple:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{c\Delta t'}{h}\right)^2} = 0,9999$$

es decir, $v < c$, que es coherente con el hecho de que c sea la velocidad máxima posible y, por consiguiente, con la relatividad. ■



Solución del problema 1.6.1



1.7 Cinemática del punto: posición, trayectoria, velocidad y aceleración

→ **Vector posición.** El vector posición del punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ respecto al punto $O = (x_O, y_O, z_O)$ es el vector $\vec{r}_{P(O)} = (x_P - x_O, y_P - y_O, z_P - z_O)$. Si $O = (0,0,0)$, se acostumbra a escribir $\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ o, si no hay dudas: $\vec{r} = (x, y, z)$ (v. figura 1.24). En general, podemos escribir $\vec{r}_{P(Q)} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$.

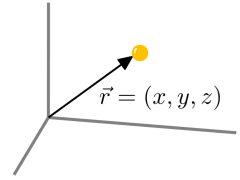


Fig. 1.24: Vector posición respecto al origen

En general, dos observadores posicionarán el mismo punto con diferentes vectores posición: $\vec{r}_{P(O)} \neq \vec{r}_{P(O')}$

→ **Módulo del vector posición.** Lo denotamos por $|\vec{r}| = r$.

→ **Trayectoria.** La trayectoria de una partícula es la curva $\vec{r}(\lambda)$ por donde pasa la partícula.

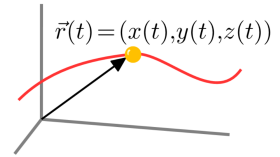


Fig. 1.25: Trayectoria temporal de una partícula

→ **Trayectoria temporal.** La trayectoria temporal de una partícula es la curva por donde pasa la partícula parametrizada con el tiempo $\vec{r}(t)$ (v. figura 1.25).

→ **Vector desplazamiento.** El vector desplazamiento entre dos puntos es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Si los dos puntos están infinitamente próximos: $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

→ **Módulo de $d\vec{r}$.** ¡Ojo!, dr no es el módulo de $d\vec{r}$. Este lo denotaremos por $d\ell$: $|d\vec{r}| = d\ell$. ℓ es la longitud de la curva respecto a alguna referencia sobre esta (v. figura 1.26). Solo si el desplazamiento $d\vec{r}$ está alineado con el origen de \vec{r} , se cumple $d\ell = dr$.

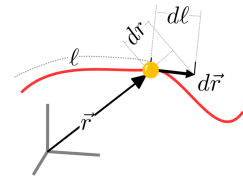


Fig. 1.26: Longitud de la curva ℓ , módulo de $d\vec{r}$ y dr

→ **Diferencial de U .** Dado un escalar $U(\vec{r})$ el diferencial de U es $dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}$ y representa la variación infinitesimal de la función U cuando variamos infinitesimalmente la posición en una dirección del espacio no especificada $d\vec{r}$. Si U depende explícitamente del tiempo, $U(\vec{r}, t)$, la variación de U cuando variamos infinitesimalmente la posición en una dirección del espacio no especificada $d\vec{r}$ invirtiendo un tiempo no especificado dt es:

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (1.42)$$

→ **Vector velocidad.** El vector velocidad de una partícula es el vector tangente a la trayectoria, cuyo módulo indica el ritmo de cambio de posición de la partícula en cada instante

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (1.43)$$

→ **Velocidad relativa.** La velocidad relativa de una partícula P respecto a otra Q es:

$$\vec{v}_{P(Q)} = \frac{d\vec{r}_{P(Q)}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q \quad (1.44)$$



→ **Vector aceleración.** El vector aceleración de una partícula es el vector

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) \quad (1.45)$$

Triedro de Frenet

La variación de la velocidad de una partícula \vec{v} es la aceleración $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$. Las componentes cartesianas de estos vectores no nos informan mucho de qué representan. Si retomamos la definición de vector como aquella magnitud que tiene un módulo, por un lado, y una dirección y un sentido, por el otro, podemos expresar el vector velocidad en la forma $\vec{v} = v\hat{v}$. De este modo, cada factor tiene un significado físico muy claro, v , el módulo, y \hat{v} , la dirección y el sentido. Ahora, si derivamos para encontrar la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} \quad (1.46)$$

el primer término es la parte de la aceleración en la dirección y el sentido de la velocidad. Es la aceleración tangente $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{v}$. La componente de la aceleración tangente, $a_T, a_T = \frac{dv}{dt}$.

Para estudiar qué representa el segundo término $v\frac{d\hat{v}}{dt}$, nos fijaremos en que \hat{v} es un vector unitario, $\hat{v}^2 = 1$. Derivando respecto al tiempo $2\hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0$, es decir, $\frac{d\hat{v}}{dt}$ es un vector normal a \hat{v} y por consiguiente, normal a la trayectoria. El vector $\hat{n} = \frac{d\hat{v}}{dt} \left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right|^{-1}$ es normal a la trayectoria y unitario. Podemos definir aún un tercer vector, el vector binormal \hat{b} , normal a los dos anteriores y unitario, haciendo $\hat{b} = \hat{v} \times \hat{n}$. Este tercer vector no lo utilizamos para describir la aceleración. Lo definiremos para completar la base. Lo que sí nos interesa analizar es la parte de la aceleración dirigida a la dirección normal \hat{n} . Es la aceleración normal $\vec{a}_N = v \left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right| \hat{n}$. Para describir adecuadamente la componente normal a la aceleración hay que saber más sobre la forma de la trayectoria.

En la figura 1.27, se comparan dos puntos muy próximos de la trayectoria, de vectores tangentes unitarios $\hat{v}(t)$ y $\hat{v}(t+dt)$, que forman un triángulo que tiene dos lados de longitud 1 y el tercero de longitud $|d\hat{v}|$. Este triángulo es isósceles, equiparable a un arco de radio 1 y ángulo infinitesimal. A su vez, el pequeño tramo de trayectoria es una curva en forma de pequeño arco de ángulo $d\phi$, **radio de curvatura** R y longitud de arco $d\ell = vdt$. Tenemos las relaciones:

$$1 d\phi = |d\hat{v}| \quad ; \quad R d\phi = d\ell \quad (1.47)$$

las cuales, eliminando $d\phi$, nos permiten obtener una expresión del radio de curvatura R en términos del vector unitario tangente a la trayectoria \hat{v} . Se define por conveniencia la **curvatura** $\rho = 1/R$. Con todo, tenemos:

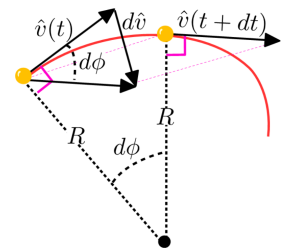


Fig. 1.27: Radio de curvatura R



→ **Radio de curvatura.** A cada punto de una trayectoria dada, de vector tangente unitario \hat{v} , le podemos asociar un radio de curvatura R y una curvatura ρ según:

$$\rho = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\hat{v}}{d\ell} \right| \quad (1.48)$$

→ **Triedro de Frenet.** A cada punto de una trayectoria dada, de vector tangente unitario \hat{v} , podemos definir una base de vectores formada por los vectores tangente, normal y binormal a la trayectoria, denominada *triedro de Frenet* (v. figura 1.28), según:

$$\hat{v} ; \hat{n} = R \frac{d\hat{v}}{d\ell} ; \hat{b} = \hat{v} \times \hat{n} \quad (1.49)$$

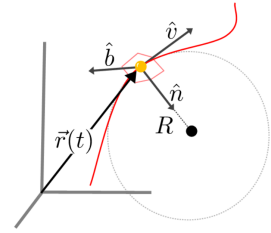


Fig. 1.28: Triedro de Frenet y radio de curvatura

→ **Aceleración tangente y normal.** La aceleración de una partícula que recorre una trayectoria, definida por el vector tangente unitario \hat{v} , siempre se puede escribir en la forma $\vec{a} = a_T \hat{v} + a_N \hat{n}$. Las componentes tangente, a_T , y normal, a_N , de la aceleración se pueden expresar en términos de v y R como:

$$a_T = \frac{dv}{dt} ; a_N = \frac{v^2}{R} \quad (1.50)$$



Fig. 1.29: Jean Frédéric Frenet (1816-1900) fue un matemático, astrónomo y meteorólogo francés

Problema 1.7.1. Un observador inercial O mide la posición de una partícula (unidades del S.I.) $\vec{r}_{P(O)} = (6t^2 - 4t)\hat{i} - 3t^3\hat{j} + 2\hat{k}$. Otro observador O' , con la misma orientación, mide la posición de la misma partícula $\vec{r}_{P(O')} = (6t^2 + 3t)\hat{i} - 3t^3\hat{j} - 3\hat{k}$.

- Determina la velocidad relativa del sistema O' respecto a O .
- Calcula la aceleración de la partícula respecto a O y O' .
- ¿Es O' un observador inercial?

Solución

a) La velocidad de la partícula respecto a O es:

$$\vec{v}_{P(O)} = \frac{d\vec{r}_{P(O)}}{dt} = (12t - 4)\hat{i} - 9t^2\hat{j}$$

La velocidad de la partícula respecto a O' es:

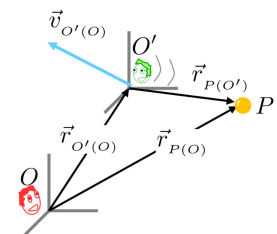
$$\vec{v}_{P(O')} = \frac{d\vec{r}_{P(O')}}{dt} = (12t + 3)\hat{i} - 9t^2\hat{j}$$

La velocidad relativa de O' respecto de O será:

$$\vec{V} = \vec{v}_{O'(O)} = \vec{v}_{O'} - \vec{v}_O = -\vec{v}_P + \vec{v}_{O'} + \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{v}_{P(O)} - \vec{v}_{P(O')} = -7\hat{i}$$

b)

$$\vec{a}_{P(O)} = \frac{d\vec{v}_{P(O)}}{dt} = 12\hat{i} - 18t\hat{j}$$



Solución del problema 1.7.1



Del apartado anterior, tenemos $\vec{v}_{P(O')} = \vec{v}_{P(O)} - \vec{V}$; así:

$$\vec{a}_{P(O')} = \frac{d\vec{v}_{P(O')}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P(O)}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}_{P(O)} = 12\hat{i} - 18t\hat{j}$$

c) Sí, porque O' viaja a velocidad constante respecto a un observador inercial O :
 $\vec{v}_{O'(O)} = \text{cte.}$ ■

Problema 1.7.2. Una partícula describe un movimiento rectilíneo, siendo el espacio recorrido $s = 4t^3 - 3t^2 - 6$, s en metros y t en segundos. Si la partícula parte de $t = 0$, calcula

- a) el tiempo que tardará en alcanzar una velocidad de 6 m/s.
- b) el valor de la aceleración en este mismo instante.

Solución

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 12t^2 - 6t$$

a) Si la partícula parte de $t = 0$:

$$v(t) = 6 = 12t^2 - 6t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1\text{ s}$$

b) En este instante, la aceleración será:

$$a(t = 1) = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=1} = (24t - 6)|_{t=1} = 18 \text{ m/s}^2$$
 ■

Problema 1.7.3. Un cuerpo describe un movimiento rectilíneo con aceleración $a = 4 - t^2$ (a en m/s^2 y t en s). Calcula la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo, si a $t = 3$ s, $v = 2$ m/s y $x = 9$ m.

Solución

Integrando la expresión de la aceleración, obtenemos la velocidad:

$$v = \int a dt = \int (4 - t^2) dt = 4t - \frac{t^3}{3} + K_1$$

Integrando nuevamente, obtenemos el desplazamiento:

$$x = \int v dt = \int \left(4t - \frac{t^3}{3} + K_1 \right) dt = 2t^2 - \frac{t^4}{12} + K_1 t + K_2$$

K_1 y K_2 son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales. Como $t = 3$ s, $v = 2$ m/s y $x = 9$ m, tenemos:

$$v(3) = 2 = \left(4 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} + K_1 \right) \Rightarrow K_1 = -1$$



$$x(3) = 9 = \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^4}{12} + (-1)3 + K_2 \right) m \Rightarrow K_2 = 0,75$$

Y, finalmente

$$x = -t + 2t^2 - \frac{t^4}{12} + 0,75 \quad ; \quad v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1 \quad \blacksquare$$

Problema 1.7.4. El movimiento tridimensional de una partícula está definido por el vector posición $\vec{r} = R \sin(\omega t) \hat{i} + ct \hat{j} + R \cos(\omega t) \hat{k}$ con R , ω y c constantes.

- Determina las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula.
- Calcula el radio de curvatura y las componentes tangente y normal de la aceleración y el vector normal unitario.

Solución

a)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega R \cos \omega t \hat{i} + c \hat{j} - \omega R \sin \omega t \hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 R \sin \omega t \hat{i} - \omega^2 R \cos \omega t \hat{k} = -\omega^2 R (\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{k})$$

b)

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\omega^2 R^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + c^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\omega^4 R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = \omega^2 R$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

Siendo $a_T = 0$, podemos concluir que toda la aceleración es normal, es decir, $a_N = \omega^2 R$. Si $a_T \neq 0$, también podríamos encontrar a_N despejando de $a^2 = a_T^2 + a_N^2$. No lo haremos así; resolveremos a_N encontrando primero la curvatura.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\omega R \cos \omega t \hat{i} + c \hat{j} - \omega R \sin \omega t \hat{k}}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}$$

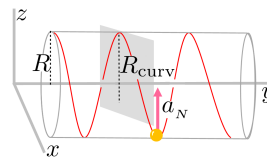
$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{-\omega^2 R (\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{k})}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}$$

$$\left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right| = \frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}$$

Denotaremos el radio de curvatura por R_{curv} para no confundirlo con R , que es una constante del enunciado del problema.

$$R_{\text{curv}} = v \left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right|^{-1} = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}{\frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}}} = R + \frac{c^2}{\omega^2 R}$$

Observamos que, si $c = 0$, si la curva no avanza en la dirección \hat{j} , se trata de una circunferencia de radio R en el plano $x - z$. En este caso, $R_{\text{curv}} = R$.



Solución del problema 1.7.4



La aceleración normal a_N la calcularemos utilizando el radio de curvatura R_{curv} .

$$a_N = \frac{v^2}{R_{\text{curv}}} = \frac{\omega^2 R^2 + c^2}{\left(\frac{\omega^2 R^2 + c^2}{\omega^2 R}\right)} = \omega^2 R$$

$$\hat{n} = \frac{R_{\text{curv}}}{v} \frac{d\hat{v}}{dt} = -\sin \omega t \hat{i} - \cos \omega t \hat{k} \quad \blacksquare$$

Problema 1.7.5. Una partícula describe un movimiento circular (no uniforme)

$\vec{r}(t) = R_0(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función creciente del tiempo.

Calcula:

- a) la velocidad y la aceleración.
- b) el radio de curvatura de la trayectoria.
- c) la base de vectores, tangente \hat{v} y normal \hat{n} , y las componentes tangente a_T y normal a_N de la aceleración.

Solución

a) La velocidad y la aceleración. Al derivar respecto a t , tendremos en cuenta que estamos haciendo una derivada total y que φ es una función de t :

$$\vec{v} = R_0 \dot{\varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{a} = R_0 \ddot{\varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) + R_0 \dot{\varphi}^2 (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$$

el módulo de la velocidad es $v = R_0 \dot{\varphi}$.

b) El vector de la base de Frenet \hat{v} y el radio de curvatura R :

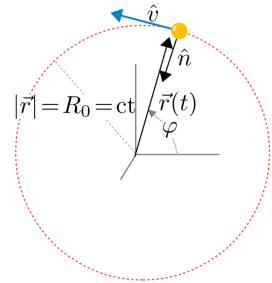
$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad ; \quad \frac{d\hat{v}}{dt} = \dot{\varphi} (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$$

$$R = v \left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right|^{-1} = R_0$$

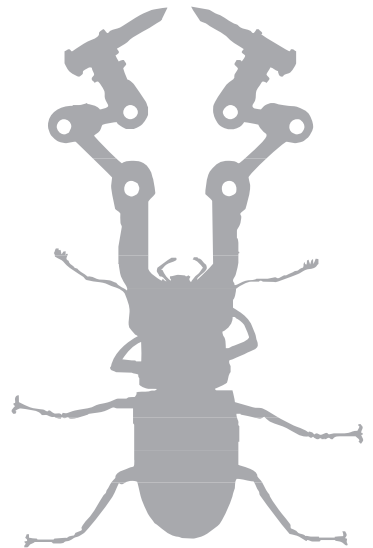
c) El vector de la base de Frenet \hat{n} y las componentes tangente y normal de la aceleración:

$$\hat{n} = \frac{R}{v} \frac{d\hat{v}}{dt} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R_0 \ddot{\varphi} \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{R} = R_0 \dot{\varphi}^2 \quad \blacksquare$$



Solución del problema 1.7.5



→2

2 Dinámica de una partícula

Introducción

Estudiamos el movimiento de una partícula desde el punto de vista de las causas que lo hacen posible, es decir, las fuerzas. Por eso, relacionamos estas causas con los conceptos propios de la cinemática, introducidos en el capítulo 1, como la posición, la velocidad y la aceleración. A continuación, introducimos otras propiedades, como la cantidad de movimiento, el momento de una fuerza, el momento angular, el trabajo y la energía. Finalmente, analizamos algunos tipos de fuerzas.

Una **partícula clásica** es cualquier objeto material de dimensiones despreciables respecto a las dimensiones de la trayectoria que realiza (distancias y radios de curvatura) y que no gira sobre sí mismo o, si lo hace, no transmite este giro a ninguna otra partícula. Quedan excluidas las partículas sumamente pequeñas, de dimensión atómica o inferior. De estas se ocupa la mecánica cuántica. Una **partícula newtoniana** es una partícula clásica que se mueve siempre a velocidades muy inferiores a las de la luz.

Si no indicamos lo contrario, cuando hablamos de *partícula* nos referimos a la partícula newtoniana, tal como la hemos definido aquí. También, cuando decimos que un objeto es *pequeño*, queremos decir que podemos tratarlo como una partícula newtoniana.

Los conceptos y los métodos que explicamos en este tema se aplican, pues, a las partículas. Pese a ello, más adelante, en la sección 3.13, veremos que, si las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido no lo hacen girar, su movimiento puede explicarse considerándolo una partícula situada en un punto solidario con el cuerpo, denominado *centro de masas*. De momento, hablaremos de partículas.



2.1 Primera y segunda leyes de Newton

Primera ley de Newton

La mecánica clásica se fundamenta en tres leyes o axiomas establecidos por Galileo y Newton en los siglos XVII-XVIII, basados, en buena parte, en resultados experimentales. En la sección 1.6, ya hemos visto la primera ley de Newton o ley de la inercia, en relación con la definición del sistema inercial. Hemos comprobado que la primera ley de Newton definía, entre otras cosas, qué se entiende por ausencia de causa. Ahora queremos ir más allá, especificando un poco más el concepto de causa. La primera ley se puede formular así:

→ **Primera ley de Newton o ley de inercia.** *Todo cuerpo (partícula) sobre el cual no actúa ninguna fuerza mantiene su estado de movimiento, ya sea en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.*

La primera ley de Newton introduce el concepto de fuerza como la causa que modifica el estado de movimiento de un cuerpo.

Como se ha indicado en la sección 1.6, los sistemas de referencia (SR) para los cuales se verifica la primera ley de Newton se denominan *sistemas de referencia inerciales* (SRI). Además, cualquier SR que se mueva a velocidad constante respecto a un SRI también es inercial. Por otro lado, si un SR acelera respecto a un SRI, es no inercial. En este curso, solo trataremos los casos de SRI. Por tanto, en ningún momento hablaremos de fuerzas *ficticias*, como la centrífuga o la de Coriolis. Podemos resolver todas las situaciones utilizando un SRI, sin necesidad de introducir ninguna fuerza ficticia.

Segunda ley de Newton

La segunda ley, también llamada *ley de movimiento*, establece lo siguiente:

→ **Segunda ley de Newton o ley de movimiento.** *Un cuerpo (partícula) sometido a la acción de una fuerza no nula, acelera. La aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza, y el módulo es igual al de la fuerza, dividido por la masa inercial. Es decir:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

\vec{F} es la fuerza causante de la aceleración \vec{a} de la partícula. m es la constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración, llamada *masa inercial*. Es una propiedad intrínseca de la partícula que pone de manifiesto la resistencia a ser acelerada.

Se ha escrito mucho sobre el significado de esta ley. ¿Define la fuerza? ¿Define la



masa (inercial)? ¿Es una ley para saber cómo se mueve la partícula? Bien es verdad que es un poco de cada cosa.

La podemos escribir:

$$\text{A) } \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{B) } \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a} \quad \text{C) } \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\ddot{\vec{r}} \quad (2.2)$$

La versión **A**, como (2.1), es la más conocida pero no la más aclaratoria. Las otras dos aportan más información. La tercera es la que quiere dejar más claro que se trata de una *ley de movimiento*.

→ **La ley de Newton define la fuerza.** La fuerza es la causa de la aceleración de la partícula y puede depender de la posición y de la velocidad de esta, además del tiempo, pero no de la aceleración. La fuerza es una magnitud vectorial, puesto que la aceleración, como hemos visto en la sección 1.7, lo es y la masa, al estar definida como una propiedad intrínseca de la partícula, es un escalar. Además, \vec{a} y \vec{F} son vectores paralelos y, siendo m positiva, tienen el mismo sentido.

Es importante darse cuenta de que (2.1) (también (2.2)) es una ecuación vectorial. Esto quiere decir que involucra un módulo, una dirección y un sentido. Así, por ejemplo, para el caso sencillo de una piedra atada a una cuerda, que en ausencia de gravedad describe una trayectoria circular con módulo de velocidad constante, hay aceleración. En este caso, a pesar de que el módulo de la velocidad es constante, la dirección no lo es. La aceleración es la normal o centrípeta, está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular y es causada por la tensión de la cuerda, $a_N = \frac{T}{m}$ (v. figura 2.1). Vease la sección 1.7.

→ **La ley de Newton define la masa.** Si, sobre una misma partícula, actúan fuerzas diferentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, causarán aceleraciones diferentes $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$ (v. figura 2.2); la relación entre los módulos $\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots$, se mantiene constante y lo denominamos **masa inercial** de la partícula (o simplemente masa):

$$m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots \quad (2.3)$$

La masa es una magnitud escalar.

Hay que darse cuenta de que, para llevar a cabo la experiencia descrita, primero hemos de contar con un patrón de fuerza, con una definición que no contenga el concepto de masa. Esto no es del todo sencillo. Requiere exigir la validez de la llamada **ley de conservación de la masa** en un contexto clásico y no relativista: si juntamos una partícula de masa m_1 con otra de masa m_2 , la masa de la nueva partícula es $m_1 + m_2$. Esta ley hace que clásicamente se pueda utilizar la masa como medida de la *cantidad de materia* y renombrar la ley como *ley de conservación de la materia*. Actualmente, si se quiere afinar mucho, se contabiliza la materia por el número de protones, neutrones, electrones..., o de átomos y moléculas que contiene.

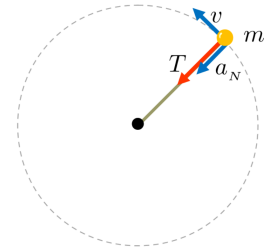


Fig. 2.1: La aceleración normal a_N es causada por la fuerza T de tensión de la cuerda: $a_N = \frac{T}{m}$

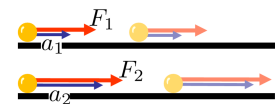


Fig. 2.2: Diferentes fuerzas sobre una misma partícula dan lugar a diferentes aceleraciones. Según la segunda ley de Newton, el cociente se mantiene constante y se denomina *masa inercial* de la partícula



Podemos ahora tomar como patrón la fuerza que recibe, cerca de la Tierra, una determinada cantidad de materia. Hecho esto, podemos fabricarnos un muelle que, para una cierta deformación, ejerza la misma fuerza que la descrita anteriormente. Por ejemplo, cuando colgamos del muelle la cantidad de materia, en reposo el muelle ejercerá la fuerza patrón. Ahora podemos definir fuerzas cuyo valor sea el doble, el triple... de la fuerza patrón, utilizando dos, tres... muelles en paralelo. Si utilizamos el principio de superposición (que estudiamos un poco más abajo), la fuerza será el doble, el triple... Estas son las fuerzas que podemos utilizar en la experiencia descrita en la definición de masa. Evidentemente, la cantidad de materia determinada, mencionada anteriormente, acaba siendo el patrón y la unidad de masa, y la unidad de fuerza finalmente se deriva según la ley de Newton, como mostramos más abajo.

→ **Es una ley para saber cómo se mueve la partícula.** Si conocemos la fuerza como un campo función de \vec{r} y \vec{v} , la teoría de las ecuaciones diferenciales nos dice que **C** es una ecuación diferencial que puede ser integrada (dos veces) para encontrar la incógnita $\vec{r}(t)$. En cada integración, se introduce una constante (vectorial): \vec{C}_1 y \vec{C}_2 . Obtendremos $\vec{r}(t) = \vec{f}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t)$.

Si conocemos la posición y la velocidad de la partícula en un instante t_0 dado, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ y $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$, podemos resolver:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{f}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \\ \vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

y encontrar \vec{C}_1 y \vec{C}_2 en función de \vec{r}_0 y \vec{v}_0 y, por consiguiente, tener $\vec{r}(t) = \vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)$.

→ **Mecánica predictiva.** Podemos decir que la mecánica newtoniana es una mecánica predictiva. Se trata de una versión fuerte de determinismo: conocida la función fuerza que actúa sobre una partícula, y conocidas la posición y velocidad en un instante determinado, el futuro y el pasado de la partícula quedan totalmente determinados.

En la sección 2.5 de este capítulo, veremos algunos ejemplos de fuerzas.

Principio de superposición de fuerzas

La experiencia nos muestra que, si sobre una partícula actúan dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , la aceleración \vec{a} que le provocan es $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, siendo $\vec{a}_i, i = 1, 2$, la aceleración causada únicamente por la fuerza \vec{F}_i .

Teniendo en cuenta la ley de movimiento de Newton, podemos enunciar (v. figura 2.3):

→ **Principio de superposición de fuerzas.** La fuerza **resultante** (o simplemente la

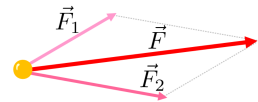


Fig. 2.3: Dos fuerzas que actúan sobre una misma partícula causan la misma aceleración que una única fuerza suma de las dos originales



resultante) de la actuación de dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 sobre una misma partícula es

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.5)$$

Para apreciar bien este principio y no considerarlo trivial, basta con decir que en la teoría de la relatividad no se cumple.

Volviendo a la primera ley de Newton, para que se cumpla no es preciso que todas las fuerzas que actúan sobre una partícula sean nulas; basta con que lo sea la resultante. El hecho de que la fuerza resultante sea nula no implica ausencia de movimiento, sino que la velocidad sea constante. En su momento, esta afirmación rompió los esquemas de los seguidores de la escuela aristotélica, que incluso asociaban el movimiento uniforme a la existencia de una fuerza.

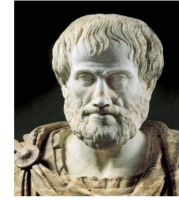


Fig. 2.4: Aristóteles (384 a. C.-322 a. C.). Física aristotélica: es el estudio del ser en movimiento. Entre las leyes de movimiento, señala que "todo móvil requiere un motor"

Unidades de masa y de fuerza

Solo nos resta introducir el patrón de masa necesario para poder tomar medidas.

→ **Unidad de masa del S.I.: el kilogramo, kg.** Una masa de 1 kilogramo es igual a la masa del patrón internacional: un cilindro de iridio-platino custodiado en París por el BIPM. (Definición adoptada en 1889.)

La unidad de fuerza se deriva de la ley de Newton.

→ **Unidad de fuerza del S.I.: el newton, N.** $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Para hacer los problemas siguientes, ten en cuenta la fuerza peso o fuerza causada por el campo gravitatorio \vec{g} cerca de la superficie terrestre, $\vec{P} = m\vec{g}$, que actúa sobre cualquier masa m , con $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Si necesitamos afinar más, tendremos en cuenta la gravedad local. Por ejemplo, en Barcelona, $g = 9,804 \text{ m/s}^2$. En la sección 2.5, tratamos la fuerza peso como ejemplo de fuerza constante y, en la sección 4.2, estudiamos con más detalle la fuerza peso.

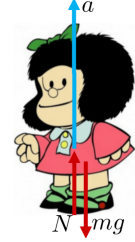
Problema 2.1.1. Una niña de masa 30 kg está en un ascensor. Determina la fuerza N que ejerce el suelo sobre la niña si el ascensor:

- sube con movimiento uniforme,
- baja con movimiento uniforme,
- sube con una aceleración de 2 m/s^2 ,
- baja con una aceleración de 2 m/s^2 y
- cae libremente después de que se rompan sus cables.

**Solución**

Con $m = 30 \text{ kg}$ y $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, utilizamos la ley del movimiento de Newton en la dirección vertical, $N - mg = ma \Rightarrow N = m(a + g)$. Obtenemos:

- a) $a = 0 \Rightarrow N = mg = 294,3 \text{ N}$,
 b) $a = 0 \Rightarrow N = mg = 294,3 \text{ N}$,
 c) $a = 2 \Rightarrow N = m(2 + g) = 354,3 \text{ N}$,
 d) $a = -2 \Rightarrow N = m(g - 2) = 234,3 \text{ N}$,
 e) $a = -g \Rightarrow N = 0$ ■



Solución del problema 2.1.1

Problema 2.1.2. Un objeto pequeño, de $m = 4 \text{ kg}$, está sometido a la acción de dos fuerzas, $\vec{F}_1 = \hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = \hat{i} + \hat{j}$ (unidades N). Calcula los vectores aceleración, velocidad y posición del objeto en el tiempo $t = 3 \text{ s}$ si en $t = 0$ está en reposo en el origen de coordenadas

Solución

$m = 4 \text{ kg}$. La fuerza resultante es $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2, -1)$. De la ecuación de movimiento, obtenemos la aceleración:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Integrando:

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)t + \vec{C}_1$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales en $t = 0$, $\vec{v} = 0$ implica $\vec{C}_1 = 0$ y, por consiguiente, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)t$

Integrando la velocidad,

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)t^2 + \vec{C}_2$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales en $t = 0$, $\vec{r} = 0$ implica $\vec{C}_2 = 0$ y, por tanto, $\vec{r} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)t^2$ ■

Problema 2.1.3. Una partícula atada a una cuerda, de masa despreciable y longitud ℓ , hace un movimiento circular uniforme. Encuentra la mínima velocidad angular ω que lo hace posible.

Solución

Las ecuaciones de movimiento de Newton en las direcciones verticales y normales a la trayectoria son:

$$\begin{aligned} T \cos \varphi - mg &= 0 \\ T \sin \varphi &= ma_N \end{aligned}$$

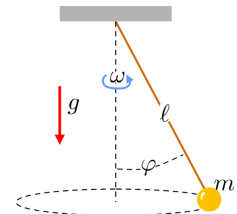


Figura del problema 2.1.3

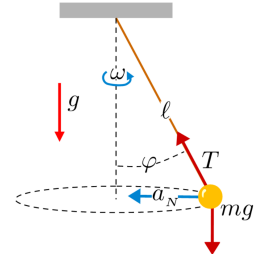


La aceleración normal es $a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = \ell \sin \varphi \omega^2$. Despejando T de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\frac{mg}{\cos \varphi} \sin \varphi = m\ell \sin \varphi \omega^2$$

de donde obtenemos $\cos \varphi = \frac{g}{\ell\omega^2}$. El coseno es positivo y también hace falta que cumpla $\cos \varphi \leq 1$, de donde obtenemos

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$



Solución del problema 2.1.3

Problema 2.1.4. Una partícula atada a una cuerda, de masa despreciable y longitud ℓ , oscila en un plano vertical.

- a) Encuentra la ecuación de movimiento utilizando la segunda ley de Newton.
- b) Especifica el resultado para pequeñas oscilaciones.

Solución

Las ecuaciones de movimiento de Newton en las direcciones tangentes y normales a la trayectoria son:

$$\begin{aligned} T - mg \cos \varphi &= ma_N \\ -mg \sin \varphi &= ma_T \end{aligned}$$

Siendo la velocidad $v = \ell\dot{\varphi}$, la aceleración tangente es $a_T = \frac{dv}{dt} = \ell\ddot{\varphi}$. Sustituyendo en la componente tangente de la ecuación de movimiento $-mg \sin \varphi = m\ell\ddot{\varphi}$ de donde, simplificando:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0$$

Si $\varphi \ll 1$, expresión que tenemos que entender expresada en radianes, entonces $\sin \varphi \approx \varphi$ y obtenemos:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0$$

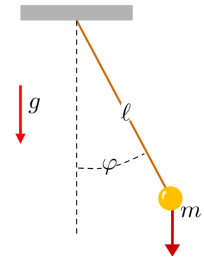
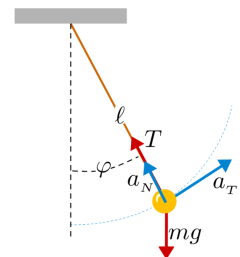


Figura del problema 2.1.4



Solución del problema 2.1.4

2.2 Fuerza y cantidad de movimiento

→ **Cantidad de movimiento.** Se define la cantidad de movimiento \vec{p} de una partícula como el vector:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.6}$$

Las unidades de la cantidad de movimiento en el S.I. son: kg m/s.

La ley de movimiento de Newton puede escribirse, utilizando la cantidad de movimiento, como:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{2.7}$$

que permite interpretar que la fuerza es la causa de la variación de la cantidad de movimiento y enunciar:



→ **Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento.** Si sobre una partícula no actúa ninguna fuerza o la resultante es nula, la cantidad de movimiento se mantiene constante.

Para una partícula, estos resultados son inmediatos por el hecho de que la cantidad de movimiento es, en este caso, directamente proporcional a la velocidad de la partícula. Veremos más adelante, en la sección 3.3, cuando tratemos este concepto para N partículas, que estas relaciones son también válidas y que nos permitirán resolver situaciones de mayor complejidad.

→ **Impulso suministrado por una fuerza.** Se define el impulso \vec{I} suministrado por una fuerza \vec{F} en el intervalo $t_1 \rightarrow t_2$ como el vector:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (2.8)$$

Las unidades del impulso en el S.I. son kg m/s. Observamos que, para encontrar \vec{I} , puede ser necesario conocer la trayectoria $\vec{r}(t)$.

→ **Teorema de la cantidad de movimiento.** El incremento de la cantidad de movimiento es igual al impulso \vec{I} suministrado

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} \quad (2.9)$$

Demostración. Solo hay que considerar la ley de Newton (2.7) en la forma $\vec{F} dt = d\vec{p}$ e integrar en el intervalo $t_1 \rightarrow t_2$ ■

Problema 2.2.1. Una partícula de 1 kg se mueve, para $t \leq 0$, rectilíneamente a una velocidad constante de 100 m/s. En el instante $t = 0$ y durante 1 s, actúa una fuerza $F = 1000 e^{-t}$ (F en N y t en s) en la misma dirección y en sentido contrario al movimiento. Calcula el impulso suministrado por la fuerza y la cantidad de movimiento final de la partícula.

Solución

Al ser la fuerza de la misma dirección que la velocidad, la partícula no cambiará de dirección. Como se trata de un problema unidimensional, omitimos la notación vectorial. Tenemos una única dirección (digamos \hat{i}) e indicamos el sentido por el signo. El signo positivo lo tomamos como el de la velocidad inicial.

El impulso suministrado por la fuerza a la partícula es:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_0^1 -1000 e^{-t} dt = 1000 e^{-t} \Big|_0^1 = -632 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$



La cantidad de movimiento final es p_2 :

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_2 - p_1 \Rightarrow p_2 = p_1 + \Delta p = mv_1 + \Delta p = 100 - 632 \\ \Rightarrow p_2 &= -532 \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

Este resultado significa que la partícula acaba moviéndose a una velocidad constante de 532 m/s de sentido contrario al inicial. ■

Problema 2.2.2. Una partícula de masa 2 kg se mueve, en un cierto instante, a una velocidad $\vec{v} = 5 \hat{i} + 2 \hat{j}$. A continuación, se aplica una fuerza $\vec{F} = 4 \hat{j}$. Sabiendo que \vec{v} y \vec{F} están expresadas en el S.I., determina la cantidad de movimiento de la partícula después de aplicar la fuerza durante 3 s.

Solución

$m = 2\text{kg}$. La cantidad de movimiento inicial es $\vec{p}_1 = m\vec{v} = 10 \hat{i} + 4 \hat{j}$. Utilizando el teorema del impulso lineal y siendo \vec{p}_2 la cantidad de movimiento final:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_t^{t+3} \vec{F} dt = 3\vec{F} = 12 \hat{j}$$

Observamos que los límites de integración dependen, en principio, del tiempo. La fuerza es constante en el tiempo. Despejando \vec{p}_2 , obtenemos:

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + 12 \hat{j} = 10 \hat{i} + 16 \hat{j}$$

en unidades del S.I. ■

2.3 Momento de una fuerza y momento angular de una partícula

→ **Momento de una fuerza.** Se define el momento $\vec{M}_{(A)}$ de una fuerza \vec{F} , aplicada en un punto Q , respecto a un punto A como:

$$\vec{M}_{(A)} = \vec{r}_{(A)} \times \vec{F} \tag{2.10}$$

donde $\vec{r}_{(A)}$ es el vector posición del punto Q de aplicación de la fuerza con respecto al punto A . Las unidades en el S.I. son N m.

Recordemos que, como consecuencia del producto vectorial, la dirección del momento de una fuerza es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}_{(A)}$ y \vec{F} . Aún más, puesto que el primer vector del producto vectorial (2.10) es una posición, el módulo puede calcularse con la sencilla expresión (v. figura 2.5):

$$M_{(A)} = F r_{(A)} \sin \varphi = F \overline{AF} \tag{2.11}$$

donde $\overline{AF} = r_{(A)} \sin \varphi$ es también la distancia entre el punto A y la **recta de acción** de la fuerza \vec{F} . El sentido viene dado por la regla del tornillo.

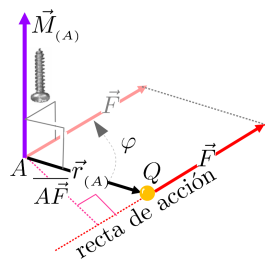


Fig. 2.5: Momento de la fuerza \vec{F} respecto al punto A . Regla del tornillo



Problema 2.3.1. Calcula el momento de la fuerza \vec{F} aplicada sobre la esfera, en el punto indicado en la figura, con respecto al punto de contacto con el suelo C .

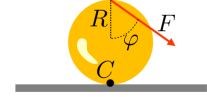
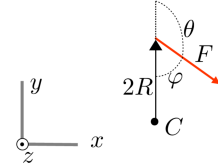


Figura del problema 2.3.1

Solución

Podemos encontrar el momento calculando explícitamente el producto vectorial. Observando la figura, $\vec{r}_{(C)} = 2R(0,1,0)$ y $\vec{F} = F(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$, y así:

$$\vec{M}_{(C)} = \vec{r}_{(C)} \times \vec{F} = 2RF \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -2RF \sin \varphi \hat{k}$$



Solución del problema 2.3.1

También podemos proceder aplicando la regla del tornillo, con la cual podemos decir $\vec{M}_{(C)} = -M_{(C)} \hat{k}$, y calcular el módulo según (2.11)

$$M_{(C)} = F \overline{C\vec{F}} = F 2R \sin \varphi \quad \blacksquare$$

→ **Momento angular.** Se define el momento angular de una partícula con respecto a un punto A , $\vec{L}_{(A)}$ como el momento de la cantidad de movimiento \vec{p} aplicada en el punto Q donde está la partícula (v. figura 2.6).

$$\vec{L}_{(A)} = \vec{r}_{(A)} \times \vec{p} \quad (2.12)$$

donde $\vec{r}_{(A)}$ es el vector posición del punto Q de aplicación de la cantidad de movimiento con respecto al punto A . Es importante que el punto A sea un punto fijo del sistema de referencia.

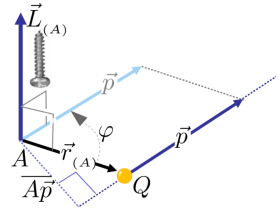


Fig. 2.6: Momento angular $\vec{L}_{(A)}$. Regla del tornillo

Las unidades del momento angular en el S.I. son $\text{kg m}^2/\text{s}$.

Recordemos que, debido al producto vectorial, la dirección del momento angular es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}_{(A)}$ y \vec{p} . Aún más, puesto que el primer vector del producto vectorial (2.12) es una posición, el módulo puede calcularse con la sencilla expresión:

$$L_{(A)} = p \overline{A\vec{p}} \quad (2.13)$$

donde $\overline{A\vec{p}}$ es la distancia entre el punto A y la recta de acción de la cantidad de movimiento \vec{p} . El sentido viene dado por la regla del tornillo.

La ley de movimiento de Newton implica que se cumple:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = \vec{M}_{(A)} \quad (2.14)$$

Demostración. Multiplicando ambos miembros de la ley de movimiento de Newton $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ por $\vec{r}_{(A)} \times$ y teniendo en cuenta que $\vec{r}_{(A)} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{(A)} \times \vec{p})$ (puesto que $\vec{r}_{(A)} = \vec{v} \times \vec{v} \times \vec{p} = 0$), obtenemos el resultado. \blacksquare



Hemos demostrado que la ecuación de movimiento de Newton implica (2.14), pero no que sean equivalentes: (2.14) **no implica** la ley de movimiento de Newton.

(2.14) permite interpretar que el momento de la fuerza es la causa de la variación del momento angular y enunciar:

→ **Teorema de la conservación del momento angular.** Si el momento de la fuerza que actúa sobre la partícula respecto a un punto A es nulo, el momento angular respecto al mismo punto se mantiene constante.

Observamos que tanto el momento angular como el momento de una fuerza dependen del punto A respecto al cual se calcule. Puede pasar que respecto a A tengamos $\vec{M}_{(A)} = 0$ y, en cambio, respecto a otro punto B tengamos $\vec{M}_{(B)} \neq 0$.

La nulidad del momento de una fuerza y, por consiguiente, la conservación del momento angular, se da si la resultante de las fuerzas que se aplican sobre la partícula es nula, pero también en otros casos bastante más interesantes, como cuando el vector $\vec{r}_{(A)}$ y la fuerza \vec{F} son paralelos. Por ello, aun en el caso de una sola partícula, utilizaremos la ecuación (2.14) para solucionar algunos problemas interesantes.

Como veremos más adelante, el teorema de conservación del momento angular es especialmente importante en el caso de un sistema de partículas y, en particular, en el sólido rígido.

→ **Impulso angular.** Se define el impulso angular \vec{Y} suministrado por el momento de una fuerza $\vec{M}_{(A)}$ en el intervalo $t_1 \rightarrow t_2$ como el vector

$$\vec{Y}_{(A)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{(A)} dt \quad (2.15)$$

Las unidades del impulso angular en el S.I. son $\text{kg m}^2/\text{s}$.

→ **Teorema del momento angular.** El incremento del momento angular es igual al impulso \vec{Y} suministrado:

$$\vec{Y}_{(A)} = \Delta \vec{L}_{(A)} \quad (2.16)$$

Demostración. Solo hay que considerar (2.14) en la forma $d\vec{L}_{(A)} = \vec{M}_{(A)} dt$ e integrar en el intervalo $t_1 \rightarrow t_2$ ■

Problema 2.3.2. Se sabe que los planetas tienen trayectorias elípticas con el Sol (que consideramos fijo) en uno de los focos. Demuestra la segunda ley de Kepler.



Solución

Tomamos momentos con respecto al punto A en el Sol. El momento de la fuerza es nulo y, por consiguiente, el momento angular se conserva:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{cte.}$$

Como la dirección del momento angular es fija, solo el módulo contiene la información relevante:

$$m r v \sin \theta = \text{cte.}$$

Teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad lo podemos escribir como $v = \frac{d\ell}{dt}$, resulta:

$$r \frac{d\ell}{dt} \sin \theta = \text{cte.}$$

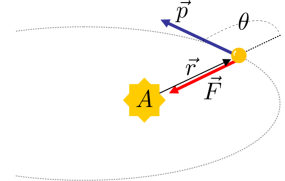
Observando la figura, las áreas barridas por el vector posición durante un tiempo forman triángulos que, en general, son escalenos, como el triángulo **A** de la figura. Además, la longitud de la trayectoria entre los dos vértices, $\Delta\ell$, no coincide con el lado correspondiente del triángulo. Si consideramos un tiempo $\Delta t \rightarrow dt$, el planeta habrá recorrido $\Delta\ell \rightarrow d\ell$ y tendremos el triángulo **B** de la figura. Ahora la longitud de la trayectoria entre los dos vértices, $d\ell$, coincide con el lado correspondiente del triángulo. Lo podemos ampliar para verlo bien, como el **C** de la figura. El área dA barrida por el vector posición en un dt es así igual al área del triángulo **C** de la figura. Sabiendo que el módulo del producto vectorial de dos vectores posición es el área del paralelogramo que forman, el área de nuestro triángulo será:

$$dA = \frac{1}{2} r d\ell \sin \varphi = \frac{1}{2} r d\ell \sin \theta$$

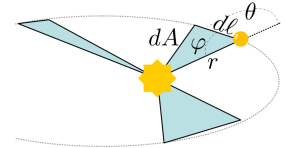
así, comparando este resultado con el que hemos obtenido de la conservación del momento angular, podemos concluir:

$$\frac{dA}{dt} = \text{cte.}$$

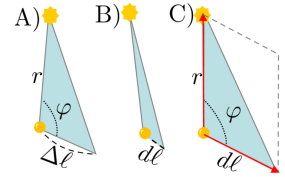
que constituye la segunda ley de Kepler: *las áreas barridas por el vector posición del planeta en tiempos iguales son iguales.* ■



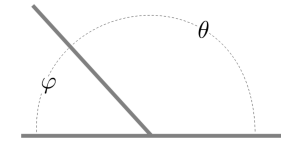
Solución del problema 2.3.2



Solución del problema 2.3.2



Solución del problema 2.3.2



Solución del problema 2.3.2



Fig. 2.7: Johannes Kepler (1571-1630) fue un astrónomo y matemático alemán

2.4 Trabajo, energía cinética y energía potencial. Potencia

Trabajo y energía son conceptos muy relacionados, que tienen un papel capital en el mundo de la física, más allá de la mecánica.

Trabajo de una fuerza

Para el caso simple de una partícula que se mueve rectilíneamente una distancia Δx bajo los efectos de una fuerza constante F , paralela y con el mismo sentido que el desplazamiento y quizás con la presencia de una fuerza de fricción (v. figura 2.8),



Fig. 2.8: Una partícula se desplaza rectilíneamente bajo la acción de una fuerza de dirección igual al vector desplazamiento



el trabajo de F se define a partir del producto de la fuerza F y el desplazamiento Δx :

$$W = F \Delta x \quad (2.17)$$

Si el movimiento es rectilíneo y la fuerza aplicada es constante, pero forma un ángulo θ con respecto al desplazamiento (v. figura 2.9), el trabajo es:

$$W = F \Delta x \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad (2.18)$$

Observamos que, en este caso, solo se considera la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, mientras que la componente perpendicular no realiza ningún trabajo.

Para el caso general en que la fuerza no sea constante y el camino C seguido por la partícula no sea rectilíneo (v. figura 2.10), para calcular el trabajo entre dos puntos P_1 y P_2 debemos considerar desplazamientos infinitesimales $d\vec{r}$ a lo largo del camino y hacer la suma de todos los trabajos $\vec{F} \cdot d\vec{r}$.

→ **Trabajo de una fuerza.** Definimos el trabajo W de una fuerza \vec{F} a lo largo de un camino C de P_1 a P_2 por la integral:

$$W = \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.19)$$

Si el camino lo conocemos por la expresión paramétrica $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, $P_1 = \vec{r}(\lambda_1)$ y $P_2 = \vec{r}(\lambda_2)$, podemos explicitar la integral del trabajo:

$$W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (2.20)$$

El concepto de trabajo es de gran importancia, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Los ingredientes para el cálculo del trabajo son: una fuerza \vec{F} y un camino C , con dos puntos sobre este. Esta fuerza y este camino no tienen por qué estar relacionados. Destacamos las dos interpretaciones siguientes:

→ **1.** Si la fuerza \vec{F} contribuye a mover la partícula por el camino C , entonces el camino lo podemos parametrizar con el tiempo t . $\vec{r}(t)$ es la trayectoria temporal y, si no hay otras fuerzas presentes, cumple $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\ddot{\vec{r}}$. Esta interpretación tiene un interés eminentemente práctico. El trabajo resulta, en este caso, una medida de la efectividad de la fuerza al desplazar la partícula. Podemos hacer mucha fuerza y poco trabajo (poco desplazamiento) o poca fuerza y mucho trabajo (mucho desplazamiento). El trabajo así entendido se aproxima muchísimo al concepto cotidiano que tenemos de *trabajo*, no tanto como medida del *agotamiento*, sino como medida de la eficacia en la transformación realizada en el entorno (en nuestro caso, el

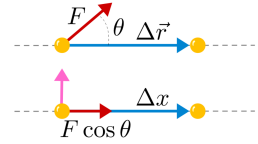


Fig. 2.9: Una partícula se desplaza rectilíneamente $\Delta \vec{r}$ bajo la acción de una fuerza constante \vec{F} . Solo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento hace que la partícula avance por la trayectoria

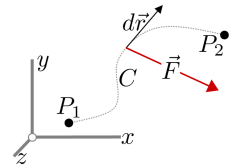


Fig. 2.10: Trabajo realizado por una fuerza \vec{F} de P_1 a P_2 a lo largo del camino C



desplazamiento de la partícula). Más adelante, veremos las fuerzas conservativas, las cuales, siguiendo con esta interpretación, son especialmente eficaces.

→ **2.** No necesariamente el camino C debe ser una solución de la ecuación de movimiento con la fuerza \vec{F} . Es decir, si $\vec{r}(t)$ es una trayectoria temporal que pasa por C y m la masa de la partícula a la cual aplicamos la fuerza \vec{F} , no tiene por qué pasar que $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\ddot{\vec{r}}(t)$. Si, además, la fuerza solo depende de la posición, $\vec{F}(\vec{r})$, podemos calcular el trabajo de una misma función fuerza por diferentes caminos aunque no conozcamos la trayectoria temporal. Ni siquiera hay que tener en cuenta la presencia de la partícula. Esta interpretación, como veremos, tendrá un interés teórico.

El concepto de energía cinética está relacionado con el de trabajo por la interpretación **1**, como veremos a continuación. En cambio, el concepto de energía potencial requerirá de la interpretación más abstracta, **2**. El concepto de potencia puede definirse siempre que conozcamos la trayectoria temporal de la partícula, como en la interpretación **1**.

→ **Potencia de una fuerza.** Se define potencia efectuada por una fuerza \vec{F} en cada instante como el ritmo de trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.21)$$

En general la partícula estará sometida a diferentes fuerzas. Si conocemos la trayectoria temporal causada por estas fuerzas podemos calcular la potencia de cada una por separado.

Energía cinética

La energía cinética de una partícula, de masa m y que se mueve a una velocidad \vec{v} , se define como la capacidad para hacer un trabajo, asociada al hecho de que está en movimiento. Así, si combinamos la definición de trabajo, $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, con la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, y la definición de velocidad, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, de la cual obtenemos $d\vec{r} = \vec{v}dt$, podemos escribir:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int m\vec{a} \cdot \vec{v} dt \quad (2.22)$$

Ahora, teniendo en cuenta $\vec{a} \cdot \vec{v} dt = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) dt = d \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right)$, obtenemos:

$$W = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (2.23)$$

→ **Energía cinética.** Definimos la energía cinética, E_c , de una partícula de masa m , que se mueve a una velocidad \vec{v} , como:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.24)$$



→ **Teorema del trabajo-energía.** El trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética:

$$W = \Delta E_c \quad (2.25)$$

También se conoce con el nombre de **teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética.**

Demostración. Solo nos queda acabar de hacer la integral final de (2.23) con los límites de integración \int_{ini}^{fi} y tener en cuenta la definición de energía cinética (2.24):

$$\int_{ini}^{fi} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = E_{c:fi} - E_{c:ini} \quad \blacksquare$$

Energía potencial

La energía potencial de una partícula, sometida a una fuerza conservativa, es la capacidad para realizar un trabajo por el hecho de ocupar una posición determinada en el espacio.

Consideramos el caso sencillo de una partícula que se mueve en una dimensión (utilizamos para esta la coordenada x) bajo los efectos de una fuerza que solo depende de la posición $F(x)$. Para este tipo de fuerza, siempre se puede definir una función diferenciable $U(x)$ tal que su derivada cambiada de signo es la fuerza $F(x)$:

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (2.26)$$

Este es un ejemplo de fuerza conservativa. La energía potencial queda definida como:

$$U(x) = U(0) - \int_0^x F dx \quad (2.27)$$

El trabajo que hace la fuerza $F(x)$ conservativa al mover una partícula entre los puntos inicial x_A y final x_B es:

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = - \int_{x_A}^{x_B} \frac{dU(x)}{dx} dx = - \int_{x_A}^{x_B} dU(x) = U(x_A) - U(x_B) \quad (2.28)$$

Los conceptos de energía potencial y de fuerza conservativa se pueden generalizar si hacemos las definiciones adecuadas.

→ **Fuerza conservativa.** Una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa si, para todo camino cerrado, el trabajo realizado es nulo (v. figura 2.12):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.29)$$

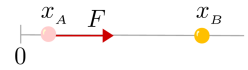


Fig. 2.11: Caso unidimensional. Trabajo realizado por una fuerza \vec{F} de x_A a x_B por el único camino posible

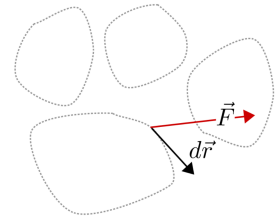


Fig. 2.12: Posibles caminos cerrados



Si $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa, el trabajo realizado para ir de un punto a otro no depende del camino concreto que empleemos, puesto que, observando la figura 2.13:

$$\oint_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1: C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_2: C_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1: C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_1: C_2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.30)$$

y si la fuerza es conservativa:

$$\int_{P_1: C_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1: C_2}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.31)$$

Al no depender del camino, la integral de trabajo se podrá expresar como una función solo dependiente de los puntos de salida y llegada, P_1 y P_2 ,

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_1, P_2) \quad (2.32)$$

Ahora, teniendo en cuenta las propiedades generales de las integrales definidas:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.33)$$

$$= \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{P_2}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_1, P_0) - f(P_2, P_0) \quad (2.34)$$

→ **Energía potencial de una fuerza conservativa.** La energía potencial asociada a una fuerza conservativa se define como la función dependiente del punto del espacio P , $U(P)$, según:

$$U(P) - U(P_0) = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.35)$$

La integral solo depende de los puntos $P = (x, y, z)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Este último se dice que es un punto de referencia. Así pues, el valor de la energía potencial $U(x, y, z)$ se expresa en términos de un valor de referencia $U(x_0, y_0, z_0)$ para una posición determinada (x_0, y_0, z_0) . Si nos conviene, siempre podremos ajustar la función potencial U de forma que el valor en su punto de referencia sea nulo, $U(P_0) = U(x_0, y_0, z_0) = 0$. Por ejemplo, para el caso de una partícula unida a un muelle, la energía potencial se puede tomar como nula cuando el muelle no está deformado (ni alargado ni comprimido). Para el caso de la fuerza gravitatoria que se ejercen dos partículas de una masa determinada, la energía potencial puede tomarse como nula cuando la distancia entre ambas partículas es infinita. El hecho

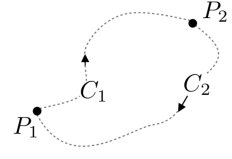


Fig. 2.13: Podemos ir y volver a P_1 por un camino cerrado que pase por P_2 , que podemos interpretar formado por dos caminos diferentes, C_1 y C_2 , que van de P_1 a P_2



de tomar un punto u otro como referencia no hace más que introducir una indeterminación de una constante en la definición de la energía potencial. Veremos que esta constante no tiene ninguna relevancia y, en la práctica, lo que importa es la *función energía potencial* como primitiva de la integral: $U(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

De la definición de energía potencial, tenemos:

$$U(P) = - \int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_P^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P, 0) \quad (2.36)$$

Así, combinando (2.33) y (2.36):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_1) - U(P_2) = - \int_{P_1}^{P_2} dU \quad (2.37)$$

→ **Trabajo de una fuerza conservativa.** El trabajo de una fuerza conservativa es igual a la disminución de su energía potencial:

$$W = -\Delta U \quad (2.38)$$

Si conocemos la energía potencial U asociada a una fuerza \vec{F} , pero no conocemos la fuerza, la podemos encontrar teniendo en cuenta que $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU = -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}$ y, por consiguiente:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (2.39)$$

En general, es más práctico usar la definición de energía potencial como integral primitiva, en vez de utilizar los límites de integración, y añadir una constante no determinada, que podemos elegir a conveniencia:

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \text{constante} \quad (2.40)$$

No debe preocuparnos conocer esta constante. Lo que tiene significado es el trabajo o la fuerza, y estos dependen de las *diferencias* de potencial. Solo las diferencias de potencial tienen un significado físico, porque son las que están relacionadas directamente con el trabajo o con la fuerza.

Saber si una fuerza dada es conservativa o no, utilizando literalmente la definición de fuerza conservativa, es totalmente inviable, puesto que tendríamos que ir probando todos los caminos cerrados que nos podamos imaginar. Si encontramos un camino cerrado en que el trabajo sea diferente de cero, podremos decir que no es conservativa, pero, si no lo encontramos, ¿hemos de seguir buscando! Un criterio bastante sencillo, en algunos casos, es el siguiente: si al hacer la integral de trabajo $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no nos es necesario especificar un camino concreto, es que la fuerza es



conservativa. En general, siempre podemos escribir:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

Si F_x solo depende de x , F_y solo depende de y y F_z solo depende de z , las tres integrales siempre se podrán resolver y la fuerza será conservativa. Si, por ejemplo, F_y depende de x , necesitaremos conocer una relación entre las coordenadas x y y para poder integrar, y ello quiere decir que necesitaremos elegir un camino. Este criterio puede utilizarse también en casos de alta simetría, como ocurre con las fuerzas gravitatoria y electrostática (ambas tienen simetría esférica), que veremos en el capítulo 3.

En el caso general, hay técnicas para saber si una fuerza dada es conservativa o no. Pero tanto su aplicación como su demostración quedan fuera del alcance de este curso.

Energía mecánica

→ **Energía mecánica.** Con las fuerzas conservativas, se define la energía mecánica como la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + U \quad (2.41)$$

Si todas las fuerzas son conservativas, aplicando el resultado del teorema del trabajo-energía entre dos situaciones diferentes, inicial (ini) y final (fi), por las cuales las energías cinética y potencial son $E_{c:ini}$, U_{ini} y $E_{c:fi}$, U_{fi} , tenemos:

$$W = E_{c:fi} - E_{c:ini} = -(U_{fi} - U_{ini}) \quad (2.42)$$

de donde obtenemos $E_{c:fi} + U_{fi} = E_{c:ini} + U_{ini}$ o, más sintéticamente:

$$E_{fi} = E_{ini} \quad (2.43)$$

→ **Teorema de la conservación de la energía mecánica.** Si una partícula está sometida únicamente a fuerzas conservativas, el valor numérico de la energía mecánica se mantiene constante a lo largo del tiempo.

Habitualmente, se dice que que *la energía mecánica se conserva*.

Podemos deducir la conservación de la energía derivando con respecto al tiempo directamente la función energía $E(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(\vec{r})$ y teniendo en cuenta que:

- 1) $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$ permite escribir $\frac{dU}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$.
- 2) $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$.



3) La derivada es total; es una derivada sobre la trayectoria temporal y, por consiguiente, se cumple $m\vec{a} = \vec{F}$.

Utilizando estos tres hechos, obtenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d\vec{v}^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = m\vec{v} \cdot \vec{a} - \vec{F} \cdot \vec{v} = (m \cdot \vec{a} - \vec{F}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.44)$$

Si actúan sobre la partícula varias fuerzas, unas conservativas y otras no conservativas, las podemos agrupar. \vec{F} será la resultante de las fuerzas conservativas y \vec{F}_{NC} será la resultante de las fuerzas no conservativas. Por un lado, tenemos que el trabajo de todas las fuerzas será $W = W_C + W_{NC}$ y, por el otro, la ecuación de movimiento será $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{NC}$. Solo \vec{F} tiene una energía potencial asociada: $W_C = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U$.

Ahora la energía no se conservará, pero podremos escribir una modificación de (2.43):

$$E_{fi} - E_{ini} = W_{NC} \quad (2.45)$$

y también una modificación de (2.44):

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{NC} \cdot \vec{v} \quad (2.46)$$

→ La unidad de trabajo y energía en el S.I. es el joule (J): $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$

→ La unidad de potencia en el S.I. es el watt (W): $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$

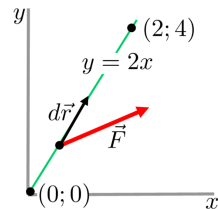
Problema 2.4.1. Sobre una partícula actúa la fuerza $\vec{F} = (y^2 - x^2) \hat{i} + 3xy \hat{j}$ (unidades del S.I.). Encuentra el trabajo efectuado por \vec{F} al moverse la partícula del punto (0; 0) al (2; 4) siguiendo:

- a) la recta $y = 2x$
- b) la parábola $y = x^2$
- c) ¿Es conservativa?

Solución

a) La recta $y = 2x$. En general, para calcular el trabajo necesitaremos conocer la trayectoria geométrica en forma paramétrica, $\vec{r}(\lambda)$, y la fuerza \vec{F} y el desplazamiento $d\vec{r}$ sobre esta trayectoria. La forma paramétrica de la recta $y = 2x$ se puede escribir utilizando el parámetro λ como $\vec{r}(\lambda) = (\lambda, 2\lambda)$ con $\lambda \in [0; 2]$. Si sustituimos en la fuerza, obtenemos $\vec{F} = ((2\lambda)^2 - \lambda^2, 3\lambda \cdot 2\lambda) = 3\lambda^2 (1; 2)$ y, si diferenciamos $\vec{r}(\lambda)$ resulta $d\vec{r} = (1; 2) d\lambda$. Finalmente obtenemos:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 3\lambda^2 (1; 2) \cdot (1; 2) d\lambda = 15 \int_0^2 \lambda^2 d\lambda = 40 \text{ J}$$



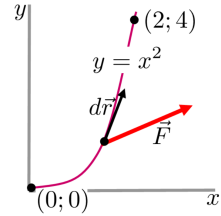
Solución del apartado a del problema 2.4.1



b) La parábola $y = x^2$. En este caso, la forma paramétrica puede ser escrita: $\vec{r}(\lambda) = (\lambda, \lambda^2)$ con $\lambda \in [0, 2]$. La fuerza sobre la trayectoria es $\vec{F} = ((\lambda^2)^2 - \lambda^2), 3\lambda \cdot \lambda^2) = (\lambda^4 - \lambda^2, 3\lambda^3)$ y el desplazamiento sobre la trayectoria $d\vec{r} = (1, 2\lambda) d\lambda$. Obtenemos:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (\lambda^4 - \lambda^2, 3\lambda^3) \cdot (1; 2\lambda) d\lambda = \int_0^2 (7\lambda^4 - \lambda^2) d\lambda = 42,13 \text{ J}$$

No es conservativa porque, como mínimo, hay un caso en que el trabajo entre dos puntos depende del camino. Observemos que, si hubiera dado lo mismo, no podríamos asegurar que fuera conservativa. ■



Solución del apartado **b** del problema 2.4.1

Problema 2.4.2. Con una velocidad inicial adecuada y debido a la fuerza $\vec{F} = -4(x, y)$, una partícula de masa 4 se mueve del punto $(2; 0)$ al punto $(0; 3)$ por la trayectoria $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$ (todas las magnitudes están expresadas en unidades del S.I.):

- Prueba que esta trayectoria es posible.
- Calcula el trabajo de la fuerza entre estos dos puntos a través de un camino arbitrario.
- ¿Es esta fuerza conservativa? Encuentra la energía potencial asociada.
- Calcula la energía mecánica y prueba explícitamente que se conserva sobre la trayectoria dada.

Solución

a) Tenemos que probar que la trayectoria cumple la ley de movimiento de Newton para esta fuerza: $\vec{F} \stackrel{?}{=} m\ddot{\vec{r}}$.

La fuerza sobre la trayectoria es:

$$\vec{F} = -4(x, y) = -4\vec{r} = -4(2 \cos t, 3 \sin t)$$

La aceleración:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= (-2 \sin t, 3 \cos t) \\ \ddot{\vec{r}} &= (-2 \cos t, -3 \sin t) \end{aligned}$$

Así:

$$m \ddot{\vec{r}} = -4(2 \cos t, 3 \sin t)$$

que es lo mismo que \vec{F} y, por consiguiente, se cumple la ley de movimiento.

b) y **c)** Por la estructura que tiene la fuerza, del tipo $\vec{F} = (F_x(x), F_y(y), F_z(z))$, vemos que es conservativa. La energía potencial es:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 \int (x dx + y dy) = 4 \left(\int x dx + \int y dy \right) = 2(x^2 + y^2) + C$$



El trabajo pedido es:

$$W = -\Delta U = -(U(0,3) - U(2,0)) = -10 \text{ J}$$

d) La energía del sistema es

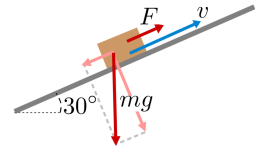
$$E = E_c + U = \frac{1}{2}4v^2 + 2(x^2 + y^2) + C$$

Sustituyendo la trayectoria, teniendo en cuenta que $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ y simplificando, encontramos

$$E = \frac{1}{2}4(4\sin^2 t + 9\cos^2 t) + 2(4\cos^2 t + 9\sin^2 t) + C = 26 + C$$

E se mantiene constante. ■

Problema 2.4.3. Una masa de 5 kg sube por un plano inclinado 30° con la horizontal, con una velocidad constante de 15 m/s. Calcula la potencia desarrollada por la fuerza que la hace subir.



Solución del problema 2.4.3

Solución

Si la fuerza que la hace subir es \vec{F} y la velocidad es \vec{v} , la potencia será $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

La fuerza que hace que la masa suba debe contrarrestar la componente del peso paralelo al plano inclinado y, como la velocidad es constante, la fuerza total es nula. Así, la fuerza mencionada tiene el mismo módulo que la componente del peso: $F = mg \sin 30^\circ$ y, como esta fuerza tiene el mismo sentido que la velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = mgv \sin 30^\circ = 367,5 \text{ W}$$

■

Problema 2.4.4. Halla la expresión de la energía potencial asociada a la fuerza $\vec{F} = (-kx + \frac{a}{x^3}) \hat{i}$.

Solución

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int F dx = - \int (-kx + a/x^3) dx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a}{2x^2} + C$$

■

2.5 Algunas fuerzas

A manera de ejemplos útiles, aplicaremos los conceptos que se han tratado a una serie de fuerzas, aplicadas sobre una partícula, que más adelante nos aparecerán en diferentes contextos. Al tratarlas en un mismo bloque, veremos cuán útiles son los conceptos de este tema y apreciar qué tienen en común y en qué difieren.



Fuerza nula

$\vec{F} = 0$. La ecuación de movimiento es:

$$m \vec{a} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0 \quad (2.47)$$

Integrando dos veces $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t$. Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 &= \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 &= \vec{C}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{C}_2 &= \vec{v}_0 \\ \vec{C}_1 &= \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 \end{aligned} \right.$$

obtenemos finalmente:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) \quad (2.48)$$

La función energía potencial es $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow U = \text{cte}$. Se conserva la energía, que será solo energía cinética. También se conservan la cantidad de movimiento y el momento angular.

Fuerza constante

$\vec{F} = \text{cte}$. El movimiento está contenido en el plano definido por la velocidad inicial y la fuerza (v. figura 2.14), puesto que, según la ley de movimiento de Newton, los cambios de dirección del vector velocidad tienen la dirección del vector fuerza: $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} dt$.

La ecuación de movimiento es:

$$m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \text{cte.} \quad (2.49)$$

integrando dos veces $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 &= \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t_0 + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t_0^2 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 &= \vec{C}_2 + \frac{\vec{F}}{m} t_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{C}_2 &= \vec{v}_0 - \frac{\vec{F}}{m} t_0 \\ \vec{C}_1 &= \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t_0^2 \end{aligned} \right.$$

obtenemos la expresión de la trayectoria:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} (t - t_0)^2 \quad (2.50)$$

Si escogemos el sistema de referencia de forma que el plano del movimiento sea (x, y) con el eje y en la dirección de la fuerza $\vec{F} = (0, F)$ (v. figura 2.15):

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0} (t - t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_{y0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F}{m} (t - t_0)^2 \end{aligned} \right.$$

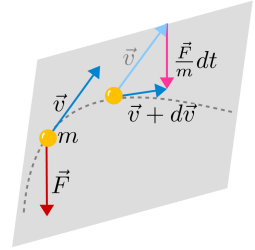


Fig. 2.14: Fuerza constante en una dirección no especificada

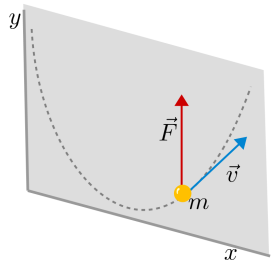


Fig. 2.15: Fuerza constante en la dirección y el sentido de las y crecientes



$\vec{F} = \text{cte.}$ es una fuerza conservativa, puesto que podemos encontrar la energía potencial asociada

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \vec{r} + \text{cte.} \quad (2.51)$$

Un caso importante (¡pero no el único!) es el de una partícula de masa m , sometida al campo gravitatorio, $\vec{g} = \text{constante}$, próximo a la Tierra o a cualquier planeta (v. figura 2.16):

$$m \vec{a} = \vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} = \text{cte.} \quad (2.52)$$

Con la elección de los ejes hecha anteriormente y escogiendo el sentido positivo del eje y en sentido contrario a la fuerza $\vec{g} = (0, -g)$, resulta:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0} (t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{y0} (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

y la energía potencial resulta, aplicando (2.51), $U = mgy + \text{cte.}$

Otro caso de interés es el de una partícula de masa m y carga eléctrica q bajo la acción de un campo eléctrico constante $\vec{E} = \text{cte.}$ (v. figura 2.17)

$$m \vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \text{cte.}$$

Con la elección de los ejes hecha anteriormente y escogiendo el sentido positivo del eje y en sentido del campo \vec{E} :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0} (t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_{y0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} (t - t_0)^2 \end{cases}$$

y la energía potencial resulta, aplicando (2.51), $U = -qEy + \text{cte.}$

$\vec{F}(\vec{r})$ movimiento unidimensional

Si la fuerza tiene una dirección fija, con una elección adecuada de los ejes podemos expresarla como $\vec{F} = F(\vec{r}) \hat{i}$. Si la velocidad inicial tiene la dirección de la fuerza, la fuerza no hará variar la dirección de la velocidad y el movimiento puede ser descrito con una única coordenada x (v. figura 2.18):

$$m \ddot{x} = F(x)$$

La fuerza siempre será conservativa, puesto que:

$$U(x) = - \int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = - \int F(x) dx$$

y la integral siempre se podrá resolver.

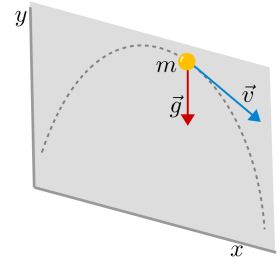


Fig. 2.16: Campo gravitatorio g constante en la dirección y sentido de las y decrecientes

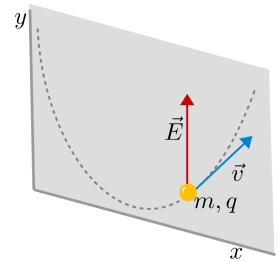


Fig. 2.17: Campo eléctrico constante E en la dirección y sentido de las y crecientes

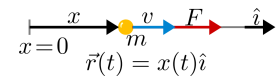


Fig. 2.18: Movimiento unidimensional



La energía mecánica se conserva. Este hecho lo podemos aprovechar para encontrar la trayectoria. $E = \text{constante}$ y también:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = \text{cte.}$$

que podemos entender como ecuación diferencial para encontrar la trayectoria $x(t)$. Podemos aplicar la separación de variables x y t e integrar: t de t_0 a t y x de $x(t_0)$ a $x(t)$. La integral de t es inmediata:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \quad (2.53)$$

Si conocemos explícitamente la función $U(x)$, siempre podremos integrar, y posteriormente despejar $x(t)$. Las dos constantes que tienen que aparecer en la trayectoria son E y $x_0 = x(t_0)$. A pesar de que el problema queda formalmente resuelto, hay que decir que la integración que nos queda por hacer puede llegar a ser muy difícil.

Movimiento unidimensional armónico

Es un caso particular del apartado que acabamos de tratar.

$$F = -kx + F_0$$

Se suele escribir en la forma $F = -k(x - x_0)$, es decir, $x = x_0$ es la posición para la cual la fuerza se anula: $x_0 = \frac{F_0}{k}$ (v. figura 2.19)

Hecho esto, se toma un nuevo sistema de referencia, x' , de forma que $x' = x - x_0$. La fuerza se expresará como $F = -kx'$. Por comodidad, renombramos la coordenada x' como x . En definitiva, la fuerza que queremos tratar es:

$$F = -kx$$

La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -kx$$

La energía potencial:

$$U(x) = - \int (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte.}$$

y podemos encontrar la trayectoria haciendo la integral (2.53), que ahora es:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)$$

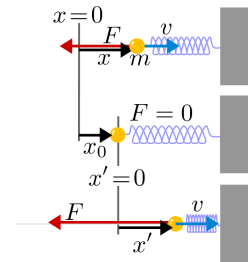


Fig. 2.19: Movimiento unidimensional armónico



Sacando factor común $\frac{k}{2}$ de la raíz del denominador (por eso multiplicamos y dividimos E por $\frac{k}{2}$), el primer miembro se puede escribir:

$$\sqrt{\frac{2}{k}} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}$$

y, teniendo en cuenta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

obtenemos, una vez sustituidos los límites de integración e igualando con el segundo miembro:

$$\sqrt{\frac{2}{k}} \left\{ \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)$$

Ahora, despejando x , encontramos la trayectoria:

$$x(t) = A \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0) \tag{2.54}$$

con $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, $\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Recordemos que también contamos con la relación $E = \frac{1}{2}m v_0^2(t_0)^2 + \frac{1}{2}k x_0^2$. Fijémonos que la relación entre A y E se puede escribir también $E = \frac{1}{2}k A^2$.

Estudiaremos con profundidad los movimientos armónicos en el capítulo 6.

Fuerzas centrales

Se trata de fuerzas cuya recta de acción siempre pasa por un mismo punto (v. figura 2.20). Por ejemplo, la fuerza gravitatoria que el Sol (o cualquier masa) ejerce sobre toda otra partícula o la fuerza electrostática que cualquier carga fija ejerce sobre toda partícula cargada, pero también la tensión de una cuerda que pasa por una pequeña polea, atada a un cuerpo en uno de sus extremos (v. figura 2.21). En esta figura 2.21, la tensión T_B puede ser una fuerza constante, pero ¡la tensión T es una fuerza central!

Todas las fuerzas centrales cumplen la segunda ley de Kepler.

Demostración. El momento $\vec{M}_{(C)}$ de la fuerza respecto al punto C siempre es nulo. Teniendo en cuenta que $\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)}$, si no actúa ninguna otra fuerza deducimos $\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = 0$. El momento angular respecto a C se conserva a lo largo del movimiento y, según hemos visto en la sección 2.3, esto es equivalente a la segunda ley de Kepler. ■

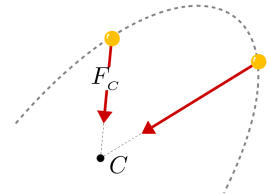


Fig. 2.20: Fuerza central

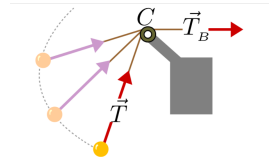


Fig. 2.21: Fuerza central causada por la tensión de una cuerda que pasa por una pequeña polea



Energía potencial de una fuerza central del tipo $\vec{F} = -F(r) \hat{r}$ (v. figura 2.22)

Intentemos hacer la integral de trabajo independientemente del camino:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int F \hat{r} \cdot d\vec{r}$$

Ahora:

$$\left. \begin{aligned} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) &= 2\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ dr^2 &= 2r dr \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr \Rightarrow \hat{r} \cdot d\vec{r} = dr$$

Por tanto, la integral involucra una sola variable r sin que hayamos escogido ningún camino particular. Las fuerzas centrales del tipo $\vec{F} = -F(r) \hat{r}$ son conservativas, con una energía potencial asociada:

$$U = \int F(r) dr + \text{cte.} \quad (2.55)$$

Por ejemplo: la fuerza que el Sol (fijo, de masa M) ejerce sobre un planeta (partícula de masa m)

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

La energía potencial, sustituyendo la fuerza anterior en (2.55), es:

$$U = -G \frac{mM}{r} + \text{cte.}$$

Fuerzas no conservativas

Una fuerza se denomina **giroscópica** cuando no se puede definir la función energía potencial, pero $\frac{dE}{dt} = 0$. Desde el punto de vista energético, se pueden considerar conservativas, puesto que no disipan energía. Una fuerza se denomina **disipativa** cuando no se puede definir la función energía potencial y, además, $\frac{dE}{dt} < 0$.

Fuerzas giroscópicas

El ejemplo más conocido de fuerza giroscópica es la fuerza de Lorentz \vec{F}_B : un campo magnético \vec{B} que actúa sobre una partícula cargada q , que se mueve a una velocidad \vec{v} :

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.56)$$

Suponemos que la partícula está sometida a una fuerza conservativa \vec{F} , de energía potencial $U(\vec{r})$, y a una fuerza de Lorentz (2.56). Según lo que hemos visto en relación con la energía y las fuerzas no conservativas (2.46), tendremos:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot (q \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

¡La energía se conserva!

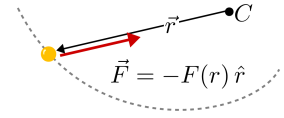


Fig. 2.22: Expresión vectorial de una fuerza central



Fuerzas de fricción seca

Cuando un objeto duro se desliza en contacto con una superficie no lisa, que aquí suponemos en reposo, sea por la presencia de la gravedad o por alguna otra fuerza que lo presione, en el contacto aparecen fuerzas distribuidas sobre el objeto que, si es pequeño, podemos descomponer en dos: una perpendicular a la superficie de contacto, que denominamos **normal**, N , y otra que se opone al movimiento y que denominamos **fricción seca**, F_f . Experimentalmente, para superficies suficientemente lisas y duras, el módulo de la fuerza de fricción seca, mientras el objeto está en movimiento, es $F_f = \mu_c N$, donde μ_c es el **coeficiente de fricción cinético o dinámico**, que depende de la naturaleza de las superficies en contacto. La fuerza F_f se puede expresar en la forma vectorial siguiente (v. figura 2.23).

$$\vec{F}_f = -F_f \frac{\vec{v}}{v}, \quad F_f = \mu_c N \quad (2.57)$$

Así, queda claro que es una fuerza que depende de la velocidad (no del módulo, ¡pero sí de la dirección y del sentido!). Solo si la superficie que provoca la fuerza de fricción está en reposo, podemos decir que *siempre se opone al movimiento*. Es la dependencia de la velocidad la que hace que no sea posible encontrar una función energía potencial. Cuando queremos hacer la integral de trabajo, nos es necesario conocer por qué camino pasa el objeto.

Supongamos que la partícula está sometida a la fuerza conservativa \vec{F} , con energía potencial $U(\vec{r})$, y a una fuerza de fricción seca. Según lo que hemos visto en relación con la energía y las fuerzas no conservativas (2.46), tendremos:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \left(-F_f \frac{\vec{v}}{v} \right) = -F_f v$$

La fuerza de fricción seca es disipativa. Desde el punto de vista de la mecánica, esta energía *desaparece*. La interpretación física que se da a este hecho (más allá de la mecánica) la encontramos aplicando el principio de conservación de la energía o primer principio de la termodinámica: una parte de esta energía aumenta la energía interna del sistema y la otra se disipa en forma de calor/radiación. Pero, para ello, sería necesario introducirnos un poco en el terreno de la termodinámica, y esto queda fuera del alcance de este curso.

Hemos visto cómo afecta la fricción seca cuando el objeto se mueve, generalmente por el hecho de estar sometido a otra fuerza que supera la fricción. Pero ¿qué pasa si el objeto no se mueve?

Si, sobre el bloque de la figura 2.24, se aplica una fuerza F y entre la superficie que soporta el bloque y este hay fricción, se observa que la fuerza de fricción evoluciona de la manera siguiente:

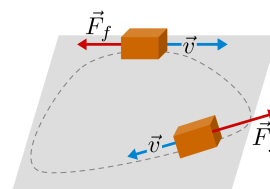


Fig. 2.23: La fuerza de fricción dinámica tiene sentido contrario a la velocidad

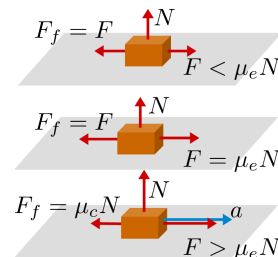


Fig. 2.24: Evolución de la fuerza de fricción



Si la fuerza no es bastante grande, el bloque no se mueve y $F_f = F$. Si vamos incrementando F , llegamos a un valor frontera, $F = \mu_e N$, en el cual, a pesar de que el bloque todavía no se mueve, $F_f = F$, cualquier incremento de F , por pequeño que sea, lo hará mover. Decimos que está en **movimiento inminente**. El coeficiente μ_e se denomina **coeficiente de fricción estático**. Si continuamos aumentando F , $F > \mu_e N$, el bloque se mueve y la fuerza de fricción experimenta una bajada hasta el valor $F_f = \mu_c N$. El coeficiente μ_c es, como ya hemos comentado más arriba, el coeficiente de fricción cinético o dinámico. Siempre $\mu_e > \mu_c$. En la gráfica de la figura 2.25, podemos ver la evolución de la fuerza de fricción F_f , en función de la fuerza aplicada F .

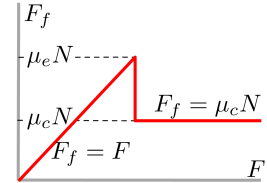


Fig. 2.25: Evolución de la fuerza de fricción F_f en función de la fuerza aplicada F

Nota. A pesar de que en los problemas reales hay que tener en cuenta este comportamiento y, por consiguiente, la existencia de los dos coeficientes, en este curso, si no decimos lo contrario, hablamos del coeficiente de fricción μ sin especificar y entendemos que $\mu = \mu_e = \mu_c$.

Problema 2.5.1. Una partícula de 2 kg se desliza por un plano inclinado de 2 m de altura. Partiendo de la parte superior con velocidad nula, llega al final con una velocidad de 5 m/s. Calcula la pérdida de energía debida a la fuerza de fricción y el valor de esta, considerada constante, si entre el plano y la horizontal hay un ángulo de 45° . ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción dinámico?

Solución

La pérdida de energía mecánica es el incremento de energía mecánica, cambiado de signo:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

$$-\Delta E = -(E_{fi} - E_{ini}) = E_{ini} - E_{fi} =$$

$$\left(\frac{1}{2}m v_{ini}^2 + mgh_{ini}\right) - \left(\frac{1}{2}m v_{fi}^2 + mgh_{fi}\right) = 14,2 \text{ J}$$

La variación de energía es debida al trabajo de la fuerza de fricción:

$$\Delta E = W_f = \int_{s_{ini}}^{s_{fi}} \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = - \int_{s_{ini}}^{s_{fi}} F_f ds = -F_f(s_{fi} - s_{ini}) = -F_f \frac{h_{ini}}{\sin 45^\circ}$$

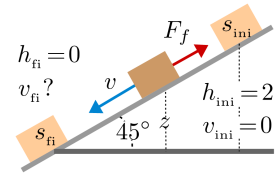
donde $ds = |d\vec{r}|$ es la longitud recorrida por la partícula a lo largo del plano inclinado y la fuerza de fricción \vec{F}_f tiene siempre la misma dirección y sentido contrario a la velocidad.

Finalmente, la fuerza de fricción es:

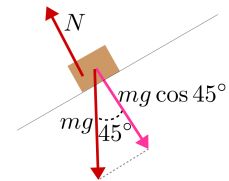
$$F_f = - \frac{\Delta E}{\left(\frac{h_{ini}}{\sin 45^\circ}\right)} = 5,02 \text{ N}$$

El coeficiente de fricción dinámico es

$$F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{N} = \frac{F_f}{mg \cos 45^\circ} = 0,36$$



Solución del problema 2.5.1



Solución del problema 2.5.1



Fuerzas de fricción viscosa

Experimentalmente, se sabe que la fricción de un cuerpo en un fluido (fricción viscosa o aerodinámica) depende de la forma del cuerpo, de las características materiales de la superficie, del tipo de fluido y de la velocidad del cuerpo (respecto al fluido, que aquí consideramos en reposo). Una buena aproximación a este tipo de fricción es, en régimen laminar (v. figura 2.26 superior):

$$\vec{F}_b = -b\vec{v} \quad b > 0 \quad (2.58)$$

No es conservativa. Supongamos que la partícula está sometida a la fuerza conservativa \vec{F} , con energía potencial $U(\vec{r})$, y a una fuerza de fricción viscosa. Según lo que hemos visto en relación con la energía y las fuerzas no conservativas (2.46), tendremos:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot (-b\vec{v}) = -bv^2$$

Si el régimen es turbulento (v. figura 2.26 inferior), la fuerza de fricción se puede aproximar según:

$$\vec{F}_\kappa = -\kappa v^2 \hat{v} \quad \kappa > 0 \quad (2.59)$$

Problema 2.5.2. Una partícula dentro de un medio viscoso está sometida a una fuerza constante, además de la fuerza de fricción debida a la viscosidad.

- Demuestra que la partícula acaba teniendo una velocidad constante y determina el valor de esta velocidad.
- Aplica el resultado al caso de caída dentro de un medio viscoso.

Solución

a) La fuerza que actúa sobre la partícula es $\vec{F}_T = \vec{F} + \vec{F}_b = m\vec{a}$, siendo \vec{F} = constante y $\vec{F}_b = -b\vec{v}$, con $b > 0$ constante.

Observando la figura, podemos ver que \vec{F}_b tiende a hacer disminuir la componente de la velocidad normal a \vec{F} , de forma que \vec{v} y también la propia \vec{F}_b se irán alineando con \vec{F} . Este proceso se acabará cuando $\vec{F}_T = 0$, es decir, cuando la velocidad llegue a un valor \vec{v}_L tal que $\vec{F} - b\vec{v}_L = 0$. Despejando:

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{b}$$

Hay que decir que este es un valor límite. $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{b}$ es una posible solución de la ecuación de movimiento que necesita una velocidad inicial determinada $\vec{v}_0 = \frac{\vec{F}}{b}$. La solución general para la evolución de la velocidad a partir de una velocidad inicial \vec{v}_0

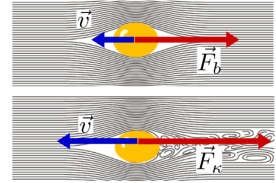


Fig. 2.26: Superior: el régimen laminar se da para altas viscosidades del fluido y bajas velocidades relativas. Inferior: el régimen turbulento se da para bajas viscosidades del fluido y altas velocidades relativas



Solución del problema 2.5.2



la podemos extraer integrando $m\vec{a} = \vec{F} - b\vec{v}$, que podemos escribir $\dot{\vec{v}} + \frac{b}{m}\vec{v} = \frac{b}{m}\vec{v}_L$.
La solución de esta ecuación es:

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \vec{v}_L) e^{-\frac{b}{m}t} + \vec{v}_L$$

Podemos ver que, para $t \rightarrow \infty$, tenemos $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_L$.

b)

$$\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{v}_L = \frac{m\vec{g}}{b} \quad \blacksquare$$

Fuerzas que solo dependen del tiempo

Son fuerzas de la forma $\vec{F}_t = \vec{F}_t(t)$. No son conservativas por el hecho que dependen explícitamente del tiempo. Supongamos que la partícula está sometida a la fuerza conservativa \vec{F} , con energía potencial $U(\vec{r})$, y a una fuerza $\vec{F}_t = \vec{F}_t(t)$. Según lo que hemos visto en relación con la energía y las fuerzas no conservativas, (2.46), tendremos:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}_t$$

Si la partícula solo está sometida a \vec{F}_t , la integración formal de la ecuación de movimiento es sencilla:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_t(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{m} \int \left(\int \vec{F}_t(t) dt \right) dt \quad (2.60)$$

Las condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$ determinan los dos constantes de integración.

Problema 2.5.3. Una partícula de masa m en reposo en $\vec{r} = (0; 0; 0)$ está sometida a la fuerza dependiente del tiempo $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \Omega t$.

a) Encuentra la trayectoria temporal.

b) ¿Qué velocidad inicial hace que el movimiento sea el mismo que el provocado por un muelle?

Solución

a) Encontramos la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \int \vec{F} dt = \frac{1}{m} \int \vec{F}_0 \sin \Omega t dt = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega} \cos \Omega t + C_1$$

Encontramos la posición:

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2} \sin \Omega t + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$$

y encontramos las constantes de integración:

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) = (0,0,0) &\Rightarrow \vec{C}_2 = (0,0,0) \\ \vec{v}(0) = (0,0,0) &\Rightarrow \vec{C}_1 = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega}\end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega} \left(t - \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right)$$

b) Para un muelle:

$$\vec{r} = \vec{A} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\vec{A}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \vec{F} = -m\vec{A}\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Si comparamos esta fuerza con la dada en el enunciado, es necesario que $\varphi_0 = \pi$, $\omega = \Omega$ y $\vec{A} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2}$. Así:

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega^2} \sin(\Omega t + \pi) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_0}{m\Omega} \cos(\Omega t + \pi) \Rightarrow \vec{v}(0) = -\frac{\vec{F}_0}{m\Omega} \quad \blacksquare$$

→ 3

3 Dinámica de N partículas

Introducción

Estudiaremos la extensión de las leyes y los conceptos introducidos para una partícula a N partículas. También veremos los sistemas de partículas ligadas, en especial el caso del sólido rígido. Consideraremos el caso de un sistema finito de N partículas discretas de posiciones \vec{r}_i y masas m_i (v. figura 3.1), pero también podemos incluir los sistemas continuos, con un número $N \rightarrow \infty$ de partículas con posiciones \vec{r} y masas $dm = \rho dv$, donde ρ es la densidad (v. figura 3.2). Para ello *solo* hay que entender las sumas, con $N \rightarrow \infty$, $m_i \rightarrow dm = \rho dv$ y $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}$, como integrales:

$$\sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) m_i \rightarrow \int_V f(\vec{r}) \rho dv \quad (3.1)$$

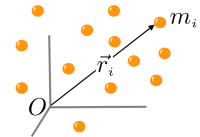


Fig. 3.1: Sistema de N partículas

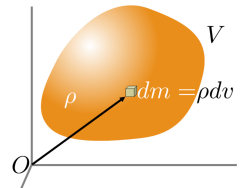


Fig. 3.2: Un cuerpo continuo como sistema de $N \rightarrow \infty$ partículas

3.1 Fuerzas entre partículas. Segunda y tercera leyes de Newton

Sobre cada partícula de un sistema de N partículas pueden actuar diferentes tipos de fuerzas. Si tenemos en cuenta su origen, las podemos clasificar en dos conjuntos separados: fuerzas externas y fuerzas internas.

→ **Fuerzas externas.** Son causadas por agentes físicos que no pertenecen al sistema considerado. La resultante de todas las fuerzas externas que actúa sobre la partícula i la denominaremos \vec{F}_i (v. figura 3.3).

→ **Fuerzas internas.** Son las fuerzas que las partículas del sistema se ejercen entre ellas. \vec{F}_{ij} es la fuerza que la partícula i ejerce sobre la partícula j (v. figura 3.4).

La consideración que estamos tratando con partículas hace que $\vec{F}_{ii} = 0$. Las ecuaciones de movimiento del sistema de N partículas provienen de aplicar la segunda

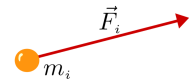


Fig. 3.3: La causa de la fuerza externa \vec{F}_i se encuentra fuera del sistema

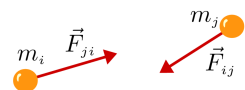


Fig. 3.4: La causa de la fuerza interna \vec{F}_{ij} es la interacción entre las partículas



ley de Newton a cada partícula. Serán N ecuaciones vectoriales.

→ **Segunda ley de Newton o ley de movimiento para N partículas:**

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = m_i \vec{a}_i \quad (3.2)$$

Solucionar directamente estas ecuaciones es muy difícil. Afortunadamente, no siempre estamos interesados en encontrar la trayectoria de todas y cada una de las partículas del sistema. Sea como fuere, nos será necesario encontrar métodos generales que permitan extraer algunas características interesantes del comportamiento del sistema. Un hecho que simplifica mucho estas ecuaciones es la observación de que las fuerzas internas cumplen siempre la condición de acción y reacción. Newton elevó esta condición a la categoría de ley.

→ **Tercera ley de Newton o principio de acción y reacción.** *La fuerza que actúa sobre la partícula i debida a la partícula j tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario, que la fuerza que actúa sobre la j debida a la i : $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$*

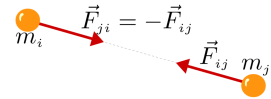


Fig. 3.5: La ley de acción y reacción entre dos partículas, la partícula m_i y la m_j

Fijémonos que, para cumplir esta ley, es necesario que las interacciones se propaguen de forma instantánea. Si no fuera así, podríamos mover la partícula i y, durante algunos instantes, la partícula j no se enteraría, lo cual incumpliría la tercera ley. ¡En la relatividad, no se cumple esta ley!

En la formulación de Newton, aunque originariamente no se explicitara, se entiende que la recta de acción de las dos fuerzas es la misma. Nosotros lo entenderemos así (v. figura 3.5).

3.2 Fuerza resultante y centro de masas

Tomamos todas las ecuaciones de movimiento para cada partícula (3.2) y las sumamos. El miembro de la izquierda es la suma de todas las fuerzas, independientemente de dónde estén aplicadas. Esta suma la denominamos **fuerza resultante** \vec{F} . Como consecuencia del principio de acción-reacción, $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$; por consiguiente, la suma de las fuerzas internas es nula. Así, al hacer la suma de todas las fuerzas del sistema para encontrar la resultante \vec{F} , solo sobreviven las externas. La fuerza resultante \vec{F} es la suma de las fuerzas externas:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (3.3)$$

Si la fuerza resultante \vec{F} la aplicáramos a una partícula que tuviera una masa suma de las masas de todas las partículas, $m = \sum_{i=1}^N m_i$, la aceleración de esta partícula



debida a la fuerza \vec{F} sería \vec{a}_{CM} , según:

$$\vec{F} = m \vec{a}_{CM} \quad (3.4)$$

El punto donde se sitúa esta hipotética partícula se denomina **centro de masas** del sistema y se indica por CM (v. figura 3.6). El vector posición del CM lo indicaremos por \vec{r}_{CM} . Si $\vec{F} = 0$, el CM se mueve a velocidad constante, $\vec{a}_{CM} = 0$. En este caso, se puede utilizar el CM como origen de un sistema de referencia inercial: es el **sistema de referencia del centro de masas (SRC)**.

El punto CM , de alguna manera, representa una posición aproximada y global del sistema. Pensamos, por ejemplo, que el sistema es una nube. Esta nube, en general, va viajando de un lado para otro, a la vez que va cambiando de forma. En muchos casos, no nos interesa estudiar el cambio de forma, pero sí el movimiento global. Este está muy bien representado por la trayectoria trazada por el centro de masas \vec{r}_{CM} .

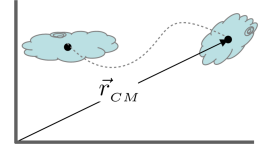


Fig. 3.6: El CM representa bien el movimiento global de una nube

Si conocemos la resultante como función de la posición y la velocidad del CM , (3.4) es la ecuación de movimiento para el CM que permite, conocidas la posición y la velocidad inicial, encontrar la trayectoria $\vec{r}_{CM}(t)$. Un problema que deberemos resolver es encontrar la posición y la velocidad del centro de masas, en el instante inicial, conocidas las posiciones y velocidades de todas las partículas en ese instante.

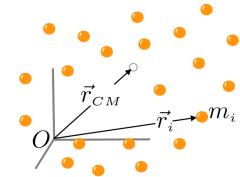


Fig. 3.7: La masa y la posición de las N partículas, m_i y \vec{r}_i , determinan \vec{r}_{CM}

Para cada instante, la posición del CM , \vec{r}_{CM} , se puede encontrar si conocemos las posiciones y masas de todas las partículas en ese mismo instante \vec{r}_i , m_i (v. figura 3.7):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (3.5)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la suma de las ecuaciones de movimiento de las N partículas, (3.2) y la definición de CM (3.4), tenemos:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

que podemos reescribir como

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\vec{r}_{CM} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = 0$$

e integrar. Nos aparecerán dos constantes de integración \vec{C}_1 y \vec{C}_2 :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i + \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t$$



Ahora, si tenemos una sola partícula, $N = 1$, queremos que, en todo instante, el CM esté allí donde está la partícula, es decir, $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \vec{C}_1 + \vec{C}_2 t \Rightarrow \vec{C}_1 = \vec{C}_2 = 0$ y la expresión de \vec{r}_{CM} coincide con (3.5), que es lo que queríamos demostrar. ■

Si el sistema es un **cuerpo continuo** (v. figura 3.8), tendremos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int_{\text{Cuerpo}} \vec{r} dm \quad (3.6)$$

Si el cuerpo es un **sólido rígido**, el CM es un punto solidario con el cuerpo. Si este solo efectúa **movimientos de traslación**, el movimiento del sólido queda completamente determinado por el movimiento del CM .

En la práctica, tendremos en cuenta que, **si el movimiento del sólido es únicamente de traslación**, todos los puntos tienen la misma velocidad: **cualquier punto del sólido es válido para describir la velocidad del CM** .

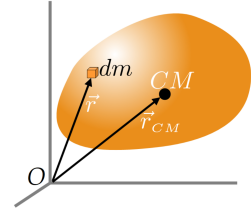


Fig. 3.8: CM de un cuerpo continuo

CM de volúmenes, superficies y curvas

En general, un cuerpo cualquiera (por ejemplo, un asteroide) se extiende en las tres dimensiones del espacio, además de ocupar un volumen. En muchos casos, a pesar de extenderse en las tres dimensiones, el cuerpo puede ser tratado como una superficie, por ejemplo, una antena parabólica de comunicación. En otros casos, extendiéndose también en tres dimensiones, el cuerpo puede ser tratado como una curva, por ejemplo un muelle helicoidal. En la tabla 3.1, puedes ver cómo tratar estos casos en términos de densidad de masa. ρ , σ y μ son las densidades de masa volumétrica, superficial y lineal, respectivamente.

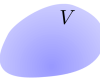

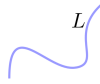
	$dm = \rho dv \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \rho dv} \int \vec{r} \rho dv$	$\stackrel{\text{Hom}}{=} \frac{1}{V} \int \vec{r} dv$
	$dm = \sigma ds \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \sigma ds} \int \vec{r} \sigma ds$	$\stackrel{\text{Hom}}{=} \frac{1}{S} \int \vec{r} ds$
	$dm = \mu dl \Rightarrow$	$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\int \mu dl} \int \vec{r} \mu dl$	$\stackrel{\text{Hom}}{=} \frac{1}{L} \int \vec{r} dl$

Tabla 3.1: CM de cuerpos continuos: volúmenes, superficies y líneas

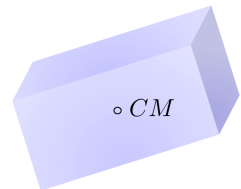


Fig. 3.9: El CM de un cuerpo homogéneo coincide con el centro geométrico o de simetría CS

Un cuerpo **homogéneo** tiene densidad constante. En los cuerpos homogéneos, el CM coincide con el **centro geométrico o de simetría CS** (v. figura 3.9). El CS es fácil de encontrar si el cuerpo tiene suficientes elementos de simetría. En este caso, el CS es el punto común a todos los elementos de simetría (ejes, planos, punto).



Si un cuerpo voluminoso homogéneo, de densidad ρ , tiene la forma de superficie gruesa de espesor h constante y su curvatura es despreciable, podemos tratarlo como un cuerpo superficial, de densidad σ . Para encontrar σ en términos de ρ , solo hay que tener en cuenta que un trozo de superficie S de cuerpo tendrá un volumen $V = Sh$ y una masa que podemos encontrar utilizando ρ o bien σ . Así, $m = \rho V = \sigma S$; por consiguiente, $\sigma = \rho h$.

Si un cuerpo voluminoso homogéneo, de densidad ρ , tiene la forma de curva gruesa de sección s constante y su curvatura es despreciable, podemos tratarlo como un cuerpo lineal de densidad μ . Para encontrar μ en términos de ρ , solo hay que tener en cuenta que un trozo de longitud L de cuerpo tendrá un volumen $V = Ls$ y una masa que podemos encontrar utilizando ρ o bien μ . Así, $m = \rho V = \mu L$; por consiguiente, $\mu = \rho s$.

CM de cuerpos simples

Simple aquí quiere decir que conocemos su CS o bien, en general, el CM . En la tabla de la página 345, tienes las expresiones para encontrar el centro de simetría de algunos cuerpos homogéneos simples que podemos utilizar a lo largo del libro. No están incluidos los casos en que CS queda totalmente determinado por simetría, como el círculo, la esfera, el rectángulo, etc.

CM de cuerpos compuestos

Sea un conjunto de cuerpos simples C_i , $i = 1 \dots N$, de masas m_i y posiciones del CM , $\vec{r}_{CM}^{(i)}$, conocidos, que forman un cuerpo compuesto (v. figura 3.10). La posición del CM del cuerpo compuesto vale:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{CM}^{(i)} \quad (3.7)$$

Demostración. Como conocemos m_i y $\vec{r}_{CM}^{(i)}$ y sabemos que $\vec{r}_{CM}^{(i)} = \frac{1}{m_i} \int_{C_i} \vec{r} dm$, podemos obtener cuánto vale cada una de las integrales $\int_{C_i} \vec{r} dm$

$$\int_{C_i} \vec{r} dm = m_i \vec{r}_{CM}^{(i)} \quad (3.8)$$

La expresión para la posición del CM (3.6) del cuerpo compuesto, considerado un cuerpo único continuo, se extiende al dominio de integración que abraza todo el cuerpo C , es decir, $C = C_1 \cup \dots \cup C_N$, donde C_i es el dominio de cada uno de los cuerpos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int_{C_1 \cup \dots \cup C_N} \vec{r} dm$$

Si descomponemos la integral extendida al dominio de integración $C_1 \cup \dots \cup C_N$ como suma de integrales en cada subdominio de integración C_i , y sustituimos las

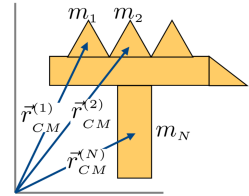


Fig. 3.10: El CM de un cuerpo compuesto se puede expresar, haciendo una descomposición conveniente en cuerpos simples, en términos de las masas, m_i , y las posiciones del CM , $\vec{r}_{CM}^{(i)}$, de cada cuerpo simple



integrales según (3.8), tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \left(\int_{C_1} \vec{r} dm + \dots + \int_{C_N} \vec{r} dm \right) = \frac{1}{m} (m_1 \vec{r}_{CM}^{(1)} + \dots + m_N \vec{r}_{CM}^{(N)})$$

es decir,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{CM}^{(i)}$$

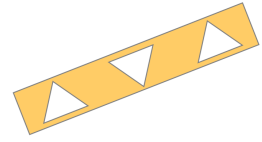


Fig. 3.11: Podemos interpretar la suma de masas de forma que el signo positivo quiere decir "añadir masa" y el negativo, "extraer masa"

Si interpretamos las masas m_i como $m_i > 0 \Rightarrow$ añadir; $m_i < 0 \Rightarrow$ extraer, podemos tratar un cuerpo compuesto de cuerpos y agujeros simples (v. figura 3.11).

Problema 3.2.1. En la tabla siguiente, se muestran las posiciones y las velocidades, en un instante dado, de un sistema de tres partículas. En este instante, determina:

i	1	2	3
m_i (kg)	2	3	5
\vec{r}_i (m)	(-10; -10)	(30; 10)	(10; 20)
\vec{v}_i (m/s)	(10; 30)	(-20; -10)	(10; -10)

Tabla del problema 3.2.1: masas, posiciones y velocidades

- a) la posición del centro de masas del sistema y
- b) la velocidad del centro de masas del sistema.

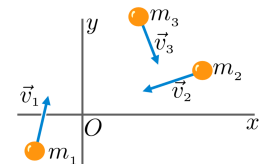
Solución

a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{2(-10; -10) + 3(30; 10) + 5(10; 20)}{10} = (12; 11) \text{ m}$$

b)

$$\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{2(10; 30) + 3(-20; -10) + 5(10; -10)}{10} = (1; -2) \text{ m/s}$$



Solución del problema 3.2.1

Problema 3.2.2. Dada la chapa plana y homogénea representada en la figura, encuentra el centro de masas.

Solución

Se trata de una figura plana y homogénea. Por simetría, tenemos: $y_{CM} = 0$. También $\sigma = \text{cte.}$, de modo que, en vez de masas m_i , podemos utilizar superficies, S_i . Descomponemos la chapa en tres piezas, pieza 1: un cuadrado de chapa; pieza 2: un triángulo de chapa; pieza 3: un agujero de chapa (v. figura). Tendremos:

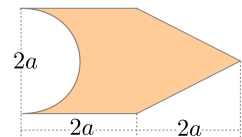


Figura del problema 3.2.2

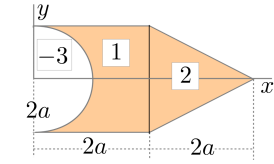


$$x_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_{CM}^{(i)} = \frac{1}{\sigma S} \sum_{i=1}^N \sigma S_i x_{CM}^{(i)} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i x_{CM}^{(i)}$$

teniendo en cuenta el signo “-” si se trata de un agujero:

$$x_{CM} = \frac{1}{S_1+S_2-S_3} \left\{ S_1 x_{CM}^{(1)} + S_2 x_{CM}^{(2)} - S_3 x_{CM}^{(3)} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 4a^2; & S_2 &= \frac{1}{2} 2a \cdot 2a; & S_3 &= \frac{1}{2} \pi a^2 \\ x_{CM}^{(1)} &= a; & x_{CM}^{(2)} &= 2a + \frac{1}{3} 2a; & x_{CM}^{(3)} &= \frac{4a}{3\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{CM} = 1,96a \quad \blacksquare$$



Solución del problema 3.2.2

3.3 Cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento \vec{P} de un sistema de partículas se define como la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_{CM} \quad (3.9)$$

La ecuación de movimiento del CM se puede escribir:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (3.10)$$

→ **Teorema de la conservación de la cantidad de movimiento.** Si la resultante de un sistema de partículas es nula, la cantidad de movimiento \vec{P} se mantiene constante a lo largo del tiempo.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad (3.11)$$

También se puede escribir utilizando la expresión integrada entre dos instantes t_{ini} y t_{fi} :

$$\vec{P}_{ini} = \vec{P}_{fi} \quad (3.12)$$

Habitualmente, se dice que *la cantidad de movimiento se conserva*. Observamos que, siempre que no haya fuerzas externas al sistema, la cantidad de movimiento se conservará.

Problema 3.3.1. Una cobra real de longitud L y masa m uniformemente distribuida reposa tumbada en el suelo. La cobra decide levantarse verticalmente y lo hace a una velocidad v uniforme (la punta de la cola no se mueve en ningún momento). ¿Cuál es la fuerza de reacción del suelo sobre la parte del cuerpo en contacto? Expresa el resultado en función de L , m , v y el campo gravitatorio g .

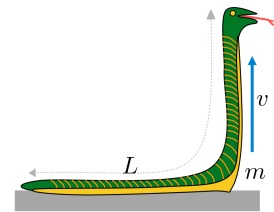


Figura del problema 3.3.1



Solución

Denominamos x la porción de serpiente que permanece en contacto con el suelo y y , la parte vertical. Observa que tanto x como y van variando mientras la serpiente se levanta. Son funciones del tiempo t (v. figura). La longitud total de la serpiente es, para todo t , L ; así, $x + y = L$ y, como esta expresión vale para todo t , $\dot{x} + \dot{y} = 0$. Si, además, tenemos en cuenta que v es la velocidad constante en la dirección y sentido de y , tenemos las relaciones:

$$\dot{y} = v ; \dot{x} = -v ; \ddot{x} = \ddot{y} = 0 \quad (3.13)$$

Podemos calcular la posición del centro de masas, para todo t , en función de x y y . En cualquier instante, la serpiente es un cuerpo lineal formado por dos segmentos homogéneos rectos de longitudes x y y ; por consiguiente:

$$\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}) = \frac{1}{L} \left(\frac{x}{2}x + xy, \frac{y}{2}y \right) \quad (3.14)$$

Si derivamos respecto al tiempo (3.14) y tenemos en cuenta (3.13):

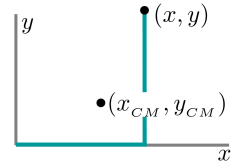
$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{1}{L} y v (-1; 1) \quad (3.15)$$

La cantidad de movimiento del sistema podremos escribirla como:

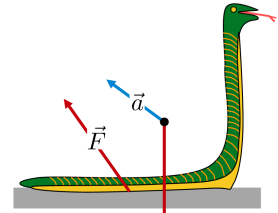
$$\vec{P} = m \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{m}{L} y v (-1; 1) \quad (3.16)$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre la serpiente será debida al peso y a la fuerza de reacción del suelo F , es decir, $m(0, -g) + \vec{F}$ (v. figura). Tendremos así:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m}{L} v^2 (-1; 1) = m(0, -g) + \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = \left(-\frac{m}{L} v^2, mg + \frac{m}{L} v^2 \right) \quad \blacksquare$$



Solución del problema 3.3.1



Solución del problema 3.3.1

3.4 Momento angular

El **momento angular** $\vec{L}_{(A)}$ de un sistema de partículas respecto a un punto A fijo (v. figura 3.12) se define como la suma de los momentos angulares de cada partícula respecto a este punto:

$$\vec{L}_{(A)} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{(A)i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(A)} \times m_i \vec{v}_i \quad (3.17)$$

Si derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{r}}_{i(A)} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{i(A)} \times m_i \vec{a}_i \right) \quad (3.18)$$

Ahora, teniendo en cuenta que el punto A es fijo, $\dot{\vec{r}}_{i(A)} = \vec{v}_i$, el primer producto vectorial de (3.18) se anula. Para el segundo producto vectorial, tendremos en

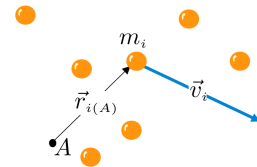


Fig. 3.12: Momento angular de un sistema de partículas respecto a un punto fijo A



cuenta las ecuaciones de movimiento de las N partículas, $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$.

Así, tenemos:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_{i(A)} \times \left[\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right] \right) \quad (3.19)$$

El momento total de las fuerzas internas se anula admitiendo que las fuerzas de acción-reacción tienen la misma recta de acción (v. figura 3.13):

$$\vec{r}_{i(A)} \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_{j(A)} \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_{j(A)} - \vec{r}_{i(A)}) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Por tanto, obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = \vec{M}_{(A)} \quad (3.20)$$

donde $\vec{M}_{(A)}$ es el momento total de las fuerzas. Observamos que solo las fuerzas externas intervienen en $\vec{M}_{(A)}$.

$$\vec{M}_{(A)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(A)} \times \vec{F}_i \quad (3.21)$$

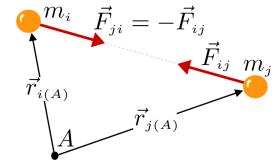


Fig. 3.13: Momento de las fuerzas internas

→ **Teorema de la conservación del momento angular.** Si el momento resultante de las fuerzas externas respecto a un punto A es nulo, $\vec{M}_{(A)} = 0$, el momento angular $\vec{L}_{(A)}$ se mantiene constante a lo largo del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} = 0 \quad (3.22)$$

También se puede escribir usando la expresión integrada entre dos instantes t_{ini} y t_{fi}

$$\vec{L}_{(A)ini} = \vec{L}_{(A)fi} \quad (3.23)$$

Habitualmente, se dice que *el momento angular se conserva*.

Si el sistema de partículas se mueve **solo por traslación**, $\vec{v}_i = \vec{v}$, el momento angular del sistema, $\vec{L}_{(A)}$, se puede expresar:

$$\vec{L}_{(A)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(A)} \times m_i \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(A)} m_i \right) \times \vec{v} = \vec{r}_{CM(A)} \times \vec{P} \quad (3.24)$$

En general, si hacemos $\vec{r}_{i(A)} = \vec{r}_{CM(A)} + \vec{r}_{i(CM)}$, podemos escribir el momento angular con respecto a cualquier punto fijo A como:

$$\vec{L}_{(A)} = \vec{L}_{(CM)} + \vec{r}_{CM(A)} \times \vec{P} \quad (3.25)$$

Las relaciones (3.20) y (3.21) también son válidas si $A = CM$, aunque el CM esté en movimiento. Hay que tener cuidado y no tomar puntos $A \neq CM$ en movimiento. En esta sección, es mejor considerar A fijo. Más adelante, cuando estudiemos el sólido rígido, demostraremos y utilizaremos $A = CM$.



Problema 3.4.1. En la tabla siguiente, tenemos las posiciones y las velocidades en un instante dado de un sistema de tres partículas.

i	1	2	3
m_i (kg)	2	3	5
\vec{r}_i (m)	(-10; -10)	(30; 10)	(10; 20)
\vec{v}_i (m/s)	(10; 30)	(-20; -10)	(10; -10)

Tabla del problema 3.4.1: masas, posiciones y velocidades

En este instante, determina:

- la cantidad de movimiento total,
- el momento angular total con respecto al origen.

Solución

a) Del problema 3.2.1, tenemos $\vec{v}_{CM} = (1; -2)$ m/s y, por consiguiente, $\vec{P} = m\vec{v}_{CM} = 10(1; -2) = (10; -20)$ kg m/s

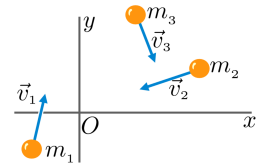
b) ¡Cuidado! No podemos usar $\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$, puesto que las velocidades de las partículas son diferentes. Tenemos que usar $\vec{L} = \sum_{i=1}^3 \vec{L}_i$:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -10 & -10 & 0 \\ 10 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -400\hat{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = 3 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 30 & 10 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -300\hat{k}$$

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 = 5 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -1500\hat{k}$$

obtenemos $\vec{L} = \sum_{i=1}^3 \vec{L}_i = -2200\hat{k} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ ■



Solución del problema 3.4.1

Problema 3.4.2. Un camión transporta una caja homogénea, rectangular, de 2 m de altura y 1 m de longitud. El coeficiente de fricción caja-camión es 0,4. Calcula:

- La máxima aceleración del camión sin que la caja deslice (sabemos que antes no vuelca).
- Si fijamos la caja con un eje sin fricción por A, el valor máximo de la aceleración del camión sin que la caja vuelque.

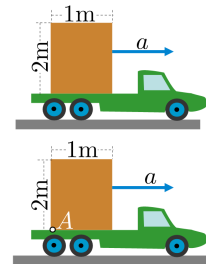


Figura del problema 3.4.2



Solución

a) $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow (\mu N, N - mg) = m(a, 0) \Rightarrow a = \mu g = 0,4 \times 9,8 = 3,92 \text{ m/s}^2$

b) Utilizamos $\frac{d\vec{L}_{(O)}}{dt} = \vec{M}_{(O)}$ con los momentos calculados respecto al origen (v. figura). Para el cálculo de los momentos, podemos utilizar la regla del tornillo.

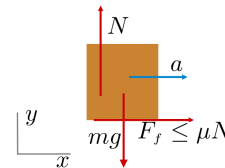
Para el momento angular, tendremos en cuenta que el movimiento es de traslación. Es suficiente utilizar el vector velocidad situado en el CM (v. figura). Obtenemos $\vec{L}_{(O)} = -1mv \hat{k}$. Para el momento de las fuerzas, tendremos en cuenta que nos situamos en el instante en que la caja está a punto de volcar. En ese instante, la normal pasa por el punto A, puesto que solo en el punto A hay contacto entre la caja y el camión. Obtenemos:

$$\vec{M}_{(O)} = - \{ (\overline{OA} + 0,5)mg - \overline{OA} N \} \hat{k} = -0,5 mg \hat{k}$$

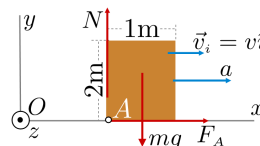
así, derivando respecto al tiempo $\vec{L}_{(O)}$ e igualando con el momento de las fuerzas

$$-1ma\hat{k} = -0,5 mg \hat{k}$$

Por tanto, $a = 0,5g = 4,9 \text{ m/s}^2$



Solución del problema 3.4.2



Solución del problema 3.4.2

3.5 Trabajo, energía cinética y energía potencial

Trabajo

El concepto de trabajo, entendido según la interpretación 1 de la sección 2.4, puede aplicarse aquí para cada fuerza por separado. También el concepto de fuerza conservativa y de energía potencial asociada a una fuerza.

Para definir el concepto de energía del sistema entero, extendemos la interpretación 2 de la sección 2.4 a todas las partículas y fuerzas del sistema.

Denominamos **configuración** del sistema en un instante dado el conjunto de posiciones de cada una de las partículas del sistema.

El trabajo W realizado por todas las fuerzas del sistema sobre cada partícula, $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$, cuando estas pasan de una configuración $P_1 = \{P_{i1}\}$ a otra $P_2 = \{P_{i2}\}$ a través de un camino $C = \{C_i\}$ es (v. figura 3.14):

$$W = \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) d\vec{r}_i \tag{3.26}$$

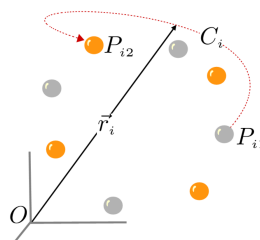


Fig. 3.14: El sistema pasa de la configuración P_1 a la configuración P_2 . Hay muchos caminos $C = \{C_i\}$ que nos llevan de una configuración a la otra

Energía cinética o capacidad cinética de hacer trabajo

Un cálculo muy parecido al realizado en la sección 2.4 nos lleva al concepto de energía cinética:



$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i \\
&= \dots = \int_{P_1}^{P_2} d \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)
\end{aligned}$$

En consecuencia, definimos la **energía cinética** E_c de un sistema de N partículas:

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (3.27)$$

y podemos enunciar el siguiente teorema:

→ **Teorema del trabajo-energía:**

$$W = \Delta E_c \quad (3.28)$$

También se conoce con el nombre de teorema **de las fuerzas vivas o de la energía cinética**.

Energía potencial o capacidad estática de hacer trabajo

Las fuerzas sobre cada partícula son las externas y las de interacción entre las partículas $\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}$. Si todas las fuerzas son conservativas, tendremos energías potenciales U_i, U_{ij} que cumplen:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U_i}{\partial \vec{r}_i}; \quad \vec{F}_{ji} = -\frac{\partial U_{ji}}{\partial \vec{r}_i}, \quad U_{ii} = 0 \quad (3.29)$$

Como consecuencia del principio de acción-reacción, además de ser conservativas, las fuerzas solo dependen de la posición de las partículas según $\vec{F}_{ji} = f_{(ji)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ donde $f_{(ji)} = f_{(ij)}$ solo depende de la distancia entre las partículas i y j ¹. Esto permite escoger U_{ij} , que cumple (3.29), solo dependiente de la distancia entre las partículas y simétrico $U_{ji} = U_{ij}$. Lo denominamos **energía (potencial) de interacción**.

¹ Podemos pensar en los casos gravitatorio y electrostático y ver que cumplen estas condiciones

Si el sistema pasa de una configuración de posiciones P_1 a otra P_2 por un camino C (v. figura 3.14), el trabajo es:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i \\
& \quad (3.30)
\end{aligned}$$



→ El trabajo de las fuerzas conservativas es igual a la disminución de la energía potencial:

$$W = -\Delta U \quad (3.31)$$

con la energía potencial del sistema de N partículas, U , definida como:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N U_{ij} \quad (3.32)$$

Demostración. El primer término del último miembro de (3.30) se puede escribir

$$\sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} dU_i \quad (3.33)$$

Con el segundo término del último miembro, hay que proceder con más cuidado. En un primer paso, añadimos los términos (cambiando la i por la j) $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j$ y todo sumado resulta igual a los que ya están, así que también dividimos por 2:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} (\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i) = \dots \quad (3.34)$$

Ahora sustituimos las fuerzas en función de sus potenciales según (3.29):

$$\dots = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j} \cdot d\vec{r}_j + \frac{\partial U_{ji}}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i \right) = \dots \quad (3.35)$$

Recordemos que podemos hacer $U_{ji} = U_{ij}$. Además, tendremos en cuenta que U_{ij} solo depende de \vec{r}_i y \vec{r}_j y, por consiguiente, el diferencial es $dU_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j} \cdot d\vec{r}_j + \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i$. Podemos escribir (3.35) como:

$$\dots = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C:P_1}^{P_2} dU_{ij} = \dots \quad (3.36)$$

y, finalmente, para no sumar más términos de los necesarios, restringimos la suma de j a solo términos $i < j$, y así podemos eliminar el factor $\frac{1}{2}$:

$$\dots = - \int_{C:P_1}^{P_2} d \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N U_{ij} \right) \quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores (3.30, 3.33-3.37), podemos definir la energía potencial U del sistema de N partículas como (3.32) y obtenemos (3.31). ■



Energía mecánica

Definimos la **energía mecánica** E de un sistema conservativo de N partículas como

$$E = E_c + U \quad (3.38)$$

Derivando respecto al tiempo y siguiendo pasos análogos a los de la sección 2.4, obtenemos, como cabía esperar:

→ **Teorema de la conservación de la energía mecánica.** *El valor numérico de la energía mecánica de un sistema conservativo de N partículas, se mantiene constante a lo largo del tiempo.*

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.39)$$

También se puede escribir usando la expresión integrada entre dos instantes t_{ini} y t_{fi} :

$$E_{\text{ini}} = E_{\text{fi}} \quad (3.40)$$

Habitualmente, se dice que *la energía mecánica se conserva*.

Si hay fuerzas no conservativas (NC), estas no se incluyen en la energía (no se les puede asociar una energía potencial) y la energía mecánica, en general, no se conserva. Sí podemos decir:

→ **Teorema de la energía mecánica.** *El trabajo de las fuerzas no conservativas es igual al incremento de energía mecánica del sistema:*

$$W_{NC} = \Delta E \quad (3.41)$$

Observamos que la energía todavía se puede conservar si nos restringimos a movimientos por los cuales las NC “no trabajan”: $W_{NC} = 0$. Más adelante, cuando tratemos de los sistemas con ligaduras, usaremos esta condición.

Como veremos más adelante, en la sección 3.11, en el caso de un **sólido rígido** el trabajo de las fuerzas internas es nulo; por consiguiente, $W = \Delta E_c$, donde W es el trabajo de las fuerzas externas. Si, además, el movimiento es únicamente de **traslación**, $v_i = v_{CM}$, tenemos $E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$. Así, la energía mecánica de un **sólido rígido restringido a movimientos de traslación** es

$$E = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + U \quad (3.42)$$

donde U es, en este caso, la suma de energías potenciales de las fuerzas conservativas externas al sólido.



Problema 3.5.1. Dos partículas de masas de 2 kg y 3 kg están ligadas entre ellas con una cuerda y en contacto con un muelle, como se ve en la figura. Tanto el muelle como la cuerda tienen una masa despreciable. El muelle tiene una constante recuperadora de 12000 N/m y está comprimido una longitud de 10 cm. Si cortamos la cuerda, encuentra la velocidad de cada partícula.

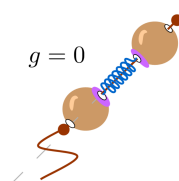


Figura del problema 3.5.1

Solución

Por conveniencia, definimos $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $k = 12000 \text{ N/m}$ y $L = 0,1 \text{ m}$.

Las causas del movimiento están alineadas según el eje x ; así, podemos aplicar el principio de simetría (ver la sección 1.4) para deducir que las velocidades de las dos partículas estarán alineadas con el eje x : $\vec{v}_1 = (v_1; 0; 0)$ y $\vec{v}_2 = (v_2; 0; 0)$.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento entre los instantes justo antes y justo después del corte de la cuerda:

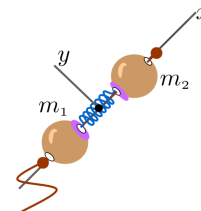
$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow 2v_1 + 3v_2 = 0$$

Podemos hacer lo mismo con la energía:

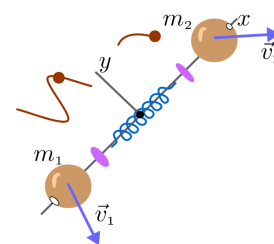
$$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow 60 = v_1^2 + \frac{3}{2}v_2^2$$

de donde obtenemos $v_1 = \pm 6$ y $v_2 = \mp 4$. Utilizando el hecho de que el muelle se descomprime (¡todavía no lo habíamos utilizado!), los signos quedan determinados y obtenemos:

$$\vec{v}_1 = (-6; 0; 0) \text{ m/s} ; \vec{v}_2 = (4; 0; 0) \text{ m/s}$$



Solución del problema 3.5.1



Solución del problema 3.5.1

Problema 3.5.2. En la tabla siguiente, se muestran las posiciones y las velocidades en un instante dado de un sistema de tres partículas.

i	1	2	3
$m_i(\text{kg})$	2	3	5
$\vec{r}_i(\text{m})$	$(-10; -10)$	$(30; 10)$	$(10; 20)$
$\vec{v}_i(\text{m/s})$	$(10; 30)$	$(-20; -10)$	$(10; -10)$

En este instante, determina:

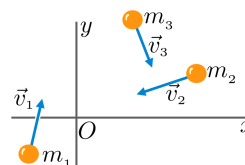
- a) la energía cinética del sistema;
- b) la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas (toda la masa concentrada en el CM con la velocidad de este)

Solución

a)

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \{ 2(10^2 + 30^2) + 3(20^2 + 10^2) + 5(10^2 + 10^2) \} = 2250 \text{ J}$$

Tabla del problema 3.5.2: masas, posiciones y velocidades



Solución del problema 3.5.2



b) Del problema 3.2.1, tenemos $\vec{v}_{CM} = (1, -2)$ m/s. La energía cinética de una partícula de masa $m = 10$ kg que se mueve con la velocidad del CM es:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot (1^2 + 2^2) = 25 \text{ J}$$

que, en general, no coincide con la energía cinética del sistema. ■

3.6 Choques

Un **choque** es el proceso en que dos partículas o más, que solo interaccionan a muy corta distancia, se encuentran en un punto y un instante, y, en consecuencia, modifican sus velocidades (v. figura 3.15).

Nos restringiremos a dos partículas. Consideramos dos instantes en que las partículas están bastante alejadas y no **interaccionan**: (*ini*) inicial, justo antes del choque; (*fi*) final, justo después del choque. Supondremos que las fuerzas externas son mucho más débiles que las debidas al choque, de forma que el impulso de las primeras entre (*ini*) y (*fi*) es despreciable.

También nos restringiremos a choques **sin fricción**. Esto quiere decir que, cuando se produce el contacto entre las dos partículas, que ahora visualizaremos como cuerpos esféricos (v. figuras 3.16 o 3.17), no hay fuerzas tangentes en el plano tangente en el contacto o **plano de choque** y, por consiguiente, no hay intercambio de momento angular. Si las partículas o cuerpos tuvieran una rotación inicial, mantendrían esa rotación después del choque.

Podemos aplicar la conservación de la cantidad de movimiento total. Tendremos:

$$\vec{P}_{(ini)} = \vec{P}_{(fi)} \quad (3.43)$$

Aunque no conocemos la geometría del choque (el plano de choque, v. figura 3.16), podremos tratar los choques completamente elásticos y completamente inelásticos.

→ **Choques completamente elásticos.** Son choques en que se conserva la energía, $E_{(ini)} = E_{(fi)}$, que podemos escribir en términos de energía cinética, dado que antes y después no hay fuerzas o estas son despreciables. Así, para choques completamente elásticos:

$$E_{c(ini)} = E_{c(fi)} \quad (3.44)$$

La condición de choque elástico y la consiguiente conservación de la energía requiere una explicación. Se puede pensar que una pelota “elástica” conservará la energía cuando bote en el suelo. Y esencialmente es cierto, siempre que contabilicemos todos los términos de la energía cinética de la pelota. Antes del choque, la energía de la pelota será de traslación. Pasado el choque, la pelota tendrá energía cinética de traslación y también energía de vibración interna debida precisamente a la elasticidad del material. Solo si esta es despreciable podremos decir que el

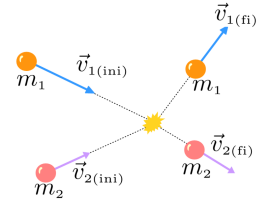


Fig. 3.15: Solo en el momento del choque hay fuerzas

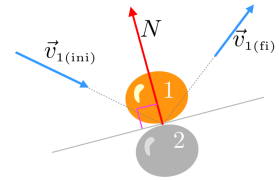


Fig. 3.16: Plano de choque

choque es elástico en el sentido que le queremos dar aquí: en este capítulo, entendemos que los objetos que chocan no acumulan energía de vibración y el sentido que damos al “choque elástico” es el de conservación de la energía, sin considerar los posibles términos de energía interna, como es el caso de la vibración.

→ **Choques completamente inelásticos**

Implosión. Las dos partículas quedan unidas (implosionan) y forma una sola partícula después del choque, $\vec{v}_{1(f)} = \vec{v}_{2(f)}$.

Explosión. Una única partícula explota y da lugar a dos partículas, $\vec{v}_{1(i)} = \vec{v}_{2(i)}$.

→ **Choques parcialmente elásticos.** Si podemos conocer la geometría del contacto, si conocemos el plano de choque (v. figura 3.16 o 3.17), y tenemos en cuenta que el choque es sin fricción, es decir, que la única fuerza que actúa en el momento del choque es normal al plano de choque, de cada partícula solo cambiarán las componentes de la cantidad de movimiento en la dirección de la normal, mientras que las componentes de la cantidad de movimiento tangentes al plano de choque se conservarán. Así, indicando por \parallel las componentes tangentes al plano de choque:

$$\vec{p}_{i\parallel(i)} = \vec{p}_{i\parallel(f)} \Rightarrow \vec{v}_{i\parallel(i)} = \vec{v}_{i\parallel(f)} \quad i = 1,2 \quad (3.45)$$

Si el choque es completamente elástico o completamente inelástico, podemos utilizar las condiciones de conservación de la energía o de explosión o implosión que hemos indicado más arriba. Si el choque es parcialmente elástico y se conoce el plano de choque se define el **coeficiente de restitución** e (v. figura 3.17). Si indicamos con \perp la componente normal al plano de choque, el coeficiente de restitución es

$$e = \left| \frac{v_{1\perp(f)} - v_{2\perp(f)}}{v_{1\perp(i)} - v_{2\perp(i)}} \right| \quad (3.46)$$

El coeficiente de restitución e es una cantidad que depende del material de los cuerpos. Se puede medir utilizando (3.46).

→ **Choques contra un suelo.** Podemos considerar también el choque de una sola partícula contra un suelo o una pared (v. figura 3.18). Ahora hay fuerzas externas, la reacción del suelo. Tenemos $\vec{p}_{(i)} \neq \vec{p}_{(f)}$. Si el choque es sin fricción, la fuerza externa solo tiene componente normal al suelo. Como pasa en el caso de dos partículas, $\vec{p}_{\parallel(i)} = \vec{p}_{\parallel(f)} \Rightarrow \vec{v}_{\parallel(i)} = \vec{v}_{\parallel(f)}$

Si el choque es completamente elástico, tendremos $v_{\perp(i)}^2 = v_{\perp(f)}^2$. Si es parcialmente elástico, el coeficiente de restitución se puede definir ahora según

$$e = \left| \frac{v_{\perp(f)}}{v_{\perp(i)}} \right| \quad (3.47)$$

e depende, en este caso, del material constituyente del cuerpo y del suelo o pared. Se puede medir utilizando (3.47).

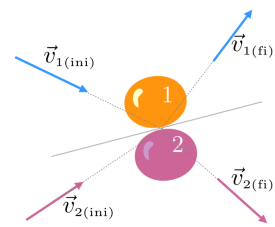


Fig. 3.17: e es una relación entre velocidades relativas normales al plano de choque

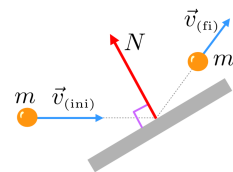


Fig. 3.18: Choque contra una pared



Problema 3.6.1. Calcula las velocidades después del choque de las bolas de la figura (correspondiente al momento del choque), de masas iguales, teniendo en cuenta que son lisas con un coeficiente de restitución de 0,9.

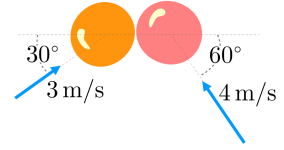


Figura del problema 3.6.1

Solución

Usamos la notación A para antes del choque y D para después del choque.

Según los datos reflejados en la figura, tenemos $\vec{v}_{A1} = (3\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$ y $\vec{v}_{A2} = (-2; 2\sqrt{3})$

De la conservación de la cantidad de movimiento paralela al plano de choque de cada partícula:

$$v_{yD1} = 1,5 \text{ m/s} ; v_{yD2} = 3,46 \text{ m/s} \quad (1)$$

De la conservación de la cantidad de movimiento total: $m\vec{v}_{A1} + m\vec{v}_{A2} = m\vec{v}_{D1} + m\vec{v}_{D2}$

La componente de esta ecuación en la dirección y se cumple automáticamente con los valores (1) encontrados. Solo tomamos la componente x :

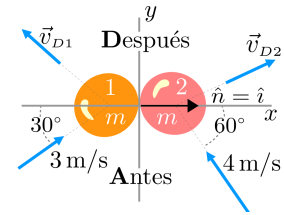
$$3\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = v_{xD1} + v_{xD2} \quad (2)$$

Del conocimiento del coeficiente de restitución obtenemos

$$\pm 0,9 = \frac{v_{xD1} - v_{xD2}}{3\frac{\sqrt{3}}{2} - (-2)} \quad (3)$$

Ahora hemos de solucionar las ecuaciones (2) y (3). Escogemos la solución que representa que las dos bolas no se entrecruzan, es decir, $v_{xD2} - v_{xD1} > 0$, y obtenemos:

$$v_{xD1} = -1,77 \text{ m/s} ; v_{xD2} = 2,36 \text{ m/s} \quad \blacksquare$$



Solución del problema 3.6.1

3.7 Interacción gravitatoria y electromagnética

Ley de la gravitación universal

Hacia 1687, Isaac Newton enunció la ley de la gravitación universal. Esta ley unificaba las leyes de Kepler y daba así una explicación más fundamental de las tres leyes, que hasta entonces solo se habían podido derivar de manera empírica por observación directa del movimiento de los planetas alrededor del Sol. La ley de la gravitación de Newton no es una regla para predecir el movimiento de los planetas. Se trata de una ley que cumplen todos los cuerpos por el hecho de tener masa, ya sean planetas, piedras, cualquier otro objeto o, en general, partículas (v. figura 3.19).

→ Ley de la gravitación universal

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (3.48)$$

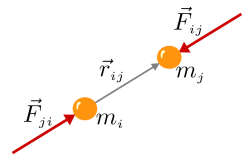


Fig. 3.19: Interacción gravitatoria entre dos masas



donde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$, $G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ es la constante de gravitación universal, y m_i y m_j son las **masas gravitatorias** de cada una de las partículas que interaccionan.

Un hecho experimental muy notable es que, para toda partícula, la masa gravitatoria —las m que aparecen en la ley de gravitación (3.48)— se puede expresar en las mismas unidades que la masa inercial —las m que aparecen en la ley de movimiento $\vec{F} = m\vec{a}$ — y, para una misma partícula, tiene igual valor numérico. Newton ya vio que, en su teoría, estos eran dos conceptos diferentes y que había que encontrar una explicación a su igualdad. La constatación experimental de esta igualdad es el germen del **principio de equivalencia**, que Albert Einstein usó para desarrollar la versión relativista de la gravitación de Newton, la relatividad general. Según el principio de equivalencia, la masa inercial y la masa gravitatoria de una partícula son exactamente iguales porque se trata del mismo concepto.

Si tomamos como ejemplo la interacción entre dos protones, $m_p = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$, separados una distancia atómica típica de $r = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, obtenemos de (3.48):

$$|F_G| = G \frac{m_p^2}{r^2} = 5,54 \times 10^{-51} \text{ N} \quad (3.49)$$

La energía de interacción gravitatoria entre dos partículas es:

$$U_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (3.50)$$

La energía de interacción gravitatoria de un sistema de tres partículas es:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (3.51)$$

Ley de Coulomb

La ley de Coulomb fue formulada por Charles-Augustin de Coulomb a partir de las mediciones de la fuerza de atracción y repulsión entre cargas eléctricas que realizó en 1785 con una balanza de torsión (v. figura 3.21).

→ Ley de Coulomb

$$\vec{F}_{ij} = K \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (3.52)$$

donde $K = 8,987 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ es la constante de interacción electrostática, y Q_i y Q_j son las cargas eléctricas de cada una de las partículas que interaccionan, medidas en la unidad de carga eléctrica del sistema internacional, el **culombio (C)**: $[Q] = \text{C}$.

Si tomamos como ejemplo la interacción entre dos protones, $Q_p = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$,



Fig. 3.20: Charles-Augustin de Coulomb (1737-1806) fue un físico e ingeniero militar francés

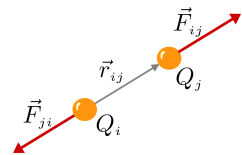


Fig. 3.21: Interacción electrostática entre dos cargas



separados una distancia atómica típica de $r = 1\text{Å} = 10^{-10}\text{ m}$, obtenemos:

$$|F_E| = K \frac{Q_p^2}{r^2} = 2,31 \times 10^{-8}\text{ N} \quad (3.53)$$

La energía de interacción electrostática entre dos partículas es:

$$U_{ij} = K \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \quad (3.54)$$

y la energía de interacción electrostática de un sistema de tres partículas es:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} \right) \quad (3.55)$$

Observa que las dos leyes de interacción expuestas son casi idénticas en cuanto a la geometría (la dependencia de las fuerzas con las posiciones). La única diferencia, en este aspecto, es que una es atractiva y la otra es repulsiva. Esto quiere decir que, para partículas idénticas, la interacción gravitatoria provoca una fuerza de atracción y la electrostática, una de repulsión. Difieren en las “cargas” y las constantes de interacción. Comparando los resultados en el caso de los dos protones, podemos decir que ¡la interacción electromagnética es unas 10^{43} veces más intensa que la gravitatoria!

Problema 3.7.1. En la tabla siguiente, se dan las cargas y posiciones de un sistema de tres partículas. Determina la energía potencial total.

i	1	2	3
$Q_i (\mu\text{C})$	-2	3	5
$\vec{r}_i (\text{m})$	(-10; -10)	(30; 10)	(10; 20)

Tabla del problema 3.7.1: cargas y posiciones

Solución

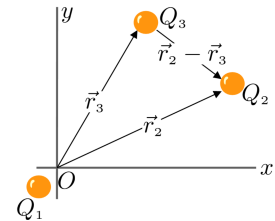
$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = K \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} \right)$$

$$r_{12} = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 44,72$$

$$r_{13} = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36,05$$

$$r_{23} = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,36$$

$$U = 9 \times 10^9 \left(\frac{-2 \times 3}{44,72} + \frac{-2 \times 5}{36,05} + \frac{3 \times 5}{22,36} \right) 10^{-12} = 2,33 \times 10^{-3}\text{ J} \quad \blacksquare$$



Solución del problema 3.7.1



3.8 Ligaduras y reacciones. Desplazamientos posibles y desplazamientos virtuales. Reacciones ideales

Un sistema de N partículas sin ligaduras requiere $3N$ datos para expresar la posición. Decimos que tiene $3N$ **grados de libertad**. Si las partículas están ligadas, el número de grados de libertad es más pequeño. Veamos algunos ejemplos.

Péndulo simple. Una partícula es obligada a moverse por la superficie de una esfera de radio ℓ (v. figura 3.22). Podemos pensar que, en lugar de una cuerda, que puede arrugarse, lo que hay es una varilla rígida de masa despreciable. En un extremo, está la partícula y, en el otro, una articulación puntual. El sistema tiene dos grados de libertad.

Sólido rígido. Lo podemos considerar constituido por un conjunto de partículas obligadas a mantener constantes sus distancias relativas (v. figura 3.23). Según esto, el sólido rígido tendrá seis grados de libertad, puesto que las posiciones de todas las partículas quedan totalmente determinadas con respecto a una posición de referencia, si conocemos la traslación (tres grados de libertad) y la rotación (tres grados de libertad) del sólido respecto a la referencia (v. figura 3.24).

Péndulo forzado. Es un péndulo como el anterior, pero ahora la esfera se ve obligada a moverse horizontalmente por medio de un actuador (v. figura 3.25). En este caso, el actuador es la mano que desplaza a voluntad el punto del extremo de la varilla donde hay la articulación. El movimiento del actuador es conocido $x(t)$. También tiene dos grados de libertad.

Ligaduras

Cada partícula i del sistema queda caracterizada por su masa y su vector posición

$$\{m_i, \vec{r}_i\}, \quad \vec{r}_y = (x_y, y_y, z_y), \quad y = 1 \dots N$$

Las posiciones pueden estar sometidas a ligaduras. Consideramos solo **ligaduras geométricas**, es decir, que no dependen de las velocidades, aunque sí pueden depender del tiempo. En este último caso, la ligadura recibe el nombre de **actuador**. Si tenemos L grados de libertad es porque tenemos $3N - L$ ligaduras independientes. En general, las ligaduras geométricas se pueden expresar en la forma:

$$f_a(\vec{r}_i, t) = 0 \quad , \quad a = 1 \dots 3N - L \quad (3.56)$$

Una forma muy conveniente de expresar las ligaduras es la paramétrica. Denominando los L parámetros $q_1 \dots q_L$, la misma expresión (3.56) puede ser escrita como

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_L, t) \quad (3.57)$$

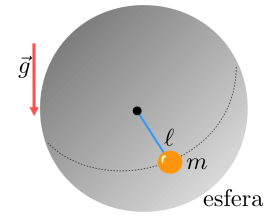


Fig. 3.22: La partícula está obligada a moverse por la superficie de una esfera

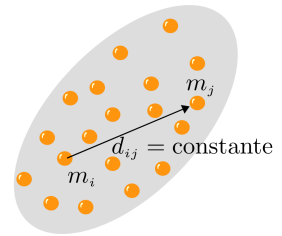


Fig. 3.23: Las partículas mantienen fijas las distancias entre ellas

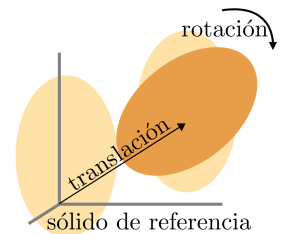


Fig. 3.24: Las posiciones de las partículas quedan determinadas si conocemos la traslación y la rotación del sólido con respecto al sólido de referencia

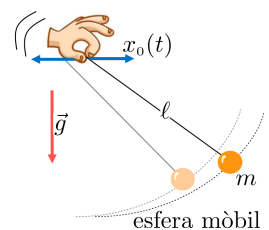


Fig. 3.25: Sacudimos a voluntad un péndulo simple



En general, consideramos las ligaduras como datos del problema.

Ejemplo. Una partícula es obligada a moverse por una curva determinada del espacio $f(x, y, z) = 0$, puesto que pasa por un alambre al cual damos justamente la forma de esta curva. Solo observando la forma del alambre, podemos determinar la ligadura $f(x, y, z) = 0$.

Si, por ejemplo, la curva es una circunferencia en el plano (x, y) de radio ℓ , la expresión (3.56) correspondiente sería:

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

y la forma paramétrica (3.57) la podríamos escribir con un único parámetro $q_1 = \theta$

$$\begin{aligned} x &= \ell \cos \theta \\ y &= \ell \sin \theta \end{aligned}$$

Si el alambre es una recta en el plano (x, y) , tendremos la expresión (3.56) correspondiente:

$$ax + b - y = 0$$

donde a y b serán constantes conocidas. La forma paramétrica (3.57) la podemos escribir haciendo $q_1 = q$ como:

$$\begin{aligned} x &= q \\ y &= aq + b \end{aligned}$$

Desplazamientos posibles y virtuales

Los **desplazamientos posibles** $d\vec{r}_i$ del sistema son desplazamientos compatibles con las ligaduras. Por ejemplo, en el caso de la partícula ligada al alambre (v. figura 3.26), el desplazamiento posible debe seguir por la trayectoria que traza el alambre. Decimos que los desplazamientos posibles son desplazamientos compatibles con las ligaduras. Esto quiere decir que, si hacemos desplazamientos $d\vec{r}_i$, la condición de ligadura $f_a(\vec{r}_i, t) = 0$ se seguirá cumpliendo para la nueva posición. Es decir:

$$df_a = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_a}{\partial t} dt = 0 \quad (3.58)$$

donde observamos que también hemos tenido en cuenta la variación dt , puesto que el desplazamiento posible tarda un cierto tiempo en realizarse.

Podemos utilizar la forma paramétrica de las ligaduras para encontrar los desplazamientos posibles $d\vec{r}_i$ en términos de los L parámetros q_a :

$$d\vec{r}_i = \sum_{a=1}^L \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad (3.59)$$

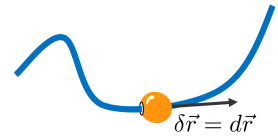


Fig. 3.26: Solo observando la forma del alambre podemos determinar la ligadura



Definimos los **desplazamientos virtuales** $\delta \vec{r}_i$ del sistema como aquellos desplazamientos que se hacen sin variación de tiempo, es decir, “congelando el tiempo”. Si nos imaginamos que estamos grabando una película donde en la escena se ve un péndulo oscilante que, además, es sacudido por una mano (v. figura 3.27), entonces el desplazamiento posible sería el que estamos grabando y que podemos ver más tarde como película acabada. El desplazamiento virtual correspondería a parar la grabación, desplazar la partícula sin que la mano se mueva y, al finalizar este desplazamiento, continuar la grabación.

Desde el punto de vista matemático, los desplazamientos virtuales cumplen:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.60)$$

o, en la forma paramétrica:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{a=1}^L \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a \quad (3.61)$$

Fijémonos que, **si las ligaduras no dependen del tiempo**, $\delta \vec{r}_i = d\vec{r}_i$. Como a lo largo de este curso no tratamos con ligaduras dependientes del tiempo, tampoco hacemos una distinción especial entre desplazamientos posibles y virtuales. Solo excepcionalmente, en el capítulo 9, consideramos ligaduras dependientes del tiempo y, entonces, $\delta \vec{r}_i \neq d\vec{r}_i$.

Reacciones

Para que las partículas se muevan de acuerdo con las ligaduras, estas ejercen fuerzas sobre las partículas. Son las llamadas **fuerzas de reacción** \vec{R}_i .

Si, sobre cada partícula i del sistema actúa, además de \vec{R}_i , la fuerza \vec{F}_i (que, en general, es conocida), podemos escribir las ecuaciones de movimiento (segunda ley de Newton):

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (3.62)$$

Estas ecuaciones hay que completarlas con las ligaduras (3.56) o (3.57).

El problema que nos encontramos es que, así como las ligaduras en general son conocidas, las reacciones que hacen las ligaduras \vec{R}_i no lo son. Como hemos comentado, las fuerzas de reacción \vec{R}_i son las fuerzas que hacen las ligaduras, de manera que las partículas se muevan según “mandan” estas y, naturalmente, también según las leyes de movimiento de Newton (3.62). En las ecuaciones (3.62), las \vec{R}_i son incógnitas. Solo una parte de las $\vec{r}_i(t)$ son incógnitas puesto que, como las ligaduras son conocidas, conoceremos una parte de la trayectoria de las partículas. Por ejemplo, en el caso del péndulo (v. figura 3.28), restringido en el plano vertical,

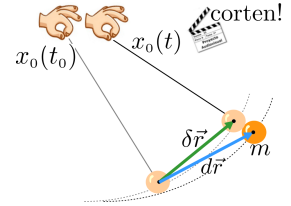


Fig. 3.27: La sutil diferencia entre desplazamiento posible y virtual

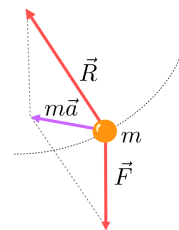


Fig. 3.28: En el caso del péndulo, la fuerza de reacción \vec{R}_i es la que ejerce la varilla



ya sabemos por donde pasa la partícula. Solo nos falta saber con qué velocidad lo hace o, más concretamente, solo nos falta saber $\theta(t)$.

En el caso de la partícula que pasa por el alambre (v. figura 3.29), también conocemos la trayectoria. Si el alambre no presenta fricción, podemos decir que la reacción \vec{R} es normal al alambre.

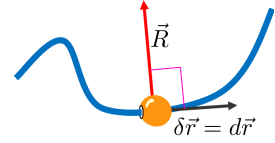


Fig. 3.29: En ausencia de fricción, la reacción del alambre es normal a este

Reacciones ideales

Una propiedad muy interesante que observamos en los casos representados en las figuras 3.28 y 3.29 es que la reacción es normal al desplazamiento. En el caso representado en la figura 3.30, lo que es normal a la reacción es el desplazamiento virtual, $\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0$, pero no el desplazamiento posible, $\vec{R} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

El hecho de que la reacción sea normal al desplazamiento quiere decir que el trabajo de esta fuerza es nulo cuando el sistema hace el desplazamiento. De hecho, lo que nos interesa no es que las reacciones no trabajen una por una. Aunque por separado pudieran trabajar, nos basta que en conjunto no trabajen. Movidos por este interés, definimos los conjuntos de reacciones ideales.

→ **Conjunto de reacciones ideales.** Un conjunto de reacciones $\vec{R}_i \quad i = 1 \dots S$ es llamado *conjunto de reacciones ideales* si cumple:

$$\sum_{i=1}^S \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (3.63)$$

Esta importante propiedad se satisface en muchísimas situaciones. En términos generales, podemos avanzar que, en ausencia de fricción disipativa, las reacciones son ideales. Veamos un par de casos.

Problema 3.8.1. Demuestra que las fuerzas de reacción en una articulación sin fricción (denominada también *articulación puntual*) son ideales.

Solución

El punto donde hay la articulación es ocupado por una partícula del cuerpo 1, de posición \vec{r}_1 , y otra del cuerpo 2, de posición \vec{r}_2 . Como consecuencia de la ligadura, se mueven igual $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Si diferenciamos $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$, que podemos escribir $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = 0$.

Las fuerzas de reacción \vec{R}_1 y \vec{R}_2 cumplen la ley de acción-reacción, $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$. Si ahora calculamos el trabajo:

$$\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{R}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = 0$$

Por tanto, el conjunto de fuerzas \vec{R}_1 y \vec{R}_2 son un conjunto de reacciones ideales. ■

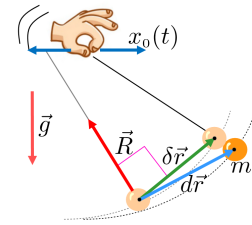


Fig. 3.30: La tensión R es normal al desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$ pero no al desplazamiento posible $d\vec{r}$

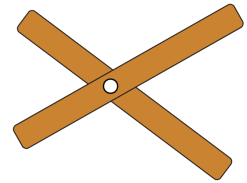
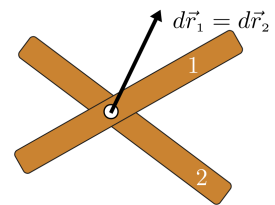


Figura del problema 3.8.1



Solución del problema 3.8.1



Problema 3.8.2. Demuestra que las fuerzas de reacción en un contacto liso entre dos sólidos en movimiento son ideales.

Solución

Los sólidos tienen velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 respecto al observador en reposo. En todo instante, el cuerpo 1 se mueve a una velocidad relativa con respecto al cuerpo 2, $\vec{v}_{1(2)}$, en la dirección del plano de contacto. Las fuerzas de reacción $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$ son normales a este plano y, por consiguiente, normales a la velocidad relativa, es decir, $\vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{1(2)} = 0$.

Podemos escribir:

$$0 = \vec{R}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{1}{dt} \vec{R}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \frac{1}{dt} (\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 - \vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_2) = \frac{1}{dt} (\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot d\vec{r}_2)$$

donde $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ serán los desplazamientos posibles. Por tanto, las reacciones en el contacto son un conjunto de reacciones ideales. ■

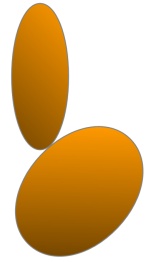
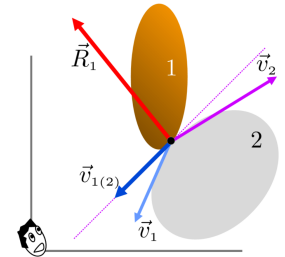


Figura del problema 3.8.2



Solución del problema 3.8.2

3.9 Ecuación general de la dinámica o principio de D'Alembert

Queremos escribir unas ecuaciones de movimiento donde aparezcan las ligaduras, pero no las fuerzas de reacción. Esto es, reescribir la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que las ligaduras forman parte de los datos del problema y, en cambio, las reacciones de estas no son conocidas.

El conjunto de fuerzas que actúan sobre el sistema se clasifica en dos subconjuntos: las reacciones \vec{R}_i las demás fuerzas, \vec{F}_i que pueden denominarse **fuerzas**

directamente aplicadas.

→ **Ecuación general de la dinámica.** Si todas las reacciones del sistema son ideales, las ecuaciones de movimiento de Newton son equivalentes a:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \tag{3.64}$$

Observamos que en las ecuaciones que se extraen de (3.64):

- 1) No aparecen las fuerzas de reacción.
- 2) Se obtienen tantas ecuaciones independientes como grados de libertad.

La ecuación general de la dinámica tuvo una primera versión debida a Jean le Rond D'Alembert, denominada principio de D'Alembert con el siguiente enunciado:

Cualquier posición del sistema en movimiento puede ser entendida como una posición de equilibrio si añadimos a las fuerzas externas las fuerzas de inercia.

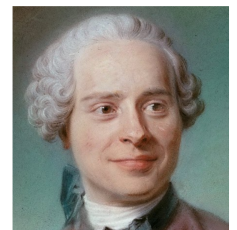


Fig. 3.31: Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) fue un matemático y filósofo francés



Este enunciado se entenderá más adelante en el contexto de la estática y en relación con el principio de los trabajos virtuales, aunque no usaremos esta interpretación.

La demostración de la ecuación general de la dinámica (3.64) no es difícil, desde el punto de vista matemático, aunque conceptualmente pueda sorprender.

Demostración. Queremos demostrar que

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.65)$$

y

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \quad (3.66)$$

son equivalentes a

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.67)$$

Demostración (3.65, 3.66) \Rightarrow (3.67): Si multiplicamos (3.66) por $\delta \vec{r}_i$ y sumamos, obtenemos:

$$0 = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i$$

y, si tenemos en cuenta (3.66), obtenemos (3.67).

Demostración (3.67) \Rightarrow (3.65, 3.66): Observamos que ahora las reacciones no están determinadas. Tienen que obligar al sistema a moverse por las ligaduras. Así quedan determinadas con $\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i$ y, obviamente, se cumple (3.66). Si multiplicamos (3.66) por $\delta \vec{r}_i$ y sumamos obtenemos $\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Ahora, teniendo en cuenta (3.67), obtenemos (3.65). ■

3.10 Sistema con ligaduras conservativo. Conservación de la energía

Consideramos un sistema con ligaduras conservativo: un sistema de partículas con ligaduras independientes del tiempo, con todas las reacciones \vec{R}_i ideales, y en que las demás fuerzas, \vec{F}_i (internas y/o externas), son conservativas. Esto quiere decir que existirá la función energía potencial U :

$$U = - \int \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (3.68)$$

→ **Teorema de la conservación de la energía mecánica.** Si definimos la energía mecánica de un sistema de N partículas con ligaduras conservativo como

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + U \quad (3.69)$$



donde U está definida según (3.68), el valor numérico de la energía mecánica se mantiene constante a lo largo del tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.70)$$

Demostración. Aplicamos la ecuación general de la dinámica tomando como desplazamientos posibles los reales del sistema (los desplazamientos que cumplen la ecuación general de la dinámica) y dividimos por el tiempo, dt , que ha invertido en realizarlos:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i \quad (3.71)$$

$$= - \left(\frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right) = 0 \quad (3.72) \quad \blacksquare$$

Habitualmente, se dice que *la energía mecánica se conserva*. La conservación de la energía también se puede escribir usando la expresión integrada entre dos instantes, t_{ini} y t_{fin} :

$$E_{\text{ini}} = E_{\text{fin}} \quad (3.73)$$

→ Recordemos que es necesario que las ligaduras sean independientes del tiempo para que se conserve la energía. No basta con que las fuerzas directamente aplicadas sean conservativas y las reacciones, ideales. También hace falta que los desplazamientos virtuales coincidan con los posibles, $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_i$. A lo largo de todo el libro, solo consideramos ligaduras independientes del tiempo. Únicamente en el capítulo 9 estudiamos ligaduras que pueden depender del tiempo.

→ En el caso de los sistemas conservativos de un grado de libertad este resultado es suficiente para hallar la trayectoria temporal del sistema.

Hay que precisar que los $d\vec{r}_i$ de (3.68) son los desplazamientos posibles de las partículas sobre las cuales se aplican las fuerzas, que no tienen por qué coincidir con los desplazamientos de los puntos del espacio donde se aplican las fuerzas. Este matiz importante podemos verlo en el ejemplo siguiente.

Problema 3.10.1. El muelle está relajado cuando la cara inferior A del prisma largo, de sección S y masa m , que puede deslizarse sin fricción por la guía fija, está en el nivel del líquido, de densidad ρ . Si lo soltamos desde la posición descrita, ¿hasta qué profundidad y llegará A ?

Nota. El recipiente es suficientemente grande para que el nivel del líquido no se mueva.

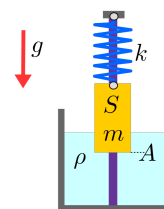


Figura del problema 3.10.1



Solución

Se trata de un sólido rígido que se puede mover solo por traslación. Tomamos el eje y en la dirección y el sentido de \vec{g} , con origen en el nivel fijo del líquido. En estas condiciones, la coordenada del punto A es y . Cuando $y = 0$, el muelle no hace fuerza y el empuje de Arquímedes es nulo. El desplazamiento infinitesimal posible de cualquier partícula del sólido es $d\vec{r} = dy\hat{j}$.

El sistema es conservativo y, en consecuencia, podemos aplicar la conservación de la energía entre las situaciones inicial y final. Para poder escribir los diferentes términos de energía potencial, consideramos que el punto A está hundido hasta y :

U_g : la fuerza peso es $\vec{P} = mg\hat{j}$ y la energía potencial asociada $U_g = -\int (mg\hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = -mgy$.

U_k : la fuerza que hace el muelle es $\vec{F}_k = -ky\hat{j}$ y la energía potencial asociada, $U_k = -\int (-ky\hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = \frac{1}{2}ky^2$.

U_E : el empuje de Arquímedes (ver la sección 4.3) es $\vec{E} = -\rho g S y \hat{j}$ y la energía potencial asociada, $U_E = -\int (-\rho g S y \hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = \frac{1}{2}\rho g S y^2$.

Fijémonos que siempre el desplazamiento que tomamos es el de las partículas del cuerpo donde se aplica la fuerza correspondiente. En especial, observamos que no necesitamos saber cuál es, en cada instante, el punto de aplicación del empuje de Arquímedes E , que estudiamos en el capítulo siguiente, donde veremos que, cuando A está en y , el empuje E está aplicado a $y/2$ y, por consiguiente, el desplazamiento de los puntos de aplicación de E es $dy/2$. Pero, insistimos, hemos tomado los desplazamientos posibles dy de las **partículas del cuerpo**, aunque estas puedan ser diferentes durante el proceso.

La energía mecánica del sistema es:

$$E(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}\rho g S y^2 - \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy + \frac{1}{2}(k + \rho g S)y^2$$

Aplicando su conservación, tenemos $E(0,0) = E(z,0) \Rightarrow y = \frac{2mg}{k + \rho g S}$ ■

Problema 3.10.2. Una partícula atada a una cuerda, de masa despreciable y que en todo momento se mantiene tensa, oscila en un plano vertical. Encuentra la ecuación de movimiento utilizando la conservación de la energía.

Solución

Observamos que la tensión de la cuerda T es siempre normal al desplazamiento posible de la partícula. Se trata de una reacción ideal. Además de las reacciones, tenemos la fuerza de la gravedad, que es conservativa. Podemos expresar la ligadura en forma paramétrica como:

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin \theta \\ y &= \ell \cos \theta \end{aligned}$$

La energía del sistema es $E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos \theta$ donde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ que, en términos de θ , es $v = \ell\dot{\theta}$. Así obtenemos:

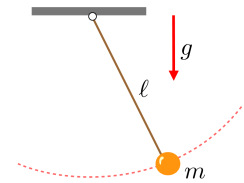
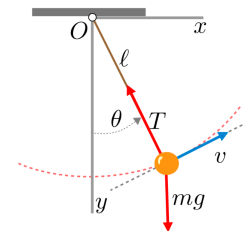


Figura del problema 3.10.2



Solución del problema 3.10.2



$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

y, aplicando la conservación de la energía:

$$0 = \frac{dE}{dt} = m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta \dot{\theta}$$

Teniendo en cuenta que buscamos soluciones permitidas por las ligaduras $\dot{\theta} \neq 0$, obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

■

Problema 3.10.3. El clavo C fijo de la figura está a una distancia vertical d de donde está fijada la cuerda atada a la bolita de masa m . Demuestra que, para que, soltándola, pueda dar una vuelta completa al círculo centrado en el clavo, es necesario que $d \geq 0,6L$.

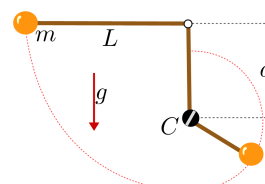


Figura del problema 3.10.3

Solución

Es un sistema ligado conservativo con ligaduras ideales. Usaremos la conservación de la energía mecánica $E_{\text{ini}} = E_{\text{fi}}$ entre las posiciones ini, con $v = 0$ e $y = 0 \Rightarrow E_{\text{ini}} = 0$, y fi, con y y $v \Rightarrow E_{\text{fi}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$.

En el punto rojo de la figura, tenemos $y = d - (L - d)$. Sustituyendo en la conservación de la energía y despejando la velocidad, encontramos:

$$v = \sqrt{2g(2d - L)} \tag{1}$$

A su vez, esta velocidad ha de ser suficiente para que la cuerda no se arrugue. Así, en el punto donde menos velocidad tiene, ha de pasar que la tensión T de la cuerda la mantenga tensa, es decir, $T \geq 0$. Escribiendo la ecuación de movimiento en la dirección de la tensión, teniendo en cuenta que la aceleración normal es $a_n = \frac{v^2}{L-d}$:

$$mg + T = m\frac{v^2}{L-d}$$

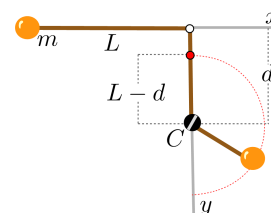
Despejando v e imponiendo que $T \geq 0$, tenemos:

$$v \geq \sqrt{g(L-d)} \tag{2}$$

Combinando (1) y (2):

$$\sqrt{2g(2d - L)} \geq \sqrt{g(L-d)} \Rightarrow 4d - 2L \geq L - d \Rightarrow d \geq \frac{3}{5}L$$

■



Solución del problema 3.10.3

Problema 3.10.4. Los bloques de la figura se dejan ir partiendo del reposo. No hay rozamiento en el suelo horizontal ni en las poleas ni en la cuerda, cuya masa es despreciable. Determina la aceleración de los bloques y la tensión de cada cuerda.

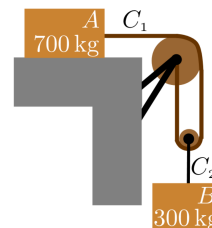


Figura del problema 3.10.4



Solución

Es un sistema ligado conservativo. Dado que cuando hacemos un desplazamiento posible dx , el trozo de cuerda dx que avanza, una vez pasada la polea, debe repartirse entre los dos segmentos de cuerda, tenemos $dy = \frac{1}{2}dx$ y, dividiendo por dt , $\dot{y} = \frac{1}{2}\dot{x}$.

La energía del sistema podemos escribirla utilizando directamente los valores numéricos de las masas, como:

$$E = \frac{1}{2}700 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}300 \dot{y}^2 - 300 \times 9,81 y = 387,5 \dot{x}^2 - 2943y$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{E} = 2 \times 387,5 \dot{x} \ddot{x} - 2943 \dot{y}$$

Sustituyendo la ligadura $\dot{y} = \frac{1}{2}\dot{x}$ e imponiendo la conservación de la energía:

$$(775 \ddot{x} - 1471,5)\dot{x} = 0$$

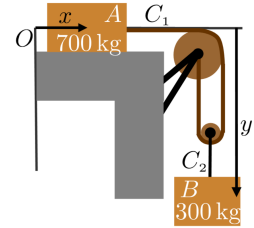
Teniendo en cuenta que buscamos soluciones compatibles con las ligaduras, $\dot{x} \neq 0$, obtenemos:

$$\ddot{x} = 1,8987 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{y} = 0,94935 \text{ m/s}^2$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton para cada bloque:

$$T_1 = 700 \ddot{x} \Rightarrow T_1 = 1329,1 \text{ N}$$

$$300 \times 9,81 - T_2 = 300 \ddot{y} \Rightarrow T_2 = 2658,2 \text{ N}$$



Solución del problema 3.10.4

Problema 3.10.5. El bloque B , de 6 kg, se deja caer y va deslizándose por la cuña A , de 15 kg, apoyada en el suelo horizontal sin fricción. Calcula las aceleraciones de A y B .

Solución

No hay fricción, no hay fuerzas externas en la dirección del suelo horizontal. La conservación de la cantidad de movimiento horizontal impone:

$$m_A \dot{x}_A + m_B \dot{x}_B = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{x}_A = -\frac{m_B}{m_A} \dot{x}_B = -\frac{2}{5} \dot{x}_B \quad (1)$$

En la figura, vemos que la velocidad de B relativa a A tiene una inclinación de 30° (¡tengamos en cuenta que el plano inclinado se mueve!):

$$\vec{v}_{B(A)} = (\dot{x}_B - \dot{x}_A, \dot{y}_B - \dot{y}_A) \Rightarrow \frac{\dot{y}_B}{(\dot{x}_B - \dot{x}_A)} = \tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = \frac{7}{5\sqrt{3}} \dot{x}_B \quad (2)$$

Ahora utilizamos la conservación de la energía. Para ello, escribimos la energía en términos de \dot{x}_B y \dot{y}_B , derivamos respecto al tiempo e igualamos a cero:

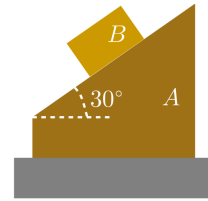
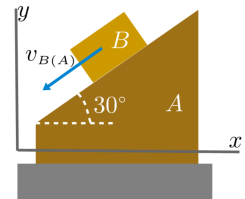


Figura del problema 3.10.5



Solución del problema 3.10.5



$$E = \frac{1}{2}m_A \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + m_B g y_B = 6,16 \dot{x}_B^2 + 58,86 y_B$$

$$\dot{E} = 0 = 12,32 \dot{x}_B \ddot{x}_B + 47,576 \dot{x}_B \Rightarrow \ddot{x}_B = -\frac{47,576}{12,32} = -3,86 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo en las relaciones (1) y (2) derivadas respecto al tiempo, resulta:

$$\ddot{y}_B = -3,12 \text{ m/s}^2 \quad \ddot{x}_A = 1,545 \text{ m/s}^2$$

■

Problema 3.10.6. Una masa $m = 0,5 \text{ kg}$ se desliza sin fricción en un plano vertical a lo largo de un alambre ($d = 0,8 \text{ m}$). El muelle tiene $\ell = 25 \text{ cm}$ de longitud natural y $k = 600 \text{ N/m}$. Si la masa se suelta sin velocidad inicial cuando $b = 30 \text{ cm}$, determina:

- la velocidad cuando llega a C
- la velocidad cuando llega a B .

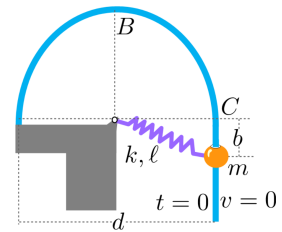


Figura del problema 3.10.6

Solución

Se trata de un sistema conservativo con ligadura ideal. Las fuerzas conservativas son el peso y la que ejerce el muelle. La energía, como función de x , y y v , se puede escribir:

$$E(x, y, v) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k(\ell - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

donde x y y tienen que estar sobre el alambre, que es la ligadura. Imponemos la conservación de la energía entre el punto inicial y los indicados en cada apartado. La energía en el punto inicial es:

$$E = \frac{1}{2}m0^2 + mg(-0,3) + \frac{1}{2}k(\ell - \sqrt{0,4^2 + (-0,3)^2})^2 = 17,2785 \text{ J}$$

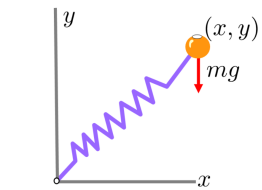
a)

$$\frac{1}{2}m v_C^2 + mg 0 + \frac{1}{2}k(\ell - 0,4)^2 = 17,2785 \Rightarrow v_C = 6,48953 \text{ m/s}$$

b)

$$\frac{1}{2}m v_B^2 + mg 0,4 + \frac{1}{2}k(\ell - 0,4)^2 = 17,2785 \Rightarrow v_B = 5,85372 \text{ m/s}$$

■



Solución del problema 3.10.6

3.11 Sólido rígido

Un sólido rígido es un sistema de partículas i de posiciones \vec{r}_i con las ligaduras geométricas:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = \text{cte.} \quad (3.74)$$



Reacciones ideales

→ Las fuerzas de cohesión de un sólido rígido forman un conjunto de reacciones ideales.

Demostración. Analizamos dos cualesquiera de las muchas partículas del sólido, 1 y 2, de vectores posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente (v. figura 3.32). Las fuerzas de cohesión del sólido (fuerzas internas) son las reacciones de las ligaduras. Para las dos partículas, \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} cumplirán la tercera ley de Newton:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad ; \quad \vec{F}_{12} \propto (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (3.75)$$

Los desplazamientos posibles (=virtuales) $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ cumplirán:

$$0 = d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = 0 \quad (3.76)$$

La condición de reacciones ideales para estas dos partículas es $\vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = 0$ y eso es lo que tenemos que demostrar. Teniendo en cuenta (3.75) y (3.76):

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 &= -\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \\ \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) &\propto (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = 0 \end{aligned}$$

Podemos extender este resultado a todas las parejas de partículas del sólido y, por consiguiente, el conjunto fuerzas de cohesión de un sólido rígido es ideal. ■

Desplazamientos posibles

En el sólido, tomamos un punto de referencia C , de posición \vec{r}_C (v. figura 3.33). La posición de cualquier otro punto del sólido puede escribirse $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)}$. Podemos así descomponer los desplazamientos posibles $d\vec{r}_i$ como:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{r}_{i(C)} \quad (3.77)$$

Si sustituimos $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)}$ en la condición (3.74), el resultado no depende de \vec{r}_C . Así pues, cualquier $d\vec{r}_C$ es posible. Cuando el desplazamiento posible tiene la forma:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C \quad (3.78)$$

decimos que se trata de una **traslación**.

Nos queda por ver qué restricciones impone (3.74) sobre $d\vec{r}_{i(C)}$. La condición es:

$$d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = 2(\vec{r}_{i(C)} - \vec{r}_{j(C)}) \cdot (d\vec{r}_{i(C)} - d\vec{r}_{j(C)}) = 0 \quad (3.79)$$

La solución de estas ecuaciones nos da la expresión de los desplazamientos posibles respecto al punto C , $d\vec{r}_{j(C)}$, que denominamos **rotaciones respecto a C** (v. figura 3.34).

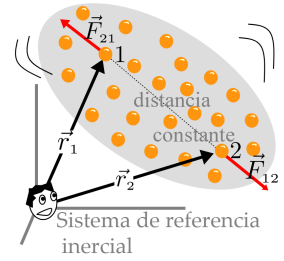


Fig. 3.32: En un sólido rígido, las fuerzas internas son las fuerzas de reacción de las ligaduras que mantienen la distancia constante entre las partículas

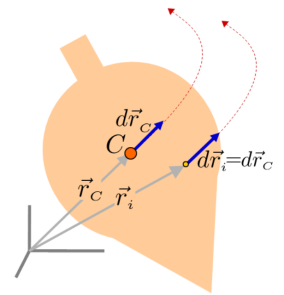


Fig. 3.33: Traslación sin rotación

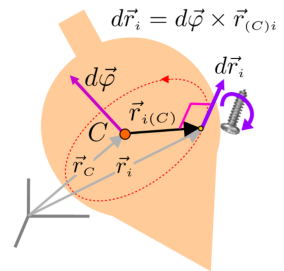


Fig. 3.34: Rotación sin traslación



→ La expresión general de un desplazamiento posible de rotación respecto al punto C es:

$$d\vec{r}_{i(C)} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \quad (3.80)$$

donde $d\vec{\varphi}$ es un vector infinitesimal cualquiera (tres grados de libertad).

El vector $d\vec{\varphi}$ define la rotación infinitesimal del conjunto del cuerpo, no alrededor de un punto concreto, sino la rotación entendida como un *cambio de orientación* del cuerpo en el espacio. La dirección de $d\vec{\varphi}$ representa la dirección del **eje instantáneo de rotación**; el sentido de $d\vec{\varphi}$, con la regla del tornillo, representa el sentido de la rotación, y el módulo representa el ángulo (infinitesimal) de esta rotación.

Hay que comentar que el símbolo d , empleado en $d\vec{\varphi}$, no puede significar, en general, diferenciación. En general, decimos que $d\vec{\varphi}$ no es integrable; no podemos encontrar (¡no existe!) $\vec{\varphi}$ para una rotación cualquiera. Sí lo podemos hacer si, por ejemplo, la dirección de $d\vec{\varphi}$ se mantiene constante.

Demostración. Queremos demostrar que (3.80) es solución de (3.79). Si tomamos $\vec{r}_j = \vec{r}_C \Rightarrow \vec{r}_{j(C)} = \vec{r}_{C(C)} = 0$ de (3.79), obtenemos:

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot d\vec{r}_{i(C)} = 0 \quad (3.81)$$

Si ahora utilizamos (3.81), al hacer los productos en (3.79) obtenemos:

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot d\vec{r}_{j(C)} + \vec{r}_{j(C)} \cdot d\vec{r}_{i(C)} = 0 \quad (3.82)$$

(3.81) y (3.82) son las condiciones que han de cumplir los desplazamientos posibles $d\vec{r}_{i(C)}$. (3.81) nos dice que $d\vec{r}_{i(C)} \perp \vec{r}_{i(C)}$ y, por consiguiente, podemos expresar $d\vec{r}_{i(C)}$ como $d\vec{r}_{i(C)} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}$. Sustituyendo en (3.82), nos queda:

$$\vec{r}_{i(C)} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{j(C)}) + \vec{r}_{j(C)} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}) = 0$$

que, teniendo en cuenta la propiedad vectorial $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$, podemos reescribir como:

$$(\vec{r}_{i(C)} \times \vec{r}_{j(C)}) \cdot (d\vec{\varphi}_j - d\vec{\varphi}_i) = 0$$

Y, como que esto debe pasar para toda pareja de partículas i, j del cuerpo $\Rightarrow d\vec{\varphi}_j = d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi}$ ■

Un desplazamiento (infinitesimal) posible general será la composición de una traslación y una rotación, es decir:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \quad (3.83)$$

3.12 Tópicos de cinemática del sólido

Si la relación (3.83) se divide, miembro a miembro, por dt , se obtiene la expresión de la velocidad instantánea de cualquier partícula del sólido, $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, en función

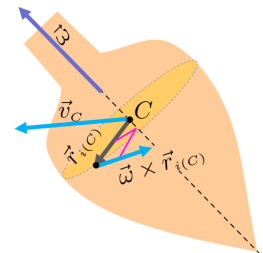


Fig. 3.35: Velocidad instantánea de la partícula y de un sólido rígido en rotación



de la velocidad, $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$, del punto de referencia C y de la **velocidad angular** $\vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (v. figura 3.35):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} \quad (3.84)$$

La velocidad angular se puede entender como la velocidad instantánea de rotación del cuerpo según el eje instantáneo de dirección $\vec{\omega}$ y en el sentido de un tornillo dextrógiro que avanza según el sentido de $\vec{\omega}$. Fijémonos que los diferentes puntos del sólido pueden tener diferentes velocidades \vec{v}_i , pero el sólido tiene **una** velocidad angular $\vec{\omega}$.

La aplicación de la relación (3.84) a dos partículas cualesquiera i y j del sólido se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} \\ \vec{v}_j = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{j(C)} \end{cases}$$

Si restamos miembro a miembro estas dos expresiones, resulta:

$$\vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (3.85)$$

porque $\vec{r}_{i(C)} - \vec{r}_{j(C)} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

De acuerdo con las propiedades del producto vectorial, es evidente que

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \quad (3.86)$$

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (3.87)$$

de donde se deduce que el vector velocidad relativa entre dos partículas es, en todo momento, perpendicular a los vectores posición relativa y velocidad angular (v. figura 3.36).

El punto i donde $\vec{v}_i = 0$ se denomina **centro instantáneo de rotación (CIR)**. Ver la figura 3.37. Según (3.86), $\vec{r}_{CIR(j)}$ cumple:

$$\vec{v}_j \cdot \vec{r}_{CIR(j)} = 0 \quad (3.88)$$

En general, el CIR no se puede identificar con ningún punto solidario con el sólido.

Problema 3.12.1. La escalera \overline{AB} de 3 m de longitud, se desliza por la pared y el suelo. Cuando el ángulo θ vale 30° , el extremo inferior de la escalera se mueve hacia la derecha a una velocidad de 2,0 m/s. Determina la velocidad del extremo superior y la velocidad angular en ese instante.

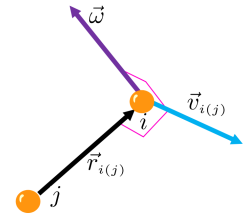


Fig. 3.36: Posición y velocidad relativas de dos partículas de un sólido en rotación

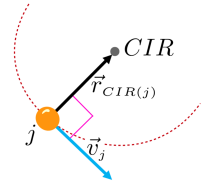


Fig. 3.37: Centro instantáneo de rotación (CIR)

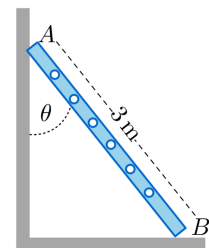


Figura del problema 3.12.1



Solución

Si se aplica la ecuación (3.85) a los puntos A y B de la escalera, resulta:

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \quad (1)$$

Tomando el sistema de ejes que se muestra en la figura y teniendo en cuenta que $\vec{r}_A - \vec{r}_B = (-L \sin \theta, L \cos \theta, 0)$, que $\vec{v}_A = (0; -v_A; 0)$, $\vec{v}_B = (v_B; 0; 0)$ y $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$, (1), resulta:

$$(0, -v_A, 0) - (v_B, 0; 0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -L \sin \theta & L \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante, queda:

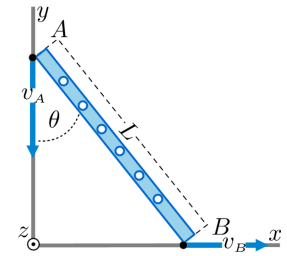
$$-v_B \hat{i} - v_A \hat{j} = -L\omega \cos \theta \hat{i} - L\omega \sin \theta \hat{j}$$

y, igualando las correspondientes componentes, se llega a

$$\begin{aligned} v_B &= \omega L \cos \theta \\ v_A &= \omega L \sin \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo los datos proporcionados en el enunciado, $L = 3$ m, $v_B = 2$ m/s y $\theta = 30^\circ$, se obtiene finalmente:

$$v_A = 1,155 \text{ m/s}, \quad \omega = 0,77 \text{ rad/s}$$



Solución del problema 3.12.1

Problema 3.12.2. En el instante representado en la figura, la corredera A se está moviendo hacia la derecha a una velocidad $v_A = 3$ m/s. Encuentra la velocidad angular ω del brazo \overline{AB} y la velocidad v_B de la corredera B .

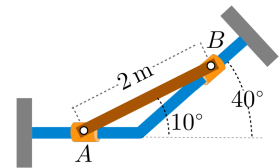


Figura del problema 3.12.2

Solución

Igual que en el problema 3.12.1, la aplicación de la ecuación (3.85) a los puntos A y B de la barra que une ambas correderas con la barra permite escribir:

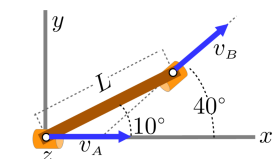
$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Tomando el sistema de ejes que se muestra en la figura de la solución y teniendo en cuenta:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = -L \cos 10^\circ \hat{i} - L \sin 10^\circ \hat{j}$$

y que $\vec{v}_A = v_A \hat{i}$, $\vec{v}_B = v_B \cos 40^\circ \hat{i} + v_B \sin 40^\circ \hat{j}$ y $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, esta última expresión se puede escribir de la forma:

$$(v_A; 0; 0) - (v_B \cos 40^\circ; v_B \sin 40^\circ; 0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -L \cos 10^\circ & -L \sin 10^\circ & 0 \end{vmatrix}$$



Solución del problema 3.12.2



Resolviendo el determinante, queda

$$v_A \hat{i} - v_B \cos 40^\circ \hat{i} - v_B \sin 40^\circ \hat{j} = -L\omega \sin 10^\circ \hat{i} - L\omega \cos 10^\circ \hat{j}$$

y, igualando las correspondientes componentes, se llega a:

$$\begin{aligned} v_A - v_B \cos 40^\circ &= \omega L \sin 10^\circ \\ v_B \sin 40^\circ &= \omega L \cos 10^\circ \end{aligned}$$

La resolución de este sistema, a partir de los datos proporcionados por el enunciado del problema, permite obtener v_B y ω :

$$v_B = 3,41 \text{ m/s}, \quad \omega = 1,113 \text{ rad/s}$$

Rodar sin deslizar

Consideramos un sólido rígido que se mueve sin perder el contacto con un suelo plano (figura 3.38). El punto B del sólido en contacto con el suelo va cambiando con el tiempo y la velocidad relativa al suelo de este punto, $\vec{V}_B - \vec{v}_{\text{suelo}}$, puede ser diferente de cero o no. En el primer caso, se dice que el sólido **rueda y se desliza**, mientras que en el segundo, **rueda sin deslizar**.

Aplicando la ecuación (3.84) a los puntos A y B del sólido (v. figura 3.38), resulta:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Si el sólido rueda sin deslizar, $\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{suelo}}$ y la expresión anterior se puede escribir como:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\text{suelo}} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

Si $\vec{v}_{\text{suelo}} = 0$, \vec{v}_A es perpendicular a la recta que une el punto A con el punto B de contacto instantáneo del sólido con el suelo. Si tenemos en cuenta que $\vec{\omega}$ y $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ son vectores perpendiculares, queda:

$$v_A = \omega \overline{AB} \tag{3.89}$$

de donde resulta que v_A es directamente proporcional a la distancia \overline{AB} . De este modo, se obtiene una distribución de vectores velocidad instantánea en el sólido, tal como se muestra en la figura 3.39. El punto B es, en este caso, el centro instantáneo de rotación (CIR), definido en (3.88). En muchos casos, el sólido tendrá una sección circular de radio R . Si la ecuación (3.89) se aplica ahora a los puntos C , centro, y B del sólido, $\overline{BC} = R$, se obtiene:

$$v_C = \omega R$$

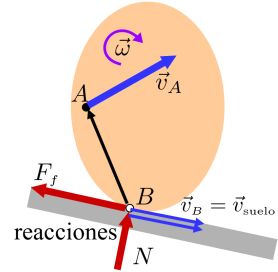


Fig. 3.38: Sólido rígido en movimiento sobre una superficie plana fija

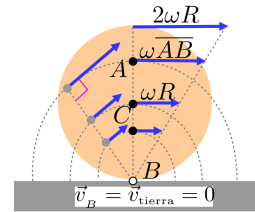


Fig. 3.39: Distribución de velocidades en el plano del movimiento de un sólido que rueda sin deslizar sobre un suelo



Nota 1. Cuando el sólido rueda sin deslizarse, el hecho de que el punto en contacto con el suelo (punto B en las figuras 3.38 y 3.39) tenga instantáneamente velocidad relativa nula hace que las reacciones del suelo sobre el cuerpo, aplicadas en el punto de contacto (normal N y de fricción F_f en la figura 3.38) sean ideales. Ello es especialmente importante en cuanto a la fricción, porque la normal ya sabemos que es ideal, en caso de que haya deslizamiento.

Nota 2. Si el sólido rueda sin deslizarse, $F_f \leq \mu_e N$, mientras que, si rueda y se desliza, $F_f = \mu_c N$, donde μ_e y μ_c son, respectivamente, los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el cuerpo y el suelo.

3.13 Ecuaciones de movimiento del sólido rígido

La ecuación general de la dinámica para el sólido rígido sometido a fuerzas externas \vec{F}_i la encontramos tomando como desplazamientos virtuales $\delta\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}$:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}) = 0 \quad (3.90)$$

Recordemos que podemos hacer que $d\vec{r}_C$ y $d\vec{\varphi}$ tengan cualquier *valor infinitesimal*, ya que son independientes el uno del otro. Así, cada uno de los factores de $d\vec{\varphi}$ y $d\vec{r}_C$ de (3.90) ha de ser cero. En particular, el factor de $d\vec{r}_C$ ha de cumplir: $\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) = 0$, una ecuación que ya hemos comentado más arriba pero que ahora nos permite enunciar:

→ La ecuación de movimiento del sólido asociada a las traslaciones puede escribirse:

$$\vec{F} = m \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (3.91)$$

Para encontrar la ecuación de movimiento asociada a las rotaciones, hay que trabajar algo más.

→ La ecuación de movimiento del sólido rígido asociada a las rotaciones puede escribirse:

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \quad (3.92)$$

donde C es el CM o bien, en caso de existir, un punto fijo solidario con el cuerpo. $\vec{L}_{(C)}$ y $\vec{M}_{(C)}$ son, respectivamente, el momento angular del sólido y el momento de las fuerzas externas respecto al punto C y referidos al sistema de referencia inercial.

Demostración. Como se ha explicado anteriormente, el factor de $d\vec{\varphi}$ en la ecuación general de la dinámica (3.90) ha de ser nulo. Ahora no es tan sencillo extraer este



factor. Partimos de:

$$\sum_{i=1}^N \left((\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)}) \right) = 0 \quad (3.93)$$

Teniendo en cuenta la relación $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B}$ con $\vec{A} = \vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i$, $\vec{B} = d\vec{\varphi}$ y $\vec{C} = \vec{r}_{i(C)}$, obtenemos:

$$-\sum_i^N \left(\left((\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \times \vec{r}_{i(C)} \right) \cdot d\vec{\varphi} \right) = 0 \quad (3.94)$$

que, como $d\vec{\varphi}$ es arbitrario, nos dice:

$$\sum_i^N \left(\left((\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \times \vec{r}_{i(C)} \right) \right) = 0 \quad (3.95)$$

El término $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)}$ se puede reescribir como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_{i(C)} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_{i(C)}$$

y con $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{i(C)} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_{i(C)}$ tenemos, siempre que escojamos como punto C el CM o bien, en caso de existir, un punto fijo del cuerpo ($\dot{\vec{r}}_C = 0$)

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_{i(C)} = \dot{\vec{r}}_C \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_{i(C)} = 0$$

La ecuación (3.95) queda finalmente:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(C)} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \left(\vec{r}_{i(C)} \times \vec{F}_i \right) \quad (3.96)$$

que no es más que la expresión (3.92) explicitada. ■

Las ecuaciones de movimiento (3.91) y (3.92) ya las habíamos encontrado anteriormente, en las secciones 3.3 y 3.4, aunque con un sentido ligeramente diferente. Allí surgían como combinaciones lineales de ecuaciones para cada partícula, con lo cual su cumplimiento resulta necesario para un sistema cualquiera de N partículas. Además, el punto respecto al cual calculábamos los momentos tenía que ser un punto fijo (aunque el sistema estuviera en movimiento).² Ahora son el resultado de aplicar la ecuación general de la dinámica al sólido rígido y, por consiguiente, **para un sólido rígido, son necesarias y suficientes**. Es decir, conocidas la posición y la velocidad en un instante y las fuerzas que actúan sobre el sólido, permiten predecir su futuro (y pasado). Podemos concluir así, respecto a las ecuaciones de movimiento en la forma (3.91) y (3.92): si C es fijo no solidario con el sólido, son necesarias; si C es el CM o un punto fijo solidario con el cuerpo, son necesarias y suficientes.

² Allí ya avanzamos que se podía utilizar también el CM



Otro aspecto destacable es que, si el momento respecto al CM de las fuerzas que actúan sobre el sólido es nulo, el movimiento del sólido rígido puede describirse solo con (3.91) y podemos interpretar que se comporta como una partícula de la misma masa concentrada en el punto CM .

Sistemas de fuerzas equivalentes

Las ecuaciones de movimiento del sólido permiten definir los conjuntos de fuerzas que causarán los mismos efectos sobre un sólido rígido. Observando solo el movimiento del sólido no podríamos saber si el causante es un conjunto de fuerzas u otro.

→ **Sistemas de fuerzas equivalentes.** Si dos conjuntos de fuerzas aplicadas sobre el mismo sólido rígido tienen igual resultante e igual momento resultante (con respecto al mismo punto), causarán los mismos efectos físicos sobre el sólido. Decimos que son dos sistemas de fuerzas equivalentes.

Problema 3.13.1. Un coche de masa m y anchura entre ruedas $2a$ viaja a una velocidad de módulo v constante sobre una pista horizontal, de forma que su CM , a una altura h de la pista, describe una circunferencia de radio $R \gg a$. Encuentra cuál es la velocidad máxima a la cual puede viajar sin volcar.

Solución

La fuerza de rozamiento representada en la figura es la resultante de las fuerzas de rozamiento en cada contacto rueda-carretera, que apunta radialmente porque la velocidad es constante.

El movimiento de traslación del CM queda determinado por:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow N = mg; F_f = ma_N = m \frac{v^2}{R}$$

El movimiento es a velocidad uniforme. Mientras el coche no vuelque, el momento angular será constante. Es decir, el coche sí efectúa una rotación pero esta es uniforme. Así, si $\vec{L}_{(CM)}$ es constante:

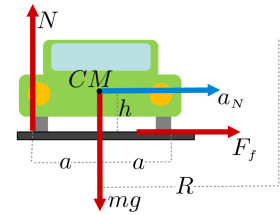
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{(CM)}}{dt} = 0$$

Basta con calcular el momento de las fuerzas con respecto al CM e igualar a cero, $\vec{M}_{(CM)} = 0$. Observando la figura:

$$\vec{M}_{(CM)} = 0 = (Na - F_f h; 0; 0) \Rightarrow Na - F_f h = 0$$

y, combinando con las ecuaciones de la traslación, obtenemos: $v = \sqrt{gRa/h}$ ■

Problema 3.13.2. ¿Qué condiciones debe que cumplir una polea sin fricción en el eje para que la tensión de la cuerda, de masa despreciable, sea igual en ambos lados?



Solución del problema 3.13.1

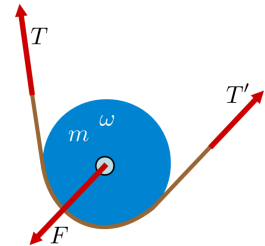


Figura del problema 3.13.2



Solución

Los momentos los calculamos respecto al CM , situado en el centro de la polea:

$$\vec{L}_{(CM)} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{v}_i$$

Descomponemos la velocidad en velocidad de traslación y de rotación: $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{i(CM)}$

El término de traslación resulta ser nulo:
$$\left(\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{i(CM)}}_{=0} \right) \times \vec{v}_{CM} = 0$$

Así, tenemos:

$$\vec{L}_{(CM)} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{v}_{i(CM)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{(CM)}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{a}_{i(CM)}$$

En cuanto a los momentos de las fuerzas con respecto al CM :

$$\vec{M}_{(CM)} = (T'R - TR) \hat{k}$$

Tensiones iguales $\Leftrightarrow \vec{M}_{(CM)} = 0 \Leftrightarrow \sum_i \vec{r}_{i(CM)} \times m_i \vec{a}_{i(CM)} = 0$

Esta anulación puede darse por:

- 1) Polea de masa despreciable ($m_i \rightarrow 0$). Puede rotar y desplazarse arbitrariamente.
- 2) Polea en rotación uniforme (aceleraciones tangentes nulas): $\vec{r}_{i(CM)} \times \vec{a}_{i(CM)} = \vec{r}_{i(CM)} \times \vec{a}_{N i(CM)} = 0$ ya que $\vec{r}_{i(CM)} \parallel \vec{a}_{N i(CM)}$. Puede tener dimensiones y masa arbitraria y puede desplazarse arbitrariamente.

Si la polea tiene un radio despreciable, hay que tener cuidado: la rotación se puede hacer muy grande, de forma que el producto no tiene por qué ser nulo! ■

3.14 Par de fuerzas

Se denomina *par de fuerzas* un sistema de fuerzas que se aplica sobre un sólido rígido equivalente a dos fuerzas iguales, de sentido contrario y con rectas de acción paralelas; por consiguiente, de fuerza resultante nula y de momento resultante no nulo (v. figura 3.40).

→ El momento de un par de fuerzas es independiente del punto respecto al cual se calcule.

Demostración. Lo podemos ver calculando el momento del par: teniendo en cuenta la figura 3.40:

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F} - \vec{r}_- \times \vec{F} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F} = \vec{r}_\pm \times \vec{F} \quad \blacksquare$$

→ El módulo del momento de un par podemos expresarlo como:

$$M = Fd \tag{3.97}$$

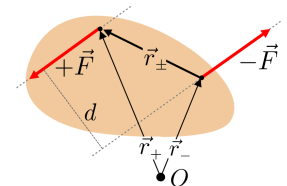


Fig. 3.40: Par de fuerzas



donde d es la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas del par. Esta distancia se denomina **brazo del par de fuerzas**. Por tanto, el momento de un par depende de la distancia entre las fuerzas (brazo) y del valor de las fuerzas.

Es muy habitual conocer los pares \vec{M}_i que se aplican sobre un sólido y no las fuerzas que los constituyen. Ello no nos impide determinar el movimiento del sólido usando las ecuaciones (3.91) y (3.92). Los pares \vec{M}_i forman parte de los términos aditivos en la determinación del momento total $\vec{M}_{(C)}$. Un par normal al plano del papel se puede representar con los símbolos \curvearrowright o \curvearrowleft , que indican el sentido del par.

→ **Traslación pura.** En la figura 3.41, se aplica solo una fuerza al CM de un sólido. Según las ecuaciones de movimiento (3.91) y (3.92), con $C = CM$, el efecto que tiene sobre el sólido, si inicialmente está en reposo, es una traslación del CM sin ninguna rotación, movimiento que denominamos *traslación pura*.

→ **Rotación pura.** En la figura 3.42, se aplica solo un par \vec{M} al mismo sólido. Teniendo en cuenta de nuevo las ecuaciones de movimiento, el efecto que tiene sobre el sólido, si inicialmente está en reposo, es una rotación alrededor del CM sin que este se mueva, movimiento que denominamos *rotación pura*.

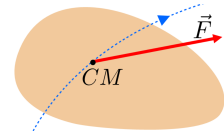


Fig. 3.41: Una fuerza \vec{F} aplicada en el CM es la causa de una traslación pura: si el sólido está inicialmente en reposo, el efecto de la fuerza \vec{F} es mover el CM sin provocar la rotación del sólido

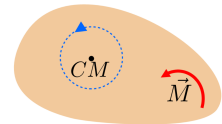


Fig. 3.42: Un par \vec{M} es la causa de una rotación pura: si el sólido está inicialmente en reposo, el efecto del par \vec{M} es hacerlo girar alrededor del CM . El CM se mantiene en reposo

Trabajo, potencia y energía de un par

El trabajo que hace un par \vec{M} aplicado a un sólido rígido es el trabajo que hacen las fuerzas constituyentes del par. Si expresamos el par con dos fuerzas, $\vec{F}_+ = \vec{F}$ y $\vec{F}_- = -\vec{F}$, aplicadas en los puntos del sólido \vec{r}_+ y \vec{r}_- , tenemos $\vec{M} = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}$. El trabajo será:

$$W = \int \left(\vec{F}_+ \cdot d\vec{r}_+ + \vec{F}_- \cdot d\vec{r}_- \right) = \int \vec{F} \cdot (d\vec{r}_+ - d\vec{r}_-)$$

donde hemos omitido la especificación de los límites de integración.

Las fuerzas del par se aplican a puntos del cuerpo y estos puntos pueden ir cambiando. Ahora bien, como ya hemos visto en el problema 3.10.1, los desplazamientos $d\vec{r}_\pm$ son desplazamientos de las partículas del cuerpo, en este caso del sólido rígido. Si tenemos en cuenta (3.83), podemos escribir: $d\vec{r}_+ - d\vec{r}_- = d\vec{\varphi} \times (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ y $\vec{F} \cdot (d\vec{r}_+ - d\vec{r}_-) = \vec{F} \cdot (d\vec{\varphi} \times (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)) = \left((\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F} \right) \cdot d\vec{\varphi}$. Obtenemos la expresión para el trabajo y la potencia hechos por un par aplicado a un sólido rígido:

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} ; \quad P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (3.98)$$

siendo $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ la velocidad angular del sólido.

Si el par tiene dirección constante \hat{u} , $\vec{M} = M\hat{u}$, y el sólido se mueve según el



mismo eje, $d\vec{\varphi} = d\varphi \hat{u}$, la expresión del trabajo W y la potencia P resultan:

$$W = \int_{\varphi_{\text{ini}}}^{\varphi_{\text{fi}}} M d\varphi ; P = M\omega \quad (3.99)$$

Si el par M solo depende de φ , podremos escribir la energía potencial asociada al par en la forma:

$$U = - \int M(\varphi) d\varphi \quad (3.100)$$

→ Si el par es constante, tenemos:

$$U = -M\varphi \quad (3.101)$$

→ Si el par tiene la forma $M = -\kappa\varphi$, como el caso del muelle de la figura 3.43, donde κ sería la constante de recuperación del muelle (unidades N m rad^{-1}), la energía potencial correspondiente resulta:

$$U = \frac{1}{2}\kappa\varphi^2 \quad (3.102)$$

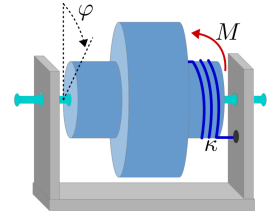


Fig. 3.43: El muelle de constante κ proporciona un par $M = -\kappa\varphi$ al sólido cuando se deforma un ángulo φ



→ 4

4 Estática de los sólidos rígidos

Introducción

En este capítulo, tratamos de la estática del sólido rígido. Veremos qué condiciones se tienen que dar para que el sólido esté en reposo. Empleando la equivalencia de los sistemas de fuerzas, aprenderemos a representar adecuadamente los sistemas de fuerzas más comunes que actúan sobre los sólidos (v. figura 4.1) y encontraremos, por anulación del momento resultante, los puntos en que hay que aplicar las resultantes.

Aplicaremos las ecuaciones de movimiento intercambiando lo que usualmente tomamos como datos e incógnitas. Los datos serán, además de algunas fuerzas, el movimiento del sólido, que ahora queremos que permanezca en reposo. También veremos qué consecuencias tiene la ecuación general de la dinámica en este caso: ecuación general de la estática o principio de los trabajos virtuales.

Si las ligaduras son ideales y las fuerzas son conservativas, veremos que el principio de los trabajos virtuales nos lleva a reducir el problema del equilibrio y la estabilidad de este equilibrio al estudio de la geometría de la función energía potencial.

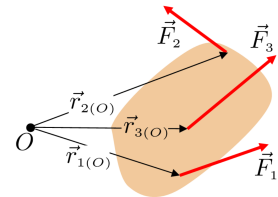


Fig. 4.1: Sólido sometido a fuerzas aplicadas en diferentes puntos

4.1 Estática del sólido: condiciones de equilibrio

Decimos que un sólido rígido está en equilibrio cuando las aceleraciones de traslación y rotación son nulas. Así, un sólido en reposo está en equilibrio, pero también un sólido que se mueve a una velocidad uniforme y/o que tiene una rotación uniforme. Lo que es importante es que, si las condiciones iniciales del sólido son de reposo y este está en equilibrio, permanecerá en reposo. Así como en los capítulos precedentes hemos planteado el problema dinámico mirando de averiguar qué efectos o movimiento causaban las fuerzas conocidas y, por consiguiente, el movimiento era nuestra incógnita, ahora lo que queremos saber es qué fuerzas causan un efecto conocido: la aceleración nula. Las fuerzas son ahora nuestra incógnita.



No todas, claro está. En general, se trata de encontrar las fuerzas no conocidas que, con las fuerzas conocidas y los condicionantes geométricos o ligaduras, hacen que el sólido esté en equilibrio.

Partiremos de las ecuaciones de movimiento de un sólido rígido (3.91, 3.92), que ya hemos visto en el capítulo 3. Si el sólido se encuentra en equilibrio, obtenemos:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 ; \quad \vec{M}_{(O)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(O)} \times \vec{F}_i = 0 \quad (4.1)$$

Podemos enunciar:

→ **Condición de equilibrio del sólido rígido.** La condición necesaria y suficiente para que un sólido rígido esté en equilibrio es que la resultante y el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre el sólido sean nulos.

Propiedades y relaciones

A continuación, veremos una serie de propiedades y relaciones que nos serán de utilidad.

→ a) El punto O respecto al cual calculamos los momentos en las ecuaciones de equilibrio (4.1) puede ser cualquier punto fijo del espacio.

Ello es consecuencia de las ecuaciones de movimiento del sólido, deducidas en la sección 3.11. Allí comentábamos que el punto C podía ser, en caso de existir, un punto fijo del sólido o, en general, el centro de masas. En el caso de la estática, el sólido está en reposo y, por consiguiente, C puede ser cualquier punto del sistema de referencia solidario con el sólido.

→ b) Las fuerzas sobre un sólido rígido son vectores deslizantes.

Esta propiedad se cumple tanto si el sólido está en equilibrio como si no, aunque en este último caso hay que precisar que se cumple para cada instante. Podemos hacer *deslizar* la fuerza por su recta de acción trasladando el punto de aplicación a otro punto cualquiera de esta recta, puesto que el momento respecto a un punto fijo O será el mismo (v. figura 4.2).

Demostración 1 Podemos hacer la demostración partiendo de la definición de momento de una fuerza

$$\vec{r}_{1(O)} \times \vec{F} = (\vec{r}_{1(O)} + \vec{r}_{2(O)} - \vec{r}_{2(O)}) \times \vec{F} = \vec{r}_{2(O)} \times \vec{F} + (\vec{r}_{1(O)} - \vec{r}_{2(O)}) \times \vec{F} = \vec{r}_{2(O)} \times \vec{F}$$

■

Demostración 2 Según hemos visto en el capítulo 2, podemos calcular el momento



utilizando la regla del tornillo y (2.11). En nuestro caso, sería:

$$M_{(O)} = F \overline{OF}$$

Como la fuerza \vec{F} , los puntos de aplicación sobre su recta de acción y el punto O están en un mismo plano, la dirección y el sentido del momento serán los mismos y el módulo solo dependerá de \overline{OF} , es decir, de la distancia entre el punto O y la recta de acción de \vec{F} , que es independiente del punto de aplicación de \vec{F} sobre esta recta (v. figura 4.2). ■

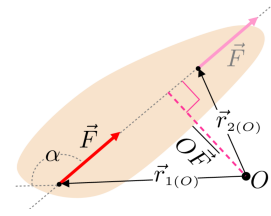


Fig. 4.2: Las fuerzas sobre un sólido rígido son vectores deslizantes

→ c) Si sobre un sólido en equilibrio actúan solo dos fuerzas, estas tienen que ser necesariamente de igual módulo y de sentido contrario, y tener la misma recta de acción (ver las figuras 4.3 y 4.4).

Demostración. Queremos que el sólido de la figura 4.3 esté en equilibrio. La resultante debe ser nula, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. El sistema de la figura 4.3 es, pues, un par. El momento resultante también se tendrá que anular. Según la expresión del momento de un par (3.97), la distancia entre las rectas de acción de las fuerzas, d , ha de ser cero. Es decir, las fuerzas del par tienen la recta de acción coincidente: el sistema de fuerzas de la figura 4.3 ha de ser como el de la figura 4.4. ■

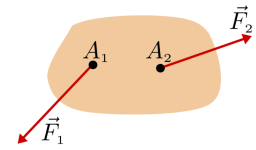


Fig. 4.3: \vec{F}_1 y \vec{F}_2 fuerzas no coincidas

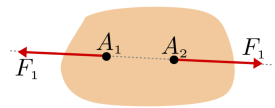


Fig. 4.4: Las condiciones de equilibrio imponen esta configuración para las fuerzas \vec{F}_1 v \vec{F}_2

Problema 4.1.1. Calcula la reacción en el punto C (fuerza y par) necesaria para que la esfera, de peso despreciable, se mantenga en equilibrio.

Solución

Denominamos \vec{C} la fuerza de reacción en el punto C sobre la esfera y M_C el par de reacción. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas respecto a los ejes de la figura son

$$\begin{aligned} F \sin \varphi + C_x &= 0 \\ -F \cos \varphi + C_y &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación de equilibrio para el momento, tomando momentos respecto al punto C (recordemos que podemos hacerlo respecto a cualquier punto):

$$M_C - F \sin \varphi 2R = 0$$

Encontramos así:

$$\vec{C} = -F \sin \varphi \hat{i} + F \cos \varphi \hat{j} \quad \vec{M}_C = 2RF \sin \varphi \hat{k}$$

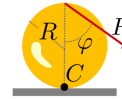
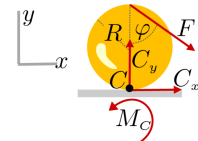


Figura del problema 4.1.1



Solución del problema 4.1.1

Problema 4.1.2. En la figura, se muestran las fuerzas aplicadas a un sólido rígido, de peso despreciable, que resulta estar en equilibrio. ¿Qué vale d ?

Solución

No nos es necesario calcular la fuerza F . Expresamos la condición de equilibrio de los momentos tomando momentos respecto al punto de aplicación de la fuerza F :

$$90(d - 6) - 50d = 0$$

y despejamos d :

$$d = 13,5 \text{ m}$$

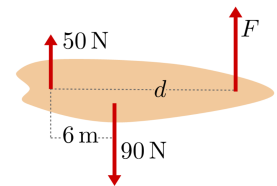


Figura del problema 4.1.2



4.2 Peso y centro de gravedad

El peso de un cuerpo es la fuerza que el campo gravitatorio de la Tierra ejerce sobre cada una de sus partículas (v. figura 4.5). Se considera la gravedad terrestre \vec{g} constante como consecuencia de las dimensiones relativamente pequeñas del cuerpo que se quiere tratar respecto a la Tierra. Si no decimos lo contrario, tomaremos el valor estándar $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

→ El momento de las fuerzas peso sobre un cuerpo respecto al CM es nulo.

Demostración. La posición del CM respecto a él mismo es, obviamente, cero, $\vec{r}_{CM(CM)} = 0$. Por tanto, $\frac{1}{m} \int \vec{r}_{(CM)} dm = 0$. Así, tenemos:

$$\vec{M}_{(CM)} = \int \vec{r}_{(CM)} \times d\vec{P} = \int \vec{r}_{(CM)} \times \vec{g} dm = \left(\int \vec{r}_{(CM)} dm \right) \times \vec{g} = 0$$

donde hemos utilizado que \vec{g} es constante al sacarla de la integral. ■

Esta importante propiedad del CM hace que, en este contexto, sea denominado **centro de gravedad, CG** , del cuerpo.

A efectos mecánicos, y según lo que sabemos de los sistemas de fuerzas equivalentes (v. final de la sección 3.11), podremos sustituir las fuerzas de cada una de las partes del cuerpo por la fuerza peso resultante aplicada en el CM o CG (v. figura 4.6). Esta fuerza peso tendrá la misma resultante y el mismo momento resultante (nulo) respecto al CM que el sistema de fuerzas peso, $d\vec{P} = \vec{g}dm$, de cada diferencial de masa, dm , del cuerpo. Recordemos que esta sustitución la podemos hacer porque el cuerpo es un sólido rígido.

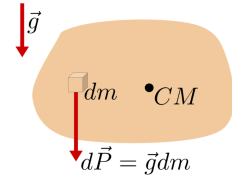


Fig. 4.5: El campo gravitatorio actúa sobre cada una de las partículas de un cuerpo

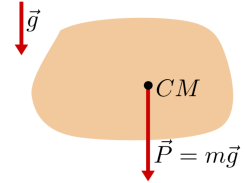


Fig. 4.6: Un sistema de fuerzas equivalentes muy sencillo es el del peso aplicado en el $CG = CM$

4.3 Fuerzas sobre sólidos debidas a fluidos gravitantes. Principio de Arquímedes

En este apartado, estudiamos las fuerzas que los fluidos ejercen sobre los sólidos y sus puntos de aplicación.

Consideramos un cuerpo sólido sumergido en un fluido (v. figura 4.7). Como en todo contacto, habrá fuerzas normales y tangentes. En una situación general, estática o no, si el fluido es no viscoso las diferentes capas del fluido se deslizan; se puede decir que no hay rozamiento ni entre las capas del fluido ni entre el fluido y el sólido. Observando la figura 4.8, aunque la superficie del sólido no sea lisa, la no viscosidad del fluido hace que no haya fuerza de fricción entre el sólido y el fluido. Por tanto, las fuerzas tangentes en el contacto son nulas y solo se tienen en cuenta las fuerzas normales, que actúan de forma distribuida por la superficie del contacto (v. figuras 4.8 y 4.9). Si la situación que tratamos es estática, a pesar de ser el fluido viscoso, las fuerzas de fricción viscosa (proporcionales a la velocidad) serán nulas y la fuerza sobre la superficie será normal.

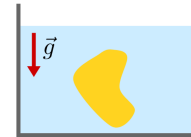


Fig. 4.7: Sólido sumergido en un fluido

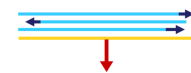


Fig. 4.8: Aunque la superficie del sólido sea áspera, si el fluido es no viscoso no provocará fuerzas tangentes



Concepto de presión

Definimos la **presión** p debida a un fluido como la fuerza normal por unidad de superficie que actúa sobre la superficie de un sólido sumergido en el fluido (v. figura 4.9)

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (4.2)$$

Si consideramos cubos cada vez más pequeños, vemos que el concepto de presión es independiente de la existencia de una superficie material. Dependerá de las características del fluido y del punto en que la queramos evaluar (v. figura 4.10).

En la figura 4.10, podemos decir que la presión donde se encuentra el cubo es p , también en el caso de que no esté el cubo.

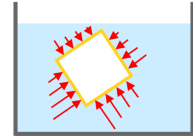


Fig. 4.9: Distribución de fuerzas normales sobre el sólido provocadas por el fluido gravitante

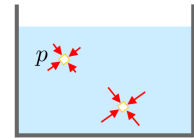


Fig. 4.10: Podemos hablar de presión aunque no haya ningún sólido sumergido

Unidades de presión

En el sistema internacional, la presión se mide en pascales (Pa):

→ $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

También son muy utilizadas otras unidades como:

→ milibares (mbar): $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa}$

→ atmósferas (atm): $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$

→ milímetros de mercurio (mmHg): $750 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$

Presión de un fluido en un campo gravitatorio uniforme

Consideramos un volumen diferencial de fluido en forma de cilindro vertical de base S y altura dz (v. figura 4.11). z es la **profundidad**, una coordenada que tiene la dirección y el sentido de \vec{g} con origen en el nivel del fluido. La fuerza que hace esta porción de fluido en la base del cilindro es igual al peso del fluido que hay dentro del cilindro.

$$dF = dm g = \rho S dz g$$

Por tanto:

$$dp = \rho g dz \quad (4.3)$$

Si el fluido es líquido, podremos considerarlo incompresible, es decir, su densidad ρ será constante en todo punto del líquido. Integrando la ecuación anterior, obtenemos la diferencia de presiones entre dos puntos que están a diferente altura o profundidad:

$$\Delta p = \rho g \Delta z \quad (4.4)$$

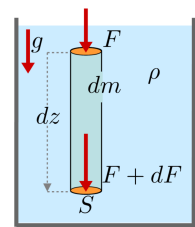


Fig. 4.11: Volumen diferencial de fluido en forma de cilindro vertical



En un fluido homogéneo ($\rho = \text{cte.}$), cerrado o no, los puntos de igual altura con respecto cualquier referencia tienen la misma presión. Las presiones a igual altura pueden ser diferentes cuando en el recipiente hay más de un fluido en contacto o, en general, cuando el fluido no es homogéneo.

Puesto que la densidad de un gas es mucho más pequeña que la de un líquido, la diferencia de presión entre dos puntos a diferente altura, en los gases será mucho menor que en los líquidos. Así, por ejemplo, si tenemos un recipiente donde coexisten líquidos y gases, las diferencias de presión en el caso de los gases será despreciable.

Problema 4.3.1. Llenamos una rama de un tubo en forma de U, abierto por los dos extremos, con agua y mercurio. Si la diferencia entre los niveles de mercurio es de $h_{\text{Hg}} = 2 \text{ cm}$, calcula la altura de la columna de agua h_{agua} .

Datos: $\rho_{\text{Hg}} = 13 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{\text{agua}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Solución

Como las diferencias de presión en el aire son despreciables respecto a las de los líquidos, los dos niveles B y B' en contacto con el aire tienen la misma presión. Los dos puntos A y A' conectados con el mercurio tienen la misma presión. Así, la presión provocada por la altura h_{Hg} del mercurio será igual a la provocada por la altura h_{agua} del agua:

$$\rho_{\text{Hg}} g h_{\text{Hg}} = \rho_{\text{agua}} g h_{\text{agua}}$$

despejando h_{agua} :

$$h_{\text{agua}} = \frac{\rho_{\text{Hg}} h_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{agua}}} = 26 \text{ cm}$$

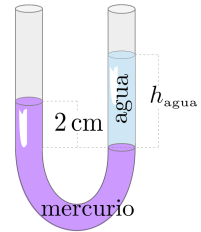
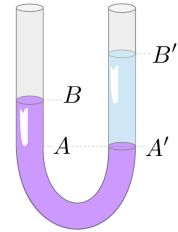


Figura del problema 4.3.1



Solución del problema 4.3.1

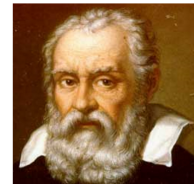


Fig. 4.12: Arquímedes de Siracusa (287 a. C.-212 a. C.)

Principio de Arquímedes

→ **Principio de Arquímedes.** Todo cuerpo sumergido en un fluido gravitante experimenta una fuerza de **empuje** vertical hacia arriba, E , igual al peso del líquido que desplaza:

$$E = P_{\text{fluido}} \tag{4.5}$$

El empuje E está aplicado en un punto, el **centro de empuje**, CE , situado en el centro de masas del fluido desplazado, CM_{fluido} .

$$CE = CM_{\text{fluido}} \tag{4.6}$$

Demostración. En la figura 4.13, se puede ver, a la derecha, un cuerpo medio sumergido un volumen V en un fluido y, a su izquierda, una superficie con la misma forma que el cuerpo original, que encierra una parte de fluido V igual a la desplazada por el cuerpo original. Como esta parte de fluido V está en equilibrio, el peso del

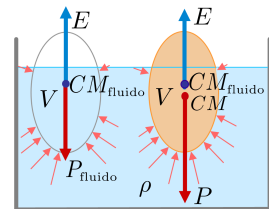


Fig. 4.13: A la derecha, la distribución de fuerzas que el fluido provoca sobre un sólido sumergido en un fluido. A la izquierda, la misma distribución actuaría sobre una superficie que tuviera la misma forma que el sólido de la derecha



fluido cerrado, P_{fluido} , será igual a la resultante de las fuerzas distribuidas debidas a la presión, es decir, al empuje E : $E = P_{\text{fluido}}$. Si, además, el fluido es incompresible, tendremos $E = \rho g V$.

Por el mismo razonamiento, el punto de aplicación de E será el centro de masas del fluido encerrado por la superficie (CM_{fluido}). Puesto que E aplicado en el CE es consecuencia exclusivamente de las fuerzas que el fluido ejerce sobre la superficie, será el mismo que recibirá el cuerpo original, de la misma forma que la superficie e igualmente sumergido, aunque su peso sea diferente. ■

Problema 4.3.2. En un recipiente que contiene agua de densidad $\rho_a = 1 \text{ g/cm}^3$ y aceite de densidad $\rho_{\text{ace}} = 0,8 \text{ g/cm}^3$, hay un cilindro, de $H = 15 \text{ cm}$ de altura y de densidad $\rho = 0,9 \text{ g/cm}^3$, que se encuentra flotando en equilibrio con su eje en posición vertical. Si vemos que el cilindro sobresale a una altura $z = 0,8 \text{ cm}$ por encima del nivel superior del aceite, calcula las alturas x y y del cilindro sumergido, respectivamente, en el agua y en el aceite.

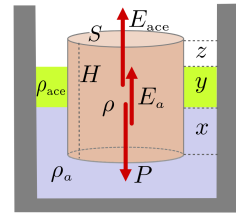


Figura del problema 4.3.2

Solución

La ecuación de equilibrio de fuerzas verticales es $E_{\text{ace}} + E_a - P = 0$, donde $E_{\text{ace}} = \rho_{\text{ace}} g S y$ es el empuje debido al aceite, $E_a = \rho_a g S x$ es el empuje debido al agua y $P = \rho g S H$ es el peso del cilindro. Se debe cumplir también $H = x + y + z$. Sustituyendo, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \rho_{\text{ace}} y + \rho_a x - \rho H = 0 \\ H = x + y + z \end{cases}$$

que, teniendo en cuenta los datos del enunciado, podemos resolver para x y y . Encontramos:

$x = 10,7 \text{ cm}$ y $y = 3,5 \text{ cm}$ ■

Fuerzas sobre superficies planas

Queremos calcular la resultante y el punto de aplicación de las fuerzas de un fluido incompresible sobre una superficie plana con un ángulo de inclinación cualquiera.

Observando las figuras 4.14 y 4.15, la fuerza dF que el fluido ejerce sobre la superficie ds es $dF = p dS$, con $p = \rho g z$. Si tenemos en cuenta que ρ y g son constantes, podemos escribir:

$$F = \rho g \int z ds \tag{4.7}$$

La profundidad z (v. figura 4.15) del centro de simetría CS , z_{CS} de la superficie es

$$z_{CS} = \frac{1}{S} \int z ds \tag{4.8}$$

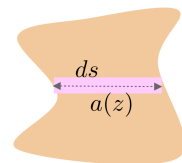


Fig. 4.14: Elemento de superficie ds horizontal, de anchura $a(z)$, de una superficie plana sumergida en un fluido

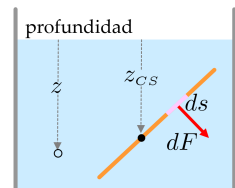


Fig. 4.15: Fuerza, dF , ejercida por el fluido sobre el elemento de superficie ds y profundidad del CS , z_{CS}



Así, sustituyendo la integral de (4.7) usando (4.8) obtenemos:

$$F = \rho g z_{CS} S \quad (4.9)$$

Por tanto, podremos calcular la fuerza resultante sobre una superficie plana multiplicando la presión en la profundidad z_{CS} por el área de la superficie plana.

Si la anchura de la superficie, a , es constante, $S = aL$, es sencillo calcular la profundidad z_{CS} de su centro de simetría (v. figura 4.16):

$$z_{CS} = z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$$

Sustituyendo en (4.9), obtenemos:

$$F = \rho g \frac{1}{2}(z_2 + z_1) aL \quad (4.10)$$

El punto de aplicación de la resultante, x_F (v. figura 4.17), lo encontraremos imponiendo (si es posible) que el momento total respecto a este punto sea nulo. Observando la figura 4.17, la condición de la nulidad del momento respecto a x_F la podemos expresar como:

$$\int (x - x_F) dF = 0 \quad (4.11)$$

donde, despejando x_F :

$$x_F = \frac{1}{F} \int x dF \quad (4.12)$$

Si tenemos en cuenta que estamos estudiando el caso $a = \text{cte.}$, $ds = adx$ y $dF = \rho g z dx$, (4.12) puede ser escrita, teniendo en cuenta también (4.10):

$$x_F = \frac{2}{L(z_2 + z_1)} \int x z dx \quad (4.13)$$

En la integral anterior, se mezclan dos variables, x y z , que no son independientes. La relación entre estas variables será lineal, $z = Ax + B$, y podemos encontrar las constantes A y B por las condiciones $x = 0 \Rightarrow z = z_2$ y $x = L \Rightarrow z = z_1$. Alternativamente, observando la figura 4.17, podemos expresar el seno del ángulo α como $\sin \alpha = \frac{z_2 - z_1}{L} = \frac{z_2 - z}{x}$. Encontramos:

$$z = z_2 - \frac{z_2 - z_1}{L} x \quad (4.14)$$

y, sustituyendo en (4.13) con los límites de integración para la variable x de $x = 0$ hasta $x = L$:

$$x_F = \frac{2}{L(z_2 + z_1)} \int_0^L x \left(z_2 - \frac{z_2 - z_1}{L} x \right) dx \quad (4.15)$$

Haciendo la integral, encontramos finalmente:

$$x_F = \frac{L(z_2 + 2z_1)}{3(z_2 + z_1)} \quad (4.16)$$

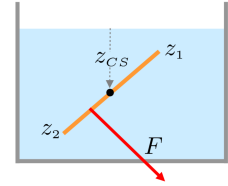


Fig. 4.16: Fuerza resultante, F , del fluido sobre la superficie de anchura constante horizontal y profundidad z_1 y z_2 de sus extremos

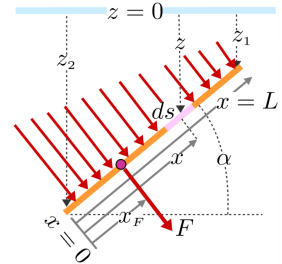


Fig. 4.17: Distribución de las fuerzas dF sobre cada elemento ds en función de la profundidad z y coordenada x que localiza cada uno de los ds de la superficie



Problema 4.3.3. Un recipiente de 1 m de anchura tiene una compuerta \overline{AB} de masa despreciable que se aguanta gracias a las fuerzas F_1 y F_2 perpendiculares a la compuerta, tal como indica la figura. Encuentra los valores mínimos de estas fuerzas que permiten que la compuerta esté en equilibrio.

Solución

La anchura es $a = 1$ m. Podemos encontrar \overline{AB} :

$$\overline{AB} = L = \frac{2}{\sin 30^\circ} 1 \text{ m}$$

Aplicando la expresión (4.9), con $z_1 = 0$ y $z_2 = 2$ m, obtenemos:

$$F_{\text{agua}} = 10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 39240 \text{ N}$$

El punto de aplicación lo encontramos con (4.16):

$$x_F = \frac{4 \cdot (2 + 2 \cdot 0) \cdot 1}{3(2 + 0)} = \frac{4}{3} \text{ m}$$

Ahora aplicamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos. Tengamos en cuenta que queremos los valores mínimos y, por consiguiente, las reacciones de los apoyos en los puntos A y B sobre la compuerta serán nulos. Los momentos, los calculamos respecto a B :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 : F_1 + F_2 - F_{\text{agua}} = 0 \\ \sum \vec{M}_{(B)i} = 0 : F_1 L - F_{\text{agua}} x_F = 0 \end{cases}$$

y solucionamos F_1 y F_2 :

$$F_1 = 13080 \text{ N} ; F_2 = 26160 \text{ N}$$

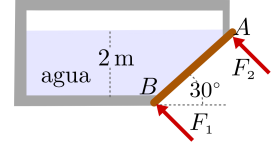
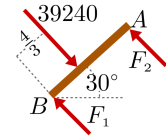


Figura del problema 4.3.3



Solución del problema 4.3.3

4.4 Ligaduras y fuerzas de reacción

Si el sólido en equilibrio presenta apoyos o, en general, ligaduras (cuerdas, contactos, rodillos, articulaciones...) y queremos resolver las ecuaciones de equilibrio, lo que hacemos es sustituir las ligaduras por fuerzas de reacción. Se denomina **diagrama del sólido libre** (DSL) el diagrama donde se representa el sólido y donde se han sustituido todas las ligaduras por las fuerzas de reacción correspondientes. Las reacciones son fuerzas externas, de entrada no conocidas. En la tabla de la página 346, se presenta una lista de posibles ligaduras para un sólido con las reacciones correspondientes.

4.5 Estática de N sólidos rígidos

Si tenemos N sólidos $i = 1, 2, 3, \dots$ sometidos cada uno de ellos a fuerzas externas y con posibles contactos entre ellos, podemos trazar el diagrama del sólido libre del

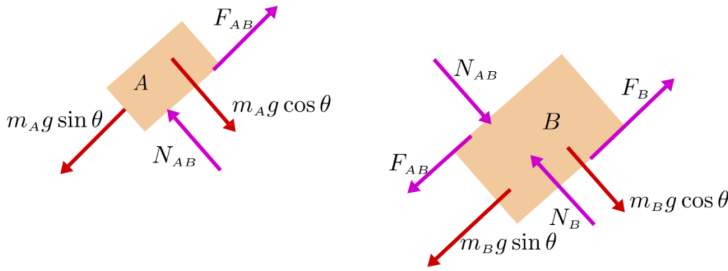


conjunto o para cada sólido por separado. En caso de querer representar el diagrama del sólido libre del conjunto de cuerpos, las fuerzas de contacto serían internas y se anularían dos a dos, con lo cual no las tendríamos que incluir ni en el diagrama ni en las ecuaciones de equilibrio (v. figura 4.18).

En caso de querer representar cada sólido por separado, las fuerzas de contacto serán fuerzas externas al sólido sobre el cual actúan. Las fuerzas de contacto cumplen la ley de acción y reacción $\vec{F}_{A(ji)} = -\vec{F}_{A(ij)}$, y tendrán sentidos opuestos si las aplicamos en un cuerpo o en el otro (v. figura 4.19).

Cada uno de los N sólidos cumplirá las ecuaciones de equilibrio $\vec{F}_i = 0$ y $\vec{M}_{i(P_i)} = 0$, que deben incluir las fuerzas de reacción.

Supongamos, en presencia de la gravedad, dos bloques de masas m_A y m_B , uno sobre el otro y sobre un plano inclinado de ángulo θ (v. figura 4.20). Cuando representamos las fuerzas en el diagrama del conjunto de los dos bloques sin el plano inclinado, dibujamos las fuerzas externas, como el peso del bloque A y del B , las fuerzas de contacto entre el plano y el bloque B , normal y tangente o fricción.



Si queremos representar el diagrama de cada bloque por separado, además de incluir las fuerzas comentadas anteriormente, deberemos añadir también las fuerzas de contacto entre A y B , normal y tangente o de fricción. Como se puede observar en la figura 4.21, tanto la normal como la de fricción entre el bloque A y el B tienen sentidos opuestos cuando se representan en el bloque A o en el B .

Problema 4.5.1. La barra de la figura, de 80 cm de longitud y 20 kg de masa, está articulada sin fricción en el punto fijo A . ¿Qué par (momento) debe hacer la manivela sobre la barra para aguantar el bloque de 100 kg y cuál es la fuerza que actúa sobre la barra en el punto A (dos componentes)?

Solución

El bloque de 100 kg ejerce una tensión sobre la cuerda de valor $P_1 = 100 \cdot 9,81 = 980\text{ N}$ y el peso de la barra $P_2 = 20 \cdot 9,81 = 196,2\text{ N}$ aplicado en el CM de la barra. Utilizamos las ecuaciones de equilibrio para la barra y tomamos los momentos

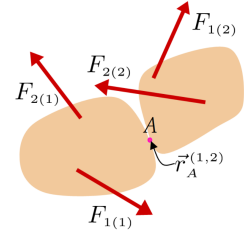


Fig. 4.18: Fuerzas externas $F_{i(1)}$ y $F_{i(2)}$ sobre los sólidos 1 y 2, respectivamente, que presentan un contacto en A

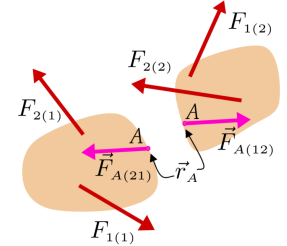


Fig. 4.19: Si hacemos el DSL de cada sólido, debemos incluir las fuerzas de reacción en el contacto A , $\vec{F}_{A(ji)} = -\vec{F}_{A(ij)}$

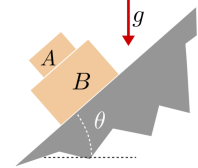


Fig. 4.20: Dos bloques, A y B , en contacto sobre un plano inclinado

Fig. 4.21: Diagramas del sólido libre (DSL), de los bloques A y B

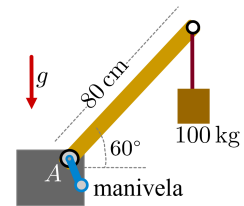


Figura del problema 4.5.1



respecto al punto A (v. figura):

$$x) A_x = 0$$

$$y) A_y - P_1 - P_2 = 0$$

$$A) M_A - P_1 0,8 \cos 60^\circ - P_2 0,4 \cos 60^\circ = 0$$

de donde obtenemos:

$$A_x = 0$$

$$A_y = 1177,2 \text{ N}$$

$$M_A = 431,64 \text{ N m}$$

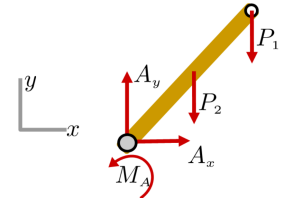


Figura de la solución 4.5.1

Problema 4.5.2. Las dos barras homogéneas tienen longitudes y masas diferentes. Las articulaciones A y B y la polea en D no presentan fricción. $\overline{CD} \gg \ell_1 + \ell_2$ y, por consiguiente, la cuerda \overline{CD} se mantiene siempre horizontal. Encuentra los ángulos α y β en la configuración de equilibrio del sistema utilizando las ecuaciones de equilibrio de los momentos.

Solución

Teniendo en cuenta el equilibrio del cuerpo que cuelga de la cuerda, la tensión de la cuerda es $T = m_3 g$.

Seremos cuidadosos al plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para el sistema formado por las dos barras, dado que no estamos interesados en encontrar las reacciones en las articulaciones A y B . Usaremos la ecuación de la nulidad de los momentos de manera adecuada. Si consideramos solo la barra \overline{BC} , la ecuación de la nulidad del momento respecto a B es:

$$m_3 g \ell_2 \cos \beta - m_2 g \frac{\ell_2}{2} \sin \beta = 0 \quad (1)$$

de donde encontramos $\tan \beta = \frac{2m_3}{m_2}$.

Si ahora consideramos las dos barras, la ecuación de la nulidad del momento respecto a A es:

$$m_3 g (\ell_2 \cos \beta + \ell_1 \cos \alpha) - m_2 g \left(\ell_1 \sin \alpha + \frac{\ell_2}{2} \sin \beta \right) - m_1 g \frac{\ell_1}{2} \sin \alpha = 0$$

que, teniendo en cuenta (1), queda:

$$m_3 \cos \alpha - m_2 \sin \alpha - m_1 \frac{1}{2} \sin \alpha = 0$$

y, despejando, encontramos $\tan \alpha = \frac{m_3}{\frac{m_1}{2} + m_2}$.

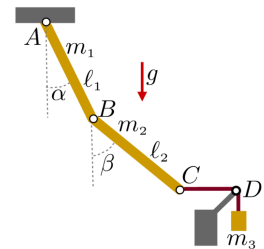


Figura del problema 4.5.2

4.6 Principio de los trabajos virtuales

Consideramos un sistema de sólidos sometidos a fuerzas directamente aplicadas conocidas, \vec{F}_a , que pueden incluir, por ejemplo, la gravedad o la fuerza de un muelle, y con ligaduras ideales, como el de la figura 4.22. Suponemos que conocemos las fuerzas directamente aplicadas \vec{F}_a . Esto quiere decir que conocemos estas fuerzas como función del punto donde se aplican. Si \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son el peso o una fuerza constante, conocer estas fuerzas es conocer el valor numérico del módulo (además de la dirección y el sentido). En el caso de \vec{F}_3 es conocerla como función del punto de aplicación \vec{r}_3 . Lo que consideramos incógnitas en este planteamiento es la configuración del sistema. En el caso de la figura (se trata de un sistema con dos grados de libertad), las incógnitas son los ángulos q_1 y q_2 de cada barra con la vertical. Podríamos encontrar la solución planteando las ecuaciones de la estática para dos cuerpos. Si lo hiciéramos así, nos aparecerían todas las fuerzas de reacción como nuevas incógnitas no pretendidas. Recordando que en la ecuación general de la dinámica no aparecen las fuerzas de reacción ideales, podemos utilizarla en nuestro planteamiento, es decir, en un caso de estática.

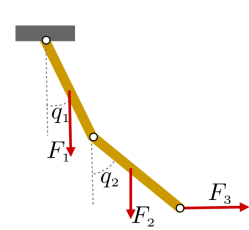


Fig. 4.22: Dos barras articuladas sometidas a las fuerzas directamente aplicadas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3

→ **Ecuación general de la estática.** La condición necesaria y suficiente para que un sistema de sólidos con ligaduras ideales esté en equilibrio, en una posición determinada, es que, para cualquier desplazamiento virtual desde esta posición, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas directamente aplicadas (las que no son reacciones de las ligaduras) sea nula:

$$\sum_{a=1} \vec{F}_a \cdot \delta \vec{r}_a = 0 \quad (4.17)$$

Demostración. Es inmediata. Partiendo de la ecuación general de la dinámica (3.64), teniendo en cuenta que en el equilibrio $\vec{a}_i = 0$, queda como (4.17).

Observamos que, en lugar de emplear el índice $i = 1 \dots N$, empleamos el índice a . Con esto queremos indicar que, al suprimir las aceleraciones, no es necesario contabilizar qué ocurre a todas las m_i y, como las fuerzas se aplican, en general, solo a unas pocas partículas, podemos emplear un índice a que numere tan solo estas fuerzas y las partículas sobre las cuales actúan, \vec{r}_a . ■

La expresión (4.17) se conoce habitualmente con el nombre de **principio de los trabajos virtuales** (PTV). En esta ecuación, se incluyen las fuerzas externas, por ejemplo los pesos aplicados sobre los *CM* de cada sólido, pero no las fuerzas de reacción ideales, como ya se ha comentado en la sección 3.9.

Si conocemos las ligaduras, podremos saber los movimientos posibles y, por consiguiente, los grados de libertad L del sistema. El número de grados de libertad será igual al número de parámetros o variables independientes. Así, por ejemplo, si nos



fijamos en el problema 4.6.2 de la página 133, como se trata de un conjunto de dos barras articuladas con un extremo fijado, el sistema tiene dos grados de libertad y, por consiguiente, podemos dar su posición con los valores de los dos ángulos α y β , que serán los parámetros o variables que debemos tener en cuenta en la ecuación.

Si el sistema tiene L parámetros independientes q_i , con $i = 1 \dots L$, y conocemos las ligaduras en la forma $\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, q_2, \dots)$, la expresión de los desplazamientos virtuales será

$$\delta \vec{r}_a = d\vec{r}_a = \sum_{i=1}^L \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} dq_i$$

Aplicándolo a la ecuación (4.17) del PTV, obtenemos L ecuaciones de equilibrio, tantas como incógnitas q_i .

$$\sum_{a=1}^L \vec{F}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = 0 \quad (4.18)$$

Las soluciones $q_i = q_{eq_i}$ son las posiciones de equilibrio del sistema.

Problema 4.6.1. Si el sistema de la figura está en equilibrio, determina la relación entre las fuerzas F y P en función del ángulo θ de equilibrio.

Solución

El sistema es conservativo porque las fuerzas \vec{P} y \vec{F} son constantes y porque las ligaduras tienen reacciones ideales. Así, el PTV se expresa:

$$\vec{P} \cdot d\vec{r}_P + \vec{F} \cdot d\vec{r}_F = 0 \quad (1)$$

donde $d\vec{r}_P$ y $d\vec{r}_F$ son los desplazamientos virtuales de los puntos de aplicación de las fuerzas $\vec{P} = (0, -P)$ y $\vec{F} = (-F, 0)$.

El sistema tiene un único grado de libertad, expresado por el parámetro ángulo θ . Observando la figura y teniendo en cuenta los ejes escogidos, $\vec{r}_P = (L \cos \theta, L \sin \theta)$ y $\vec{r}_F = (2L \cos \theta, 0)$. Diferenciando, obtenemos los desplazamientos posibles:

$$d\vec{r}_P = (-L \sin \theta, L \cos \theta) d\theta$$

$$d\vec{r}_F = (-2L \sin \theta, 0) d\theta$$

Sustituyendo las fuerzas y los desplazamientos en (1), tenemos

$(-PL \cos \theta + F2L \sin \theta)d\theta = 0$ y, como $d\theta$ es un desplazamiento cualquiera:

$$-PL \cos \theta + F2L \sin \theta = 0$$

de donde, despejando, obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{P}{2F}$$

■

Problema 4.6.2. Las dos barras homogéneas tienen longitudes y masas diferentes. Las articulaciones A y B y la polea en D no presentan fricción. $CD \gg \ell_1 + \ell_2$

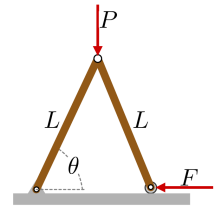
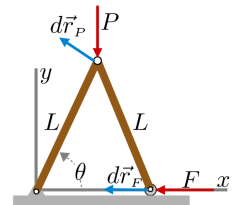


Figura del problema 4.6.1



Solución del problema 4.6.1



y, por consiguiente, la cuerda \overline{CD} se mantiene siempre horizontal. Encuentra los ángulos α y β en la configuración de equilibrio del sistema utilizando el principio de los trabajos virtuales.

Solución

Teniendo en cuenta el equilibrio del cuerpo que cuelga de la cuerda, la tensión de la cuerda es $T = m_3 g$.

Utilizamos un sistema de ejes (x, y) de forma que el origen está en el punto A , el eje x es horizontal y crece hacia la derecha y y es vertical y crece hacia abajo.

La expresión del PVT será $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{T}_3 \cdot d\vec{r}_3 = 0$ que, explicitando $\vec{F}_1 = (0, m_1 g)$, $\vec{F}_2 = (0, m_2 g)$ y $\vec{T} = (m_3 g, 0)$, resulta:

$$m_1 dy_1 + m_2 dy_2 + m_3 dx_3 = 0 \quad (1)$$

donde ya hemos eliminado la g de la expresión. Los desplazamientos $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ y $d\vec{r}_3$ no son independientes, sino que dependen de los dos ángulos α y β :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\ell_1}{2} \cos \alpha \Rightarrow dy_1 = -\frac{\ell_1}{2} \sin \alpha d\alpha \\ y_2 &= \ell_1 \cos \alpha + \frac{\ell_2}{2} \cos \beta \Rightarrow dy_2 = -\ell_1 \sin \alpha d\alpha - \frac{\ell_2}{2} \sin \beta d\beta \\ x_3 &= \ell_1 \sin \alpha + \ell_2 \sin \beta \Rightarrow dx_3 = \ell_1 \cos \alpha d\alpha + \ell_2 \cos \beta d\beta \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} -m_1 \frac{\ell_1}{2} \sin \alpha d\alpha + m_2 \left(-\ell_1 \sin \alpha d\alpha - \frac{\ell_2}{2} \sin \beta d\beta \right) \\ + m_3 (\ell_1 \cos \alpha d\alpha + \ell_2 \cos \beta d\beta) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Si ahora tenemos en cuenta que $d\alpha$ y $d\beta$ son desplazamientos independientes, podemos considerar (2) con $d\alpha \neq 0$ y $d\beta = 0$:

$$-m_1 \frac{1}{2} \sin \alpha - m_2 \sin \alpha + m_3 \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

y también $d\alpha = 0$ y $d\beta \neq 0$

$$-m_2 \frac{1}{2} \sin \beta + m_3 \cos \beta = 0 \quad (4)$$

De (3) y (4), obtenemos $\tan \alpha = \frac{m_3}{\frac{m_1}{2} + m_2}$ y $\tan \beta = \frac{2m_3}{m_2}$, resultado ya obtenido en el problema 4.5.2 utilizando las ecuaciones de equilibrio de los momentos. ■

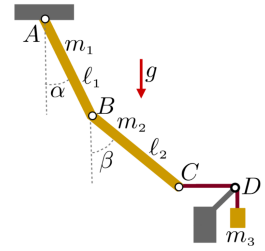


Figura del problema 4.6.2

4.7 Equilibrio y estabilidad de sistemas conservativos

Equilibrio

Consideramos ahora que tenemos un sistema conservativo, esto es, con las mismas condiciones que el de la sección anterior y, además, todas las fuerzas directamente



aplicadas \vec{F}_a son conservativas, es decir, cada fuerza tiene asociada una energía potencial y, por consiguiente:

$$\sum_{a=1} \vec{F}_a \cdot d\vec{r}_a = -dU$$

donde U es la energía potencial del sistema. El PTV se puede escribir ahora:

$$dU = 0 \tag{4.19}$$

Explicitando, las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir como una condición geométrica sobre la función potencial:

→ La posición de equilibrio $q_{eq} = \{q_{eq1}, q_{eq2} \dots q_{eqL}\}$ de un sistema conservativo corresponde al punto donde la energía potencial es extremal:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_{eq}} = 0 \quad i = 1 \dots L \tag{4.20}$$

Estabilidad

Si el sistema está en la posición de equilibrio q_{eq} , con $E_c = 0$, su energía es $E = U_{ext}$, donde $_{ext}$ quiere decir extremal. Si le damos energía cinética $E_{c\ ini}$, que siempre es positiva, el sistema se moverá con energía mecánica $E = U_{ext} + E_{c\ ini} = \text{constante}$.

En las figuras 4.23 y 4.24, podemos ver las gráficas de la energía potencial (azul) y mecánica (rosa) alrededor de un extremal para un sistema cualquiera. Se podría tratar de una montaña rusa. En este caso, la forma de la guía coincide con la forma de la función potencial.

Según como sea el tipo de extremal de la posición q_{eq} de equilibrio, podemos decir:

→ q_{eq} es una posición de equilibrio estable. Cuando $U(q_{eq})$ es un mínimo, tenemos que $U > U_{min}$. Como $E = U_{min} + E_{c\ ini} = \text{constante}$ y el sistema no se puede alejar mucho de la posición q_{eq} , puede llegar hasta que $E_c = 0$.

→ q_{eq} es una posición de equilibrio inestable. Cuando $U(q_{eq})$ es un máximo o un punto de inflexión. Si es un máximo, tenemos que $U < U_{máx}$. Como $E = U_{máx} + E_{c\ ini} = \text{constante}$, el sistema se aleja mucho de la posición q_{eq} , $E_c \neq 0$ y va creciendo. Si es un punto de inflexión y va hacia la zona $U > U_{inf}$, se comporta como en el caso de un mínimo, llega al punto $E_c = 0$ y vuelve yendo a parar a la zona $U < U_{inf}$, y le pasa lo mismo que en el caso del máximo: $E_c \neq 0$ y va creciendo.

→ q_{eq} es una posición de equilibrio indiferente. Cuando en un entorno finito de q_{eq} , U es constante.

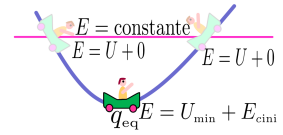


Fig. 4.23: La vagoneta está situada en un mínimo de la montaña rusa. Si la empujamos poco, es decir, si le damos un poco de $E_{c\ ini}$, la energía mecánica será $E = U_{min} + E_{c\ ini}$ y será constante. La vagoneta se moverá alrededor del mínimo entre las dos posiciones en que $E = U$ puesto que, más allá, tendría que ser $E_c < 0$ para cumplir $E = \text{constante}$, y esto no puede ser

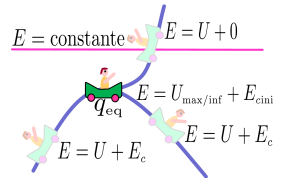


Fig. 4.24: La vagoneta está situada en un máximo o un punto de inflexión de la montaña rusa. Si empujamos poco, es decir, si le damos un poco de $E_{c\ ini}$, la energía mecánica será $E = U_{máx/inf} + E_{c\ ini}$. Si es un máximo, irá aumentando la E_c , pues estará en una zona donde $U < U_{máx}$ y debe cumplirse $E = \text{constante}$. Si es un punto de inflexión y va hacia la zona donde $U > U_{inf}$, no podrá ir más allá de $E = U$, es decir, $E_c = 0$ y volverá hacia abajo aumentando, ahora si, su E_c .



Para un sistema de un solo grado de libertad q , $q = q_{eq}$, la condición de equilibrio (4.20) se reduce a:

$$\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_{eq}} = 0 \quad (4.21)$$

Para estudiar la estabilidad de la posición q_{eq} , analizamos la segunda derivada en el punto $q = q_{eq}$.

→ Si pasa que

$$\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_{eq}} > 0 \quad (4.22)$$

entonces $q = q_{eq}$ es un punto de equilibrio estable.

→ Si pasa que

$$\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_{eq}} < 0 \quad (4.23)$$

entonces $q = q_{eq}$ es un punto de equilibrio inestable.

→ Si pasa que

$$\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_{eq}} = 0 \quad (4.24)$$

deberemos examinar el signo de las derivadas de orden superior:

→ **El equilibrio es estable** si el orden de la primera derivada no nula es par y su signo es positivo.

→ **El equilibrio es indiferente** si todas las derivadas sucesivas son nulas.

→ **El equilibrio es inestable** en todos los demás casos.

Problema 4.7.1. Las dos barras homogéneas tienen longitudes y masas diferentes. Las articulaciones A y B y la polea en D no presentan fricción. $\overline{CD} \gg \ell_1 + \ell_2$ y, por consiguiente, la cuerda \overline{CD} se mantiene siempre horizontal. Encuentra los ángulos α y β en la configuración de equilibrio del sistema utilizando que el sistema es conservativo.

Solución

La energía potencial del sistema en función de los dos grados de libertad, los ángulos α y β , es:

$$U = -m_1 g \frac{\ell_1}{2} \cos \alpha - m_2 g \left(\ell_1 \cos \alpha + \frac{\ell_2}{2} \cos \beta \right) - m_3 g (\ell_1 \sin \alpha + \ell_2 \sin \beta) \quad (1)$$

Las dos ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \sin \alpha + m_2 \sin \alpha - m_3 \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \sin \beta - m_3 \cos \beta = 0 \end{aligned}$$

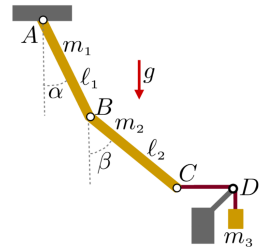


Figura del problema 4.7.1



de donde obtenemos $\tan \alpha = \frac{m_3}{\frac{m_1}{2} + m_2}$ y $\tan \beta = \frac{2m_3}{m_2}$, resultado ya obtenido en los problemas 4.5.2 y 4.6.2 por otros métodos. ■

Problema 4.7.2. En el sistema de la figura, las barras tienen una masa despreciable. Ni las articulaciones A y B ni el carrete C , de masa despreciable, presentan fricción. El muelle, de masa despreciable, tiene la constante recuperadora k y la longitud natural $L_k = 0,6$ m. De la articulación A cuelga un bloque de masa $m = 75$ kg. Encuentra el valor de k que hace que el ángulo θ de equilibrio sea $\theta_{eq} = 35^\circ$. **Otros datos:** $L = 1,2$ m, $L_0 = 0,85$ m

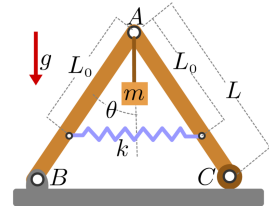


Figura del problema 4.7.2

Solución

La energía potencial del sistema es:

$$U(\theta) = mgL \cos \theta + \frac{1}{2}k(2L_0 \sin \theta - L_k)^2$$

y la condición de equilibrio:

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = -mgL \sin \theta + k(2L_0 \sin \theta - L_k)2L_0 \cos \theta = 0$$

La constante del muelle k debe cumplir esta condición para el ángulo $\theta_{eq} = 35^\circ$.

Obtenemos:

$$k = \frac{mgL \tan \theta_{eq}}{2L_0(2L_0 \sin \theta_{eq} - L_k)} = 969,54 \text{ N/m} \quad \blacksquare$$

Problema 4.7.3. La barra homogénea de longitud L y masa m se puede deslizar sin fricción. El muelle está relajado cuando $\theta = 90^\circ$. ¿Qué valor debe tener la constante de recuperación k del muelle de forma que $\theta = 45^\circ$ sea una posición de equilibrio?

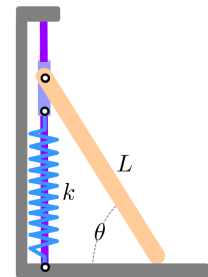


Figura del problema 4.7.3

Solución

La energía potencial del sistema es:

$$U(\theta) = mg \frac{L}{2} \sin \theta + \frac{1}{2}k(L - L \sin \theta)^2$$

y la condición de equilibrio:

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = mg \frac{L}{2} \cos \theta - kL^2(1 - \sin \theta) \cos \theta$$

La constante del muelle k debe cumplir esta condición para el ángulo $\theta_{eq} = 45^\circ$:

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0$$

Obtenemos:

$$k = \frac{mg}{2L \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \blacksquare$$

→ 5

5 Dinámica del sólido rígido en el plano

Introducción

Un sólido rígido efectúa un movimiento plano si la dirección del eje de rotación se mantiene constante. Toda partícula del sólido efectúa el movimiento en un plano normal al eje de rotación. De todos estos planos, el que contiene el centro de masas del sólido se denomina *plano del movimiento* (v. figura 5.1).

De acuerdo con esta definición, en el movimiento plano del sólido rígido los vectores velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$ serán, en todo momento, paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento. El movimiento de un sólido rígido se desarrolla en un plano porque:

a) Hay ligaduras externas que lo obligan a moverse en un plano.

Ejemplo 1: Una polea que gira alrededor de un eje fijo (v. figura 5.2).

Ejemplo 2: Una chapa plana que se mueve sobre un plano (v. figura 5.3).

b) El sólido tiene simetría plana, las fuerzas exteriores están en el plano de simetría del sólido y las velocidades iniciales, también.

Ejemplo 3: Una chapa plana, lanzada en un plano vertical que coincide con su propio plano (v. figura 5.4).

Ejemplo 4: Una esfera homogénea que baja por un plano inclinado partiendo del reposo (v. figura 5.5).

c) Las fuerzas exteriores al sólido son equivalentes a una resultante que pasa por el CM y un momento resultante nulo o en la dirección del eje del sólido. La rotación inicial del sólido tiene la dirección de ese mismo eje.

Ejemplo 5: Un disco lanzado con rotación inicial según el eje del disco, en pre-

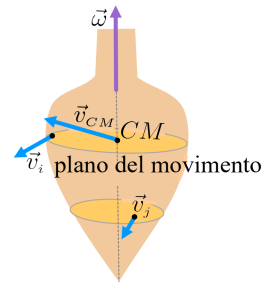


Fig. 5.1: Movimiento de un sólido rígido en un plano

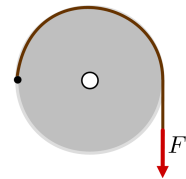


Fig. 5.2: Sólido rígido que gira en torno a un eje fijo

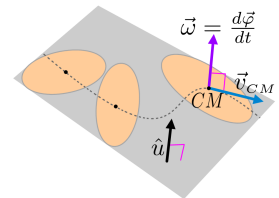


Fig. 5.3: Chapa plana en movimiento sobre un plano

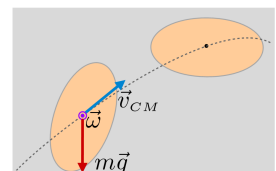


Fig. 5.4: Chapa plana en movimiento en un plano vertical

sencia de la gravedad. El CM efectúa una parábola y la dirección de rotación es constante. (v. figura 5.6).

Ejemplo 6: En presencia de la gravedad, una peonza gira según un eje vertical que pasa por el CM y por el vértice de contacto con el suelo. La resultante y el momento resultante son nulos. El CM efectuará un movimiento uniforme y la dirección de rotación será constante (v. figura 5.1).

En todos estos casos, y de acuerdo con lo que se ha visto en la sección 3.11, los desplazamientos posibles de las partículas del sólido rígido serán un subconjunto de:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{i(C)} \quad (5.1)$$

La restricción que tenemos que imponer es mantener constante el eje de rotación. Si \hat{u} es el vector unitario y constante en la dirección del eje de rotación, los desplazamientos posibles de rotación pasarán de tres grados de libertad, representados por el carácter vectorial de $d\vec{\varphi}$, a un grado de libertad, representado por $d\varphi$, según:

$$d\vec{\varphi} = \hat{u} d\varphi \quad (5.2)$$

En este curso, trataremos exclusivamente los movimientos del sólido rígido en un plano. Las relaciones válidas en general las indicaremos con **3D** y las que solo sean válidas para movimientos planos las indicaremos con **2D**. En este tema, se utilizará la nomenclatura del sistema de partículas que se ha visto en el capítulo 3, teniendo en cuenta que, para cuerpos continuos las expresiones en forma de sumatorios se convierten en integrales extendidas a todo el cuerpo (expresión (3.1) de la introducción del capítulo 3).

5.1 Ecuación de traslación 3D

De acuerdo con la ecuación (3.91) de la sección 3.13, la ecuación de movimiento del sólido rígido asociada a las traslaciones es:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM} \quad (5.3)$$

donde \vec{F} es la resultante de las fuerzas exteriores al sólido. La ecuación de movimiento de traslación del sólido será la del movimiento del CM (v. figura 5.7).

5.2 Ecuación de rotación para el movimiento plano (2D). Momento de inercia

Siendo el movimiento en un plano, la rotación del sólido rígido queda reducida a una sola componente en la dirección del vector velocidad angular de rotación $\vec{\omega}$,

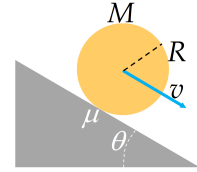


Fig. 5.5: Esfera en movimiento sobre un plano inclinado

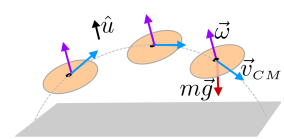


Fig. 5.6: Un disco mantiene la dirección de rotación mientras el CM traza una parábola

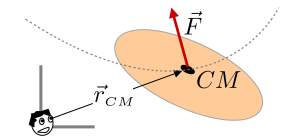


Fig. 5.7: Dinámica de traslación del sólido



que es una dirección fija del espacio \hat{u} y es perpendicular al plano del movimiento. En la sección 3.13, se ha deducido la ecuación general de la dinámica de rotación del sólido rígido:

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \quad (5.4)$$

con

$$\vec{L}_{(C)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_i \quad (5.5)$$

$$\vec{M}_{(C)} = \sum_a \vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a \quad (5.6)$$

donde C puede ser o bien el centro de masa, CM , o un punto fijo del sólido, si existe, y $\vec{r}_{a(C)}$ es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza exterior al sólido \vec{F}_a respecto a C . La ecuación de rotación del sólido en su movimiento plano se puede obtener proyectando la ecuación vectorial (5.4) sobre la dirección de su eje de rotación, definido por su vector \hat{u} . Esto es así porque la velocidad angular se podrá escribir como $\vec{\omega} = \omega \hat{u}$, donde ω es la componente del vector $\vec{\omega}$ en la dirección \hat{u} . ω es el único grado de libertad de rotación que tiene el sólido. En términos de los desplazamientos posibles, tenemos $d\vec{\varphi} = d\varphi \hat{u}$. Ahora, teniendo en cuenta la ecuación general de la dinámica para las rotaciones, ecuación (3.94), obtenemos, para las rotaciones con eje fijo, $d\vec{\varphi} = d\varphi \hat{u}$:

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} \cdot \hat{u} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} \quad (5.7)$$

Puesto que \hat{u} es un vector constante, (5.7) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\frac{dL_{(C)}}{dt} = M_{(C)} \quad (5.8)$$

donde:

$$L_{(C)} = \vec{L}_{(C)} \cdot \hat{u} = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{u} \quad (5.9)$$

$$M_{(C)} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} = \left(\sum_a \vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a \right) \cdot \hat{u} \quad (5.10)$$

son, respectivamente, el **momento angular** y el **momento de las fuerzas respecto al eje de rotación fijo** \hat{u} que pasa por C .

Según (3.84), con $\vec{\omega} = \omega \hat{u}$, tenemos:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \omega \hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}$$

y, sustituyendo en $L_{(C)}$ de (5.9), queda:

$$L_{(C)} = \left(\sum_i \vec{r}_{i(C)} \times m_i [\vec{v}_C + \omega \hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}] \right) \cdot \hat{u}$$



y desarrollando:

$$L_{(C)} = \left(\sum_i \vec{r}_{i(C)} \times m_i \vec{v}_C \right) \cdot \hat{u} + \left(\sum_i m_i \vec{r}_{i(C)} \times [\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}] \right) \cdot \omega \hat{u}$$

El primer término de la derecha es nulo si C es el CM , puesto que $\sum m_i \vec{r}_{i(CM)} = m \vec{r}_{CM(CM)} = 0$, o un **punto fijo** del sólido rígido, puesto que $\vec{v}_C = 0$. En estas condiciones:

$$L_{(C)} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_{i(C)} \times [\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}] \right) \cdot \omega \hat{u}$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (5.11)$$

extraída de (1.13), $L_{(C)}$ puede ser expresado como:

$$L_{(C)} = \vec{L}_{(C)} \cdot \hat{u} = \sum_{i=1}^N m_i r_{i(C)}^2 \omega$$

donde $r_{i(C)} = |\hat{u} \times \vec{r}_{i(C)}|$ es la distancia entre la partícula m_i y el eje \hat{u} que pasa por C (v. figura 5.8).

→ Definimos el **momento de inercia del sólido respecto al eje de rotación que pasa por C**

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^N m_i r_{i(C)}^2 \quad (5.12)$$

Podemos escribir el momento angular respecto al eje que pasa por C como:

$$L_{(C)} = I_{(C)} \omega \quad (5.13)$$

de forma que la ecuación del sólido para las rotaciones planas queda:

$$\frac{dL_{(C)}}{dt} = M_{(C)} \quad (5.14)$$

En el caso más general, las fuerzas externas al sólido, \vec{F}_a , pueden tener cualquier dirección, pero solo las componentes normales al eje contribuirán al momento en la dirección del eje. Aquí ya supondremos que las fuerzas \vec{F}_a que intervienen en la expresión del momento son normales al eje. De acuerdo con la relación (5.11), M_C se puede expresar de la forma:

$$M_{(C)} = \vec{M}_{(C)} \cdot \hat{u} = \sum_a (\vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a) \cdot \hat{u} = \sum_a (\hat{u} \times \vec{r}_{a(C)}) \cdot \vec{F}_a$$

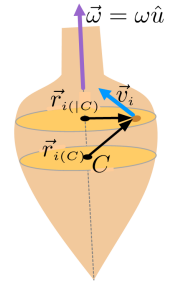


Fig. 5.8: Velocidad de una partícula cualquiera del sólido rígido en su movimiento plano



puesto que (v. figura 5.9) $\hat{u} \times \vec{r}_{a(C)} = \hat{u} \times \vec{r}_{a(C)}$, $M_{(C)}$ se puede escribir:

$$M_{(C)} = \sum_a (\hat{u} \times \vec{r}_{a(C)}) \cdot \vec{F}_a$$

Aplicando de nuevo (5.11), resulta:

$$M_{(C)} = \sum_a \left(\vec{r}_{a(C)} \times \vec{F}_a \right) \cdot \hat{u} = \sum_a F_a d_a \quad (5.15)$$

donde d_a es la distancia de la recta de acción de \vec{F}_a respecto al eje de rotación C .

Un aspecto que debemos destacar es que $I_{(C)}$ es invariante por traslaciones y rotaciones planas del cuerpo, es decir, no cambia de valor por el hecho de que el cuerpo haga traslaciones o rotaciones planas. Es una característica intrínseca del cuerpo respecto al eje de rotación que pasa por C (siendo C un punto fijo o bien el CM). $I_{(C)}$ podría variar si cambiara la forma del cuerpo, es decir, si el cuerpo dejara de ser rígido.

Por tanto, en el caso de un sólido rígido, el momento de inercia respecto a un eje $I_{(C)}$ no cambia con el tiempo y la ecuación fundamental de la rotación para un sólido en movimiento plano (5.14) se puede escribir de la forma:

$$M_{(C)} = I_{(C)} \alpha \quad (5.16)$$

donde $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ es la aceleración angular. La expresión (5.16) tiene una gran analogía con la ecuación fundamental de la dinámica de traslación $\vec{F} = m\vec{a}$: si la masa m (inercial) se puede entender como la medida de la tendencia a mantener la velocidad de traslación, el momento de inercia $I_{(C)}$ se puede entender como la medida de la tendencia a mantener la velocidad angular de rotación.

Algunos momentos de inercia con respecto a un eje de cuerpos homogéneos

En la tabla de la página 347, se muestran los momentos de inercia de sólidos rígidos homogéneos más conocidos, con respecto a los ejes que se indican y que pasan por su centro de masas.

Algunas propiedades de los momentos de inercia con respecto a un eje

El momento de inercia de un sólido rígido con respecto a un eje presenta, entre otras, dos propiedades importantes:

→ **Superposición de momentos de inercia:** Si tenemos dos cuerpos 1 y 2 con momentos de inercia con respecto al mismo eje que pasa por C , $I_{(C)1}$ y $I_{(C)2}$, el mo-

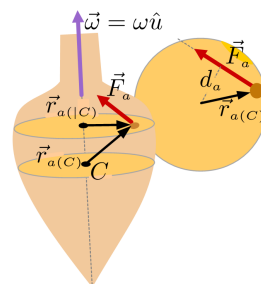


Fig. 5.9: Una fuerza externa \vec{F}_a que actúa sobre un sólido rígido

mento de inercia, $I_{(C)}$, del cuerpo compuesto es:

$$I_{(C)} = I_{(C)1} + I_{(C)2} \quad (5.17)$$

Esta teorema se deduce fácilmente de la definición de momento de inercia con respecto a un eje como sumatorio o integral sobre el cuerpo. Como en el caso del centro de masas de cuerpos compuestos (v. ecuación (3.7)), podremos también descomponer un cuerpo en cuerpos simples (de momento de inercia con respecto al eje requerido conocido) y encontrar el momento de inercia del cuerpo compuesto con (5.17). Podremos, de nuevo, considerar cuerpos con agujeros simplemente interpretando que la suma de (5.17) significa añadir masa. Si queremos sacar masa, deberemos restar.

→ **Teorema de Steiner:** Si un sólido rígido tiene momentos de inercia $I_{(C)}$ e $I_{(CM)}$ con respecto a dos ejes paralelos que pasan, respectivamente, por C y CM , entonces:

$$I_{(C)} = I_{(CM)} + md^2 \quad (5.18)$$

donde m es la masa del sólido y d es la distancia entre ambos ejes.

Demostración. Los momentos de inercia $I_{(C)}$ e $I_{(CM)}$ del sólido con respecto a dos ejes paralelos que pasan, respectivamente, por un punto C y por el centro de masas CM (v. figura 5.10) se expresan en la forma:

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^N m_i r_{i(C)}^2$$

$$I_{(CM)} = \sum_{i=1}^N m_i r_{i(CM)}^2$$

Observando la figura 5.10, si $x_{i(CM)}$ y $y_{i(CM)}$ son las coordenadas de una partícula del sólido de masa m_i con respecto a CM y $x_{i(C)}$ y $y_{i(C)}$ son las coordenadas de la misma partícula con respecto a C , tenemos que $x_{i(C)} = x_{i(CM)}$ y $y_{i(C)} = y_{i(CM)} + d$. Así:

$$r_{i(C)}^2 = x_{i(C)}^2 + y_{i(C)}^2 = x_{i(CM)}^2 + (y_{i(CM)} + d)^2$$

En estas condiciones, $I_{(C)}$ se puede escribir de la forma:

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i(CM)}^2 + (y_{i(CM)} + d)^2)$$

es decir:

$$I_{(C)} = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i(CM)}^2 + y_{i(CM)}^2) + 2 \left(\sum_{i=1}^N m_i y_{i(CM)} \right) d + \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) d^2$$

Ahora solo debemos tener en cuenta que, en virtud de la definición de centro de masas,

$$\sum_{i=1}^N m_i y_{i(CM)} = 0. \text{ Los dos términos que no se anulan son } I_{(CM)} \text{ y } md^2. \quad \blacksquare$$

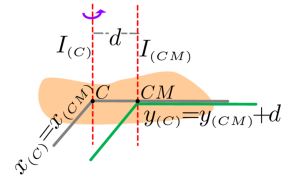


Fig. 5.10: Teorema de Steiner



Problema 5.2.1. Una rueda de radio R , masa m y momento de inercia I tiene un eje de radio $|x|$ y se somete a una fuerza horizontal constante F que actúa mediante una cuerda enrollada y fijada en el eje. Tal como se ve en la figura, utilizamos $x > 0$ para indicar que la fuerza constante F se aplica por encima del centro y $x < 0$ para indicar que se aplica por debajo. Calcula la aceleración de la rueda (sin olvidar el sentido de giro) y la fuerza de fricción necesaria (también con el sentido) en función de x , si la rueda se mueve rodando sin deslizar.

Solución

Se analiza la situación en que la fuerza F se aplica por encima del centro ($x > 0$). Los resultados serán también válidos para $x < 0$.

De acuerdo con el esquema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir de la forma:

$$\begin{cases} F - F_f = ma & ; & N - mg = 0 \\ Fx + F_f R = I\alpha \end{cases}$$

a las cuales hay que añadir la condición que el cuerpo rueda sin deslizamiento:

$$v = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$$

De la primera ecuación de traslación, encontramos:

$$F_f = F - ma$$

y, sustituyendo en la segunda:

$$Fx + FR - maR = \frac{I}{R}a$$

de donde se deduce que la aceleración de la rueda a es:

$$a = \frac{F(R+x)}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{F\left(1 + \frac{x}{R}\right)}{m \frac{I}{mR^2} + 1}$$

y se observa que es positiva, es decir, la rueda se desplazará hacia la derecha en el mismo sentido que la fuerza F .

En cuanto a la fuerza de rozamiento F_f , con el valor de a obtenido es fácil deducir:

$$F_f = F \left(\frac{\frac{I}{mR^2} - \frac{x}{R}}{\frac{I}{mR^2} + 1} \right)$$

De esta expresión, se ve que el sentido de F_f lo determina el signo de $\frac{I}{mR^2} - \frac{x}{R}$, de forma que, si $I > mRx$, F_f va en contra de F ; si $I < mRx$, F_f tiene el mismo sentido que F , y si $I = mRx$, F_f es nula.

La situación en que $x < 0$ se puede analizar simplemente considerando esta posibilidad en las expresiones encontradas para $x > 0$, es decir, haciendo la sustitución $x = -|x|$. Tenemos, para la aceleración:

$$a = \frac{F(R - |x|)}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{F\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)}{m \frac{I}{mR^2} + 1}$$

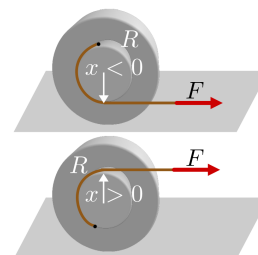
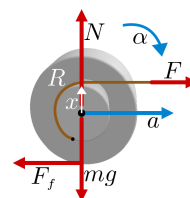
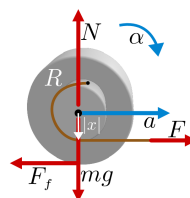


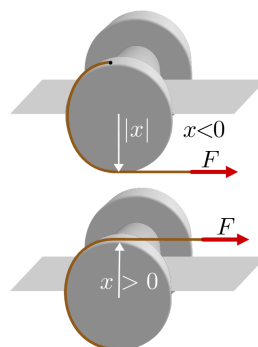
Figura del problema 5.2.1



Solución del problema 5.2.1, con $x > 0$



Solución del problema 5.2.1, con $x < 0$



Solución del problema 5.2.1, con $|x| > R$



y, para la fuerza de fricción:

$$F_f = F \left(\frac{\frac{I}{mR^2} + \frac{|x|}{R}}{\frac{I}{mR^2} + 1} \right)$$

de donde se deduce que, al ser $|x| < R$, el cuerpo se moverá hacia la derecha y la fuerza de rozamiento siempre estará dirigida hacia la izquierda.

También se puede analizar el caso en que $|x| > R$.

Si $x > 0$: a va en el sentido de F .

Si $x < 0$: a va en sentido contrario a F . ■

Problema 5.2.2. Un bloque cúbico de masa m está en reposo sobre un suelo completamente liso cuando recibe una fuerza horizontal $F = 3mg$ a una altura $h = \frac{7}{8}b$. ¿Cuánto valen las aceleraciones \vec{a} de su centro de masas y de rotación α en el instante inicial?

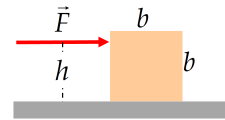


Figura del problema 5.2.2

Solución

Es previsible que el bloque tienda a girar y su centro de masas a desplazarse en el sentido indicado en la figura, de forma que el CM del cubo se trasladará en el plano $x - y$ con una aceleración \vec{a} y girará en torno a un eje perpendicular en el plano de la figura del enunciado que pasa por el CM , con una aceleración angular α . La solución de la situación planteada, se obtiene mediante la ecuación de la dinámica de traslación (dos componentes):

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

y la de rotación (una componente):

$$M_{(CM)} = I_{(CM)} \alpha$$

La distribución de fuerzas que actúan sobre el sólido se muestra en la segunda figura de la solución, donde vemos que la normal debida al plano horizontal se ha dibujado en el vértice derecho del cubo, puesto que es aquí donde actuará cuando inicie la rotación. Las dos ecuaciones de movimiento de traslación del centro de masas del cubo se pueden escribir en la forma siguiente (donde tenemos en cuenta que $F = 3mg$):

$$3mg = ma_x \quad ; \quad N - mg = ma_y$$

La de la rotación, teniendo en cuenta que, para un cubo homogéneo de lado b , el momento de inercia respecto a su CM es $I = \frac{1}{6}m b^2$, resulta:

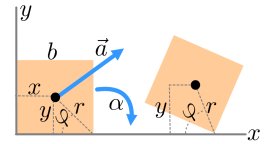
$$3mg \left(\frac{7b}{8} - \frac{b}{2} \right) - N \frac{b}{2} = \frac{1}{6}m b^2 \alpha$$

De acuerdo con las figuras anteriores:

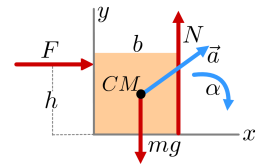
$$y = r \sin \varphi$$

Derivando con respecto al tiempo, resulta:

$$\dot{y} = r \cos \varphi \dot{\varphi}$$



Solución del problema 5.2.2



Solución del problema 5.2.2



y, volviendo a derivar y haciendo $\ddot{y} = a_y$ y $\ddot{\varphi} = \alpha$:

$$a_y = -r \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + r \cos \varphi \alpha$$

De acuerdo con las condiciones del problema, antes de recibir la fuerza F y, por consiguiente, en el instante inicial, $\dot{\varphi} = 0$. También en este instante, $r \cos \varphi = \frac{b}{2}$. Obtenemos la relación de aceleraciones a_y y α en el instante inicial:

$$a_y = \frac{b}{2} \alpha$$

De la componente x de la ecuación de traslación del centro de masas, se deduce:

$$a_x = 3g$$

La componente y de la ecuación de traslación del centro de masas, en el instante inicial, se puede escribir como:

$$N = mg + m \frac{b}{2} \alpha$$

y, si sustituimos en la ecuación de la rotación, resulta:

$$3mg \left(\frac{7b}{8} - \frac{b}{2} \right) - \left(mg + m \frac{b}{2} \alpha \right) \frac{b}{2} = \frac{1}{6} m b^2 \alpha$$

despejando α , tenemos:

$$\alpha = \frac{3g}{2b}$$

y, sustituyendo en la expresión para a_y encontrada más arriba:

$$a_y = \frac{3g}{4}$$

Al inicio de la solución, hemos comentado que “Es previsible...” Ahora podemos corroborar que la solución encontrada es la correcta por el hecho de que se cumple también $N = \frac{7}{4} mg > 0$. Si pasara que $N < 0$, la solución no sería la correcta, puesto que $N < 0$ nos indicaría que hay algo más que un contacto con el suelo. ■

Problema 5.2.3. Consideremos un robot parecido al de la figura, con las características siguientes: masa total, $M = 85$ kg; masa y momento de inercia de las ruedas y el rotor del motor, $m = 20$ kg y $I = 0,6$ kg m²; radio de las ruedas, $R = 0,2$ m; distancia del centro de las ruedas al centro de masas del robot, $d = 1$ m.

Inicialmente, el robot está en reposo. Para arrancar en línea recta, el motor actúa sobre las ruedas aplicándoles un par (momento) $\mathcal{M} = 25$ N m, que provoca que el robot avance. Suponiendo que las ruedas no se deslizan, ¿cuánto vale la aceleración del robot y a qué ángulo debe inclinarse para evitar caer?



Figura del problema 5.2.3

**Solución**

En la figura, podemos ver un esquema del robot mientras avanza con aceleración a . El conjunto no es un sólido rígido, pero está formado por dos partes que sí lo son. El par que acciona las ruedas es debido a fuerzas internas. Por eso, deberemos considerar las dos partes por separado: las ruedas con la parte de motor que gira solidariamente con estas (rotor) y el cuerpo del robot que no efectúa ninguna rotación, con la otra parte (estator). El par que provoca el motor es \mathcal{M} que, junto con N' y F , constituyen las fuerzas internas en el contacto entre las dos partes consideradas. Las fuerzas internas actúan sobre cada parte cumpliendo el principio de acción y reacción. $(M - m)g$ es el peso del cuerpo del robot y mg , el peso de las ruedas. La normal N y la fricción F_f son debidas al contacto de las ruedas con el suelo. Las ruedas no se deslizan, $\alpha R = a$.

Tenemos las ecuaciones de movimiento siguientes:

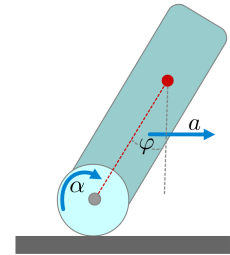
- (1) Traslación horizontal de las ruedas: $F_f - F = ma$
- (2) Traslación vertical de las ruedas: $N - (N' + mg) = 0$
- (3) Rotación de las ruedas: $\mathcal{M} - F_f R = I\alpha$
- (4) Traslación horizontal del cuerpo: $F = (M - m)a$
- (5) Traslación vertical del cuerpo: $N' - (M - m)g = 0$
- (6) Rotación del cuerpo: $\mathcal{M} + Fd \cos \varphi - N'd \sin \varphi = 0$

Para solucionar este problema, bastará con 1, 3, 4 y 6 y la condición de rodar sin deslizar. Si de 1 y 4 despejamos F y F_f , encontramos $F_f = Ma$. Esta ecuación la podemos obtener también considerando el robot entero (a pesar de que no es un sólido rígido). Sustituimos a 3 con $\alpha = a/R$ y despejamos a . Obtenemos:

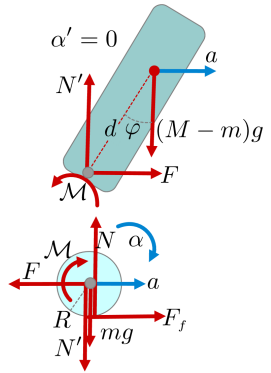
$$a = \frac{\mathcal{M} R}{I + M R^2} = 1,25 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo F con el resultado anterior en 6 y despejando φ , encontramos:

$$\sin \varphi = 0,165048 \Rightarrow \varphi = 0,165807 \text{ rad} = 9,5^\circ$$



Solución del problema 5.2.3



Solución del problema 5.2.3

5.3 Energía cinética de rotación y traslación. Conservación de la energía

En este apartado, se trata de deducir una expresión muy simple para la energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano. Partimos de la expresión de la energía cinética de un sistema de N partículas (3.27):

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (5.19)$$

Como, según (3.84), $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}$, (5.19) se puede escribir como:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i(C)} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)})^2 \quad (5.20)$$



El primer término es nulo si C es un punto fijo, puesto que $\vec{v}_C = 0$, y es la energía cinética de traslación si $C = CM$. El segundo término es nulo tanto si C es un punto fijo, dado que $\vec{v}_C = 0$, como si $C = CM$, puesto que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i(CM)} = 0$.

Para tratar el último término, tendremos en cuenta que $\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}$, puesto que la componente $\vec{r}_{i(C)}$ paralela a $\vec{\omega}$ no contribuye al producto vectorial con $\vec{\omega}$.

Teniendo en cuenta que $\vec{\omega}$ y $\vec{r}_{i(C)}$ son perpendiculares, $|\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}| = \omega r_{i(C)}$, resulta:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)})^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}) = \omega^2 r_{i(C)}^2 \quad (5.21)$$

Sustituyendo (5.21) en (5.20), una vez anulado el segundo término, tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i(C)}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{(C)} \omega^2 \quad (5.22)$$

Si $C = CM$ (5.22) es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{(CM)} \omega^2 \quad (5.23)$$

y la energía cinética del sólido tiene dos términos: el primer asociado a la traslación del CM y el segundo, a la rotación alrededor del CM .

Si C es un punto fijo, (5.22) es:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{(C)} \omega^2 \quad (5.24)$$

y la energía cinética del sólido tiene solo un término asociado a la rotación alrededor de C .

Las expresiones (5.23) y (5.24) son válidas también para 3D, aunque, en este caso, $I_{(CM)}$ (o bien $I_{(C)}$, si C es fijo) no será constante, puesto que la dirección del eje de rotación no será fija. Para 2D, la dirección sí es fija y $I_{(CM)}$ (o bien $I_{(C)}$, si C es fijo) es constante.

Finalmente, no es difícil demostrar el correspondiente teorema de conservación de la energía:

→ **Conservación de la energía.** Para un sólido rígido sometido a fuerzas externas que, o bien sean conservativas, con una energía potencial conjunta U , o bien sean de ligaduras con reacciones ideales, la energía mecánica $E = E_c + U$ se conserva a lo largo del movimiento.

En el caso de un sistema de sólidos rígidos con fuerzas de las mismas características que en el caso anterior, la energía será la suma de las energías de cada sólido y también se conservará a lo largo del movimiento.



Problema 5.3.1. Una masa $m_1 = 1 \text{ kg}$ cuelga del extremo de una cuerda de peso despreciable, que pasa por una polea sin rozamiento (v. figura) y que está enrollada a un cilindro homogéneo de masa $m_2 = 8 \text{ kg}$ y radio $R = 10 \text{ cm}$, que gira sin deslizar en un plano horizontal. Encuentra:

- La aceleración de la masa m_1 .
- La tensión de la cuerda.
- La aceleración angular del cilindro.

Solución

a) Teniendo en cuenta que todas las fuerzas que actúan sobre el sistema bien son conservativas o bien no hacen trabajo en su desplazamiento, se puede aplicar el principio de conservación de la energía mecánica E . Esta se puede escribir en la forma:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - m_1gy_1$$

donde, al tratarse de un cilindro macizo, $I = \frac{1}{2}m_2R^2$.

Dado que el cilindro rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal y la cuerda no se desliza:

$$v_2 = \omega R ; v_1 = 2\omega R \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2}$$

y también las derivadas temporales:

$$\alpha = \frac{a_1}{2R} ; a_2 = \frac{a_1}{2}$$

Aplicamos la conservación de la energía imponiendo que su derivada temporal sea nula:

$$\dot{E} = 0 = (m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{I}{4R^2})v_1a_1 - m_1gv_1$$

de donde resulta:

$$a_1 = \frac{m_1g}{m_1 + \frac{3m_2}{8}} = 2,45 \text{ m/s}^2$$

b) Para determinar la tensión de la cuerda, se puede aplicar la ecuación de traslación a m_1 :

$$m_1g - T = m_1a_1 \Rightarrow T = m_1g - m_1a_1 = 7,35 \text{ N}$$

c) La aceleración angular del cilindro vale:

$$\alpha = \frac{a_1}{2R} = 12,25 \text{ rad/s}^2$$

Problema 5.3.2. En un instante concreto, un cilindro homogéneo de masa M y radio R se deja caer desde el reposo desde arriba de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Sabiendo que rueda sin deslizar, determina:

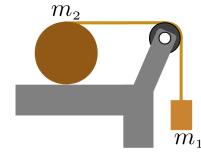
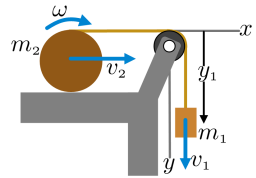
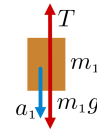


Figura del problema 5.3.1



Solución del problema 5.3.1



Solución del problema 5.3.1

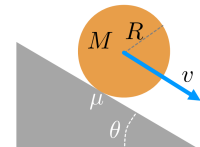


Figura del problema 5.3.2



- a) La aceleración lineal de bajada del cilindro.
- b) La velocidad que logra al final del plano inclinado, después de rodar una distancia L .
- c) El coeficiente mínimo de fricción μ entre el cilindro y el plano, compatible con rodar sin deslizar.

Solución

a) Como las fuerzas que actúan sobre el cilindro son conservativas (su peso) o no hacen trabajo a lo largo de su movimiento (la reacción normal del plano inclinado y la fuerza de fricción en el desplazamiento de rodar sin deslizar), se puede aplicar el principio de conservación de la energía mecánica E . Tomando como origen de la energía potencial gravitatoria la base del plano inclinado, la energía mecánica E se puede expresar de la forma:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh$$

De la figura, se observa que la altura h del centro de masa del cilindro en un instante cualquiera de su movimiento se puede expresar como

$$h = (L - x) \sin \theta + R \cos \theta$$

Por tanto, la energía mecánica del cilindro se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx \sin \theta + \text{constante}$$

y de la nulidad de su derivada temporal se deduce, con $\dot{x} = v = \omega R$, $\ddot{x} = a = \alpha R$ y $I = \frac{1}{2}MR^2$, siendo I el momento de inercia del cilindro con respecto al eje que pasa por su CM y perpendicular al plano de la figura:

$$\dot{E} = 0 = \frac{3M}{2}va - Mgv \sin \theta$$

de donde resulta

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

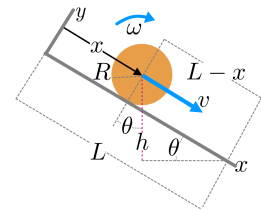
b) El centro de masa del cilindro describe un movimiento uniformemente acelerado en su bajada por el plano inclinado, con una aceleración a y con velocidad inicial nula. Por tanto, la velocidad que alcanzará al final del plano inclinado, después de haber recorrido una distancia L sobre él, valdrá:

$$v = \sqrt{2aL} = \sqrt{2 \frac{2}{3}gL \sin \theta} = \sqrt{\frac{4}{3}gL \sin \theta}$$

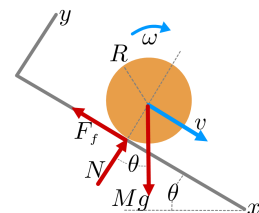
c) Se trata de encontrar la fuerza de rozamiento que actúa entre el cilindro y el plano inclinado. Si tenemos en cuenta la ley de Newton para la traslación en la dirección normal y la rotación, podemos escribir:

$$N - Mg \cos \theta = 0$$

$$F_f R = I\alpha$$



Solución del problema 5.3.2



Solución del problema 5.3.2



de donde obtenemos:

$$N = Mg \cos \theta$$

$$F_f = \frac{I\alpha}{R}$$

Ahora, el coeficiente de fricción μ es:

$$\mu = \frac{F_f}{N}$$

Si sustituimos F_f , N , $I = \frac{1}{2}MR^2$ y $\alpha = \frac{a}{R}$ con la aceleración a encontrada en el apartado **a**, obtenemos:

$$\mu = \frac{Ia}{R^2 Mg \cos \theta} = \frac{1}{3} \tan \theta \quad \blacksquare$$

Problema 5.3.3. Un disco circular en reposo de 0,5 m de radio y 4 kg m^2 de momento de inercia puede girar alrededor del eje fijo, que pasa por su centro, y lleva una cuerda enrollada en su periferia. Se estira de la cuerda con una fuerza constante de 2 N durante 10 s. Calcula, suponiendo que no hay rozamiento, la longitud de la cuerda desenrollada en ese tiempo.

Solución

Sobre el disco, aparte de la fuerza F , actúan el peso y la reacción del eje. Ambos tienen el punto de aplicación en el centro del disco, que es un punto fijo. Por tanto, no trabajan. La fuerza vertical F aplicada en la periferia del disco es constante; por consiguiente, es conservativa. Se puede afirmar que la energía mecánica del disco, formada por la cinética y la potencial asociada a F , se mantiene constante durante su rotación. Teniendo en cuenta que el vector posición del punto de aplicación de la fuerza F , en un instante dado del movimiento, es $\vec{r} = (R, y)$ y que $\vec{F} = (0, F)$, la energía potencial asociada a F es:

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{r} = -Fy$$

La energía mecánica E del disco será:

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - Fy$$

y su derivada temporal, teniendo en cuenta que $\dot{y} = v$ y $v = \omega R$:

$$\dot{E} = I\omega\alpha - F\omega R$$

de donde, utilizando $\dot{E} = 0$, se obtiene la aceleración angular del disco:

$$\alpha = \frac{FR}{I}$$

y la aceleración a con que baja el punto de aplicación de la fuerza F :

$$a = \alpha R = \frac{FR^2}{I} = 0,125 \text{ m/s}^2$$

Teniendo en cuenta que este punto parte del reposo y que describe un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado con aceleración a , la longitud L de cuerda desenrollada durante 10 s vale:

$$L = \frac{1}{2}at^2 = 6,25 \text{ m} \quad \blacksquare$$

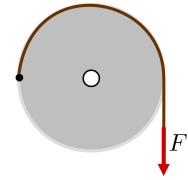
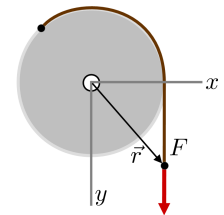


Figura del problema 5.3.3



Solución del problema 5.3.3



Problema 5.3.4. Dos masas de 1 y 2 kg están unidas por una cuerda inextensible y sin masa que pasa, sin deslizar, por una polea cilíndrica de 1,35 kg con un eje fijo, que puede girar sin fricción. Calcula las tensiones de la cuerda.

Solución

Teniendo en cuenta que las fuerzas de reacción del eje de la polea y su peso son fuerzas, cuyos puntos de aplicación no se desplazan en el movimiento de rotación y que m_1g y m_2g son fuerzas conservativas, se puede aplicar el principio de conservación de la energía mecánica E del sistema. Esta energía se puede escribir como (v. en la figura el sistema de referencia considerado):

$$E = \frac{1}{2}m_1v^2 - m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

En las condiciones del problema, $\dot{y}_1 = -v$, $\dot{y}_2 = v$, $v = \omega R$ y $a = \alpha R$, donde ω y α son, respectivamente, la velocidad angular y la aceleración angular de la polea, e $I = \frac{1}{2}MR^2$ es el momento de inercia de la polea con respecto al eje de rotación, que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la figura (M es la masa de la polea y R , su radio).

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})v^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2$$

Dado que E se conserva, su derivada será nula:

$$\dot{E} = 0 = (m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})va - (m_2 - m_1)gv$$

De esta última expresión, sustituyendo también I , ya se puede encontrar la aceleración a :

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 2,67 \text{ m/s}^2$$

Las aceleraciones de ambos cuerpos, a pesar de ser iguales en módulo, como vectores tienen sentido opuesto. Para calcular ahora las tensiones de la cuerda, hay que analizar por separado la dinámica de m_1 y m_2 . En cuanto a m_1 , teniendo en cuenta que su movimiento es ascendente, su dinámica queda reflejada en la ecuación siguiente:

$$T_1 - m_1g = m_1a$$

de donde obtenemos:

$$T_1 = m_1(g + a) = 12,47 \text{ N}$$

En cuanto a m_2 , teniendo en cuenta que su movimiento es descendente, su dinámica queda reflejada en la ecuación siguiente:

$$m_2g - T_2 = m_2a$$

de donde resulta:

$$T_2 = m_2(g - a) = 14,47 \text{ N}$$

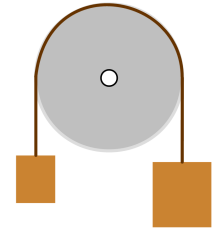
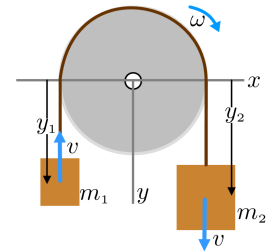
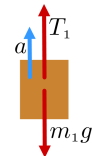


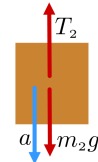
Figura del problema 5.3.4



Solución del problema 5.3.4
 $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$



Solución del problema 5.3.4. Diagrama del sólido libre m_1



Solución del problema 5.3.4. Diagrama del sólido libre m_2



Problema 5.3.5. Una rueda de 6 cm de radio tiene un eje de 2 cm de radio. El conjunto tiene un momento de inercia de $0,004 \text{ kg m}^2$ y una masa de 3 kg. La rueda está apoyada sobre el suelo y no desliza. Determina el sentido de giro de la rueda y su aceleración si, partiendo del reposo, estiramos horizontalmente de una cuerda enrollada al eje con una fuerza de 5 N, como se ve en la figura.

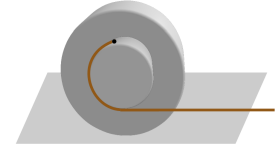


Figura del problema 5.3.5

Solución

Todas las fuerzas que actúan sobre la rueda son conservativas o bien no hacen trabajo en su desplazamiento, rodando sin deslizar. En consecuencia, se trata de un sistema conservativo. Su energía mecánica E se puede expresar en la forma:

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + M g R + \frac{1}{2} I \omega^2 - \vec{F} \cdot \vec{r}_A + C$$

donde $\vec{r}_A = (x_A, R)$ y, por consiguiente, $U_F = -\vec{F} \cdot \vec{r}_A = -F x_A$ es la energía potencial asociada a la fuerza $F = 2 \text{ N}$ aplicada horizontalmente, con C una constante.

Puesto que E se conserva, su derivada temporal será nula:

$$\dot{E} = 0 = M v a + I \omega \alpha - F \dot{x}_A$$

\dot{x}_A es la velocidad de los puntos de la cuerda, como A , $\vec{v}_A = (\dot{x}_A, 0, 0)$. Si la cuerda no desliza sobre el eje, esta velocidad también es la del punto de contacto de la rueda con la cuerda (v. figura de la solución). Si usamos $\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r})$, donde, observando la figura, $\vec{r} = (x, R, 0)$ y $\vec{v} = (v, 0, 0)$ son, respectivamente, el vector posición y la velocidad del centro del cilindro y $\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$, encontramos:

$$\dot{x}_A = v - \omega r$$

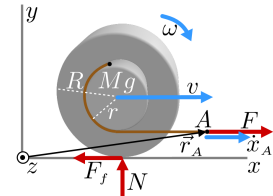
Si esta expresión se sustituye en la proveniente de la conservación de la energía mecánica, junto con $v = \omega R$ y $a = \alpha R$, encontramos:

$$\dot{E} = 0 = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v a - F \left(1 - \frac{r}{R} \right) v$$

y se obtiene finalmente:

$$a = \frac{F \left(1 - \frac{r}{R} \right)}{M + \frac{I}{R^2}} = 0,81 \text{ m/s}^2$$

$a > 0$ implica que $\alpha = \frac{a}{R} > 0$. Teniendo en cuenta que hemos tomado el sentido positivo hacia la derecha y v inicial nula, de acuerdo con la figura, la rueda se desplaza hacia la derecha girando en sentido horario. ■



Solución del problema 5.3.5



→6

6 Pequeñas oscilaciones

Introducción

Los fenómenos oscilatorios son muy importantes. Todo lo que nos rodea tiende a estar en una posición de equilibrio estable. El mar está en equilibrio estable. Las olas son pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio. Una estructura, un edificio, está en equilibrio estable. Cualquier perturbación que reciba provocará pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio, si no lo rompe.

La aproximación básica al comportamiento interno de la materia sólida es la rigidez, que es una configuración de equilibrio estable. La primera aproximación al movimiento interno de la materia sólida son las pequeñas oscilaciones alrededor de la configuración de rigidez.

El estudio de las pequeñas oscilaciones es, pues, una primera aproximación al estudio del comportamiento dinámico de muchos sistemas que, en primera instancia, nos aparecen como inamovibles y que, por cualquier causa, se *tambalean*. Es muy notable que este estudio lo podamos llevar a cabo sin entrar en detalle sobre las causas que provocan la alteración del estado de equilibrio.

6.1 Pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable

Consideraremos un sistema conservativo de un grado de libertad x de energía potencial $U(x)$ que tiene una posición de equilibrio estable x_0 . Ello quiere decir que $U(x)$ cumple:

$$\frac{dU}{dx}(x_0) = 0 \quad , \quad \frac{d^2U}{dx^2}(x_0) = k > 0 \quad (6.1)$$

Redefinimos el sistema de referencia de forma que la posición de equilibrio sea $x_0 = 0$. Consideramos pequeñas desviaciones x alrededor de la posición de equilibrio $x_0 = 0$. Hagamos un desarrollo en serie de Taylor de $U(x)$ y nos quedamos con el primer orden significativo, es decir, con el primer orden en que obtenemos



un resultado diferente de cero.

$$U(x) = U(0) + \frac{dU}{dx}(0) x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}(0) x^2 + O[x^3] \approx \frac{1}{2} k x^2 + \text{constante} \quad (6.2)$$

En la figura 6.1, tenemos un ejemplo que ilustra la situación genérica. En un plano vertical, damos la forma que queramos, $y(x)$, a una guía, de forma que tenga un mínimo donde situamos el origen del sistema de referencia $x = 0$. Ensartamos una pequeña bolita de masa m y la dejamos en reposo en el punto $x = 0$. Le damos un pequeño empujón y observamos el movimiento que hace alrededor de $x = 0$. La energía potencial será:

$$U(x) = mg y(x) \approx \frac{1}{2} k x^2 \quad ; \quad k = mg \frac{d^2y}{dx^2}(0)$$

La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y, como cerca de la posición de equilibrio $\frac{dy}{dx} \approx 0$, tenemos $E_c \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. La energía mecánica resulta ser, para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio:

$$E \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (6.3)$$

La ecuación de movimiento para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio será, pues, $m \ddot{x} = -k x$ y, por consiguiente, el sistema efectuará oscilaciones armónicas alrededor de esta. No solo los muelles oscilan armónicamente. De hecho, podemos enunciar que:

→ *Cualquier sistema con una posición de equilibrio estable, si parte cerca de esta posición con una velocidad inicial pequeña, efectuará un movimiento armónico.*

En este capítulo, x es una variable de posición del sistema (puede ser una longitud o un ángulo...), de forma que $x = 0$ es la posición de equilibrio estable alrededor de la cual el sistema oscila. En estas condiciones, x se denomina **elongación**.

6.2 Movimiento armónico simple (MAS)

En la figura 6.2, podemos ver el tren de aterrizaje de un avión. Si el vínculo entre la rueda y el cuerpo del avión fuese rígido, al entrar en contacto con la pista se produciría un estrepicio considerable. Por ello, entre la rueda y el cuerpo del avión se interpone un elemento elástico, como un muelle. Como consecuencia del muelle, al entrar en contacto con la pista, el cuerpo del avión inicia un movimiento oscilatorio armónico vertical que no se para. Es un **movimiento armónico simple (MAS)**. Lo que queremos es caracterizar el movimiento armónico simple sin poner el foco de

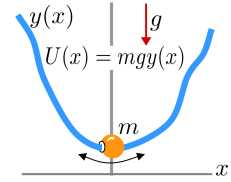


Fig. 6.1: Una pequeña bolita ensartada en un alambre efectúa oscilaciones armónicas alrededor de la posición de equilibrio estable

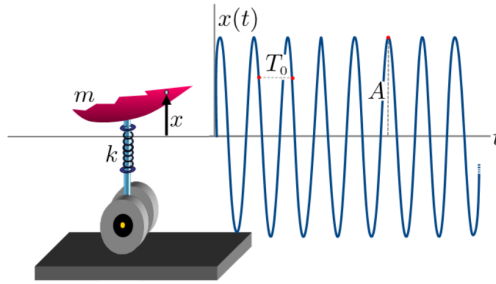


Fig. 6.2: El muelle del tren de aterrizaje de un avión provoca que este haga un movimiento oscilatorio armónico iniciado en el contacto con la pista

atención en la causa concreta que lo provoca en cada caso. El movimiento oscilatorio vertical del avión es muy parecido al movimiento horizontal de la bolita de la figura 6.1, a pesar de que el primero es provocado por la gravedad y la guía y el segundo, por el muelle. Queremos una caracterización de estos casos, que nos permita tratarlos con las mismas expresiones de la teoría, sin que tengamos que ir retocando las fórmulas según si se trata de un caso u otro. Nos podemos guiar por la ecuación de movimiento $m \ddot{x} = -k x$.

Ecuación canónica del MAS

Decimos que un sistema de un grado de libertad x efectúa un movimiento armónico simple si la ecuación de movimiento puede ser escrita de la forma canónica:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.4)$$

donde ω_0 se denomina *pulsación libre*.

Solución general del MAS

La solución general de la ecuación canónica del MAS es:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6.5)$$

donde A y φ_0 son constantes de integración.

La demostración es inmediata. Solo hay que derivar dos veces la expresión (6.5) y sustituir x y \ddot{x} en la ecuación canónica (6.4) para ver que se cumple idénticamente.

A y φ_0 se denominan, respectivamente, *amplitud* y fase *inicial* y, como ya hemos dicho, son constantes de integración. Se pueden fijar si conocemos las condiciones iniciales para cualquier instante t_0 , $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$. El argumento de la función trigonométrica sin, $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$, se denomina *fase*. Así, la fase inicial es $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Desde el punto de vista de su significado físico, destacamos los conceptos siguientes:



→ **Período libre.** Es el mínimo tiempo T_0 que debe transcurrir para que se repitan los mismos valores de x y \dot{x} . Es decir, $x(t + T_0) = x(t)$ y $\dot{x}(t + T_0) = \dot{x}(t)$. Por ello, hace falta que la fase vuelva a tener el mismo valor (módulo 2π), es decir, $\varphi(t + T_0) = \varphi(t) + 2\pi$. Obtenemos $\omega_0 T_0 = 2\pi$.

→ **Frecuencia libre.** Es la inversa del período libre:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (6.6)$$

→ **Amplitud.** Es el máximo valor a que puede llegar la elongación $x(t)$. La amplitud es, pues, el factor $A > 0$ de la función trigonométrica de la elongación $x(t)$ de (6.5).

Ejemplo de movimiento armónico simple

Un ejemplo evidente y sencillo donde podemos aplicar todo lo que hemos aprendido es el de una esfera homogénea fijada en el extremo de un muelle, con el otro extremo fijado, en presencia de la gravedad.

Dejamos que la esfera encuentre la posición de equilibrio. No estamos ahora interesados en saber dónde se encuentra esta. Situamos el origen del sistema de referencia allá donde esté la posición de equilibrio, tal como se ve en la figura 6.3. La coordenada x es la elongación, puesto que $x = 0$ es el punto de equilibrio. En este punto, las fuerzas que actúan son el peso mg y, en sentido contrario, la fuerza del muelle F_{k0} , que, al tratarse de una posición de equilibrio, tendrá el mismo módulo que el peso, $F_{k0} = mg$.

Damos un pequeño empujón (traslación vertical) arbitrario a la esfera. Cuando está en la posición x , moviéndose a una velocidad \dot{x} , las fuerzas que actúan son el peso y, en sentido contrario, la fuerza del muelle F_k . Esta última la podemos descomponer como $F_k = F_{k0} + kx$. Como $F_{k0} = mg$, la suma de fuerzas que actúan, $(mg - F_k)\hat{i}$, es $-kx\hat{i}$. La ecuación de movimiento de Newton es, pues, $m\ddot{x} = -kx$. Escrita de forma canónica, resulta:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (6.7)$$

Comparando con la ecuación canónica del MAS, deducimos que se trata de un movimiento armónico simple, caracterizado por la pulsación libre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. El período es, según (6.6), $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Observamos que la gravedad no aparece en la ecuación de movimiento. La gravedad afecta la ubicación del punto de equilibrio, pero no el movimiento respecto a ese punto.

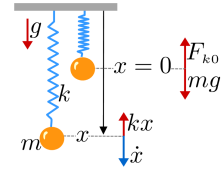


Fig. 6.3: Partícula fijada a un muelle. La gravedad afecta la ubicación del punto de equilibrio, pero no el movimiento con respecto a este punto



6.3 Movimiento armónico amortiguado (MAA)

Introducimos una fuerza de amortiguamiento viscoso, del tipo $-b\dot{x}$, en el tren de aterrizaje del avión (v. figura 6.4).

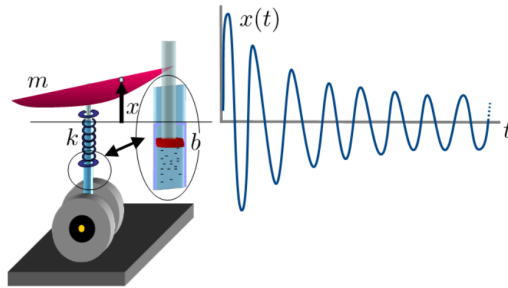


Fig. 6.4: El muelle y el amortiguador del tren de aterrizaje de un avión provocan que este efectúe un movimiento oscilatorio armónico amortiguado, que se inicia en el contacto con la pista

Ahora, las oscilaciones del cuerpo del avión se van haciendo cada vez más pequeñas. Decimos que es un **movimiento armónico amortiguado (MAA)**.

Es importante observar que, debido a que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, la posición de equilibrio del sistema amortiguado es exactamente la misma que la del mismo sistema sin la fuerza de amortiguamiento.

Tratemos de caracterizar el movimiento armónico amortiguado sin poner el foco de atención en la causa concreta que lo provoca en cada caso. En este caso, nos guiaremos por la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$.

Ecuación canónica del MAA

Decimos que un sistema de un grado de libertad x efectúa un movimiento armónico amortiguado si la ecuación de movimiento puede ser escrita en la forma canónica:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (6.8)$$

donde ω_0 se sigue denominando *pulsación libre*. γ es el **parámetro de amortiguamiento** y está relacionado, como veremos, con la fuerza de amortiguamiento.

Muchas veces, tendremos que distinguir entre el parámetro de amortiguamiento γ y el coeficiente de fricción b . Por ello, observamos que, independientemente de lo que sea x , las unidades de γ son s^{-1} . Las unidades de b deben ser tales que bv tenga unidades de fuerza, N. Así, $[b] = N s m^{-1} = kg s^{-1}$.

Solución general del MAA

La solución general de la ecuación canónica del MAA tiene diferentes formas según cuáles sean los valores relativos de ω_0 y γ .



Movimiento oscilatorio: $\omega_0 > \gamma$

La solución general se puede expresar como:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{6.9}$$

donde A y φ_0 son constantes de integración y la **pulsación** es:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{6.10}$$

La demostración es inmediata, aunque algo más compleja que en el caso del MAS. Solo hay que derivar dos veces la expresión (6.9) y sustituir x , \dot{x} y \ddot{x} en la ecuación canónica (6.8) para ver que, teniendo en cuenta (6.10), se cumple idénticamente.

A y φ_0 se denominan, respectivamente, **amplitud inicial** y **fase inicial** y, como ya hemos dicho, son constantes de integración. Se pueden fijar si conocemos las condiciones iniciales para cualquier instante t_0 , $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$. El argumento de la función trigonométrica \sin , $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$, se denomina **fase**. Así la fase inicial es $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Ahora, los conceptos análogos a los de período libre y amplitud no pueden ser exactamente los mismos. Si podemos tratar de hacer una generalización común.

→ **Amplitud variable.** Es el factor $A(t) = A e^{-\gamma t}$, con $A > 0$, de la función trigonométrica de la elongación $x(t)$ de (6.9). La amplitud variable es la envolvente de la elongación: en la figura 6.5, se ve que la amplitud variable tiene un contacto tangente cerca de cada máximo local de la elongación.

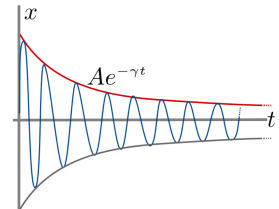


Fig. 6.5: La amplitud variable tiene un contacto tangente cerca de cada máximo local de la elongación

→ **Período.** Es el mínimo tiempo T que debe transcurrir para que se repitan los mismos valores de **relación de elongación** $\frac{x(t)}{A(t)}$ y de **relación de velocidad de elongación** $\frac{\dot{x}(t)}{\omega A(t)}$. Por eso, como en el caso libre, es necesario que la fase vuelva a tener el mismo valor (módulo 2π), es decir, $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$. Obtenemos $\omega T = 2\pi$.

→ **Frecuencia.** Es la inversa del período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6.11}$$

Movimiento sobreamortiguado: $\omega_0 < \gamma$

En la figura 6.6, podemos ver que, debido al fuerte amortiguamiento, la elongación no llega a oscilar. La forma oscilante de la solución general no es la adecuada. Como $\omega_0 < \gamma$, ω resulta imaginaria. Las constantes de integración A y φ_0 tendrían que tomar valores imaginarios para hacer que la elongación sea real. Esto se puede

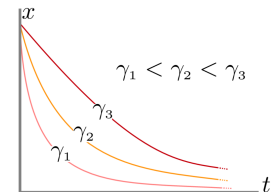


Fig. 6.6: Gráficas de la elongación para diferentes valores de γ en el caso sobreamortiguado



hacer y la solución general toma, en este caso, la forma:

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma(+)^t} + C_2 e^{-\gamma(-)^t} \quad (6.12)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración que se pueden fijar si conocemos las condiciones iniciales y

$$\gamma_{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (6.13)$$

La demostración es inmediata. Solo hay que derivar dos veces la expresión (6.12) y sustituir x , \dot{x} y \ddot{x} en la ecuación canónica (6.8) para ver que, teniendo en cuenta (6.13), se cumple idénticamente.

Movimiento crítico: $\omega_0 = \gamma$

Es el caso que separa los dos anteriores. Desde el punto de vista matemático, ninguna de las dos soluciones anteriores representa bien el movimiento crítico, puesto que, a pesar de no aparecer magnitudes imaginarias, solo contienen una constante de integración. Es sencillo demostrar que, si $\omega_0 = \gamma$, la solución general de la ecuación (6.8), con dos constantes de integración, es:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \quad (6.14)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración que se pueden fijar si conocemos las condiciones iniciales.

Ejemplo de movimiento armónico amortiguado

Siguiendo el ejemplo de la esfera homogénea fijada al extremo de un muelle, con el otro extremo fijado, en presencia de la gravedad, ahora rodeamos la esfera con un fluido que causa una fuerza de fricción viscosa de coeficiente b y también un empuje de Arquímedes. Al ser la esfera homogénea, el centro de empuje coincide con el centro de masas.

Dejamos que la esfera encuentre la posición de equilibrio. Situamos el origen del sistema de referencia allá donde esté la posición de equilibrio, tal como se ve en la figura 6.7. La coordenada x es la elongación, dado que $x = 0$ es el punto de equilibrio. En este punto, las fuerzas que actúan son el peso mg y, en sentido contrario, la fuerza del muelle y el empuje de Arquímedes $F_{k_0} + E_0$ que, al tratarse de una posición de equilibrio, sumadas tendrán el mismo módulo que el peso, $F_{k_0} + E_0 = mg$.

Damos un empujón (traslación vertical) arbitrario a la esfera. Cuando está en la posición x , moviéndose a una velocidad \dot{x} , las fuerzas que actúan son el peso y, en sentido contrario, la fuerza del muelle, la fricción y el empuje $F_k + b\dot{x} + E_0$. Como $F_k = F_{k_0} + kx$ y $F_{k_0} + E_0 = mg$, tenemos que la suma de fuerzas que actúan,

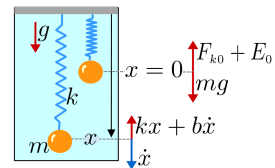


Fig. 6.7: Esfera homogénea fijada a un muelle y rodeada de fluido. El punto de equilibrio es independiente de la fuerza viscosa. La fuerza resultante no depende ni de la gravedad ni del empuje



$(mg - E_o - F_k - b\dot{x})\hat{i}$, es $(-kx - b\dot{x})\hat{i}$. La ecuación de movimiento de Newton es, pues, $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$. Escrita en forma canónica, resulta:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (6.15)$$

Comparando con la ecuación canónica del MAA, deducimos que se trata de un movimiento armónico amortiguado, caracterizado por la pulsación libre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y el parámetro de amortiguamiento $\gamma = \frac{b}{2m}$. Dependiendo de los valores relativos de ω_0 y γ , se tratará de un movimiento oscilatorio, sobreamortiguado o crítico.

Problema 6.3.1. Una polea, de momento de inercia con respecto a su eje I , efectúa pequeñas oscilaciones amortiguadas girando sin fricción en el eje: la cuerda tiene masa despreciable, se mantiene siempre tensa y en ningún momento se desliza. Fijados al suelo y a los extremos de la cuerda hay un par de muelles iguales, de masa despreciable y constante recuperadora k . Un disco, de masa despreciable, recibe por fricción aerodinámica una fuerza $-bv$, siendo v la velocidad del disco y b constante. Para pequeñas oscilaciones, determina:

- la ecuación de movimiento,
- la trayectoria y
- el período.

Solución

Como elongación, tomamos el ángulo φ , de forma que, en equilibrio, $\varphi = 0$.

a) La ecuación de movimiento de rotación para la polea $M = I\alpha$ será:

$$I\ddot{\varphi} = -2kR\varphi R - bR\dot{\varphi}R$$

Esto es así porque, cuando estamos en equilibrio, los dos muelles dan un momento igual y de sentido contrario $M_{Ek0} + M_{Dk0} = 0$; cuando giramos un ángulo φ en el sentido positivo (v. figura), el muelle izquierdo da un momento más pequeño, puesto que se ha acortado $R\varphi$, $M_{Ek} = M_{Ek0} - k R\varphi R$, y el de la derecha, más grande, puesto que se ha alargado $R\varphi$, $M_{Dk} = M_{Dk0} + k R\varphi R$. Así, el momento resultante de la acción de los muelles es $M_{Dk} + M_{Ek} = 2k R\varphi R$. El momento efectuado por la fuerza de fricción viscosa $-bv = -bR\dot{\varphi}$ es $-bvR = -bR\dot{\varphi}R$.

Escribimos la ecuación de movimiento de forma canónica:

$$\ddot{\varphi} + \frac{b R^2}{I}\dot{\varphi} + \frac{2kR^2}{I}\varphi = 0$$

y, por comparación:

$$\gamma = \frac{bR^2}{2I} ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2kR^2}{I}}$$

b) La trayectoria, de acuerdo con el enunciado, es la correspondiente a un movimiento oscilante:

$$\varphi(t) = A_\varphi e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \xi_0) ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{R^2}{I} \left(2k - \frac{b^2 R^2}{4I} \right)}$$

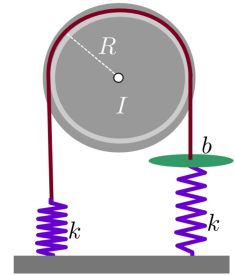
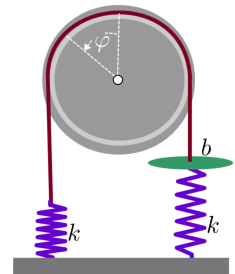


Figura del problema 6.3.1



Solución del problema 6.3.1



donde A_φ es la amplitud angular inicial y ξ_0 , la fase inicial.

c) El período es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R^2}{I} \left(2k - \frac{b^2 R^2}{4I} \right)}} \quad \blacksquare$$

6.4 Movimiento armónico forzado (MAF)

Ahora supongamos que la pista de aterrizaje del avión de los apartados anteriores contiene una serie de vados que le confieren una forma sinusoidal (v. figura 6.8). El cuerpo del avión recibe, como consecuencia, una fuerza de tipo sinusoidal que prolonga el movimiento a pesar del amortiguamiento. ¿Cómo es, a la larga, este movimiento? ¿Qué relación existe entre el muelle, el amortiguamiento y la frecuencia de los vados, por un lado, y el movimiento vertical del cuerpo del avión, por otro? Decimos que el sistema está forzado o que en él actúa una **excitación** externa.

Tratemos de caracterizar el movimiento armónico forzado sin poner el foco de atención en la causa concreta que, en cada caso, lo provoca. En este caso, nos guiaremos por la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_E(t)$, donde F_E es una fuerza de excitación externa que suponemos sinusoidal.

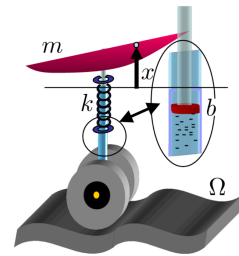


Fig. 6.8: La pista no es perfectamente horizontal y plana. Los vados que tiene le confieren una forma sinusoidal. Ello provoca que el movimiento oscilatorio amortiguado del cuerpo del avión no se acabe. El cuerpo del avión recibe una fuerza sinusoidal de excitación debida a los vados de la pista que mantiene el movimiento

Ecuación canónica del MAF

Decimos que un sistema de un grado de libertad x efectúa un movimiento armónico forzado si la ecuación de movimiento puede ser escrita en la forma canónica:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = B \sin(\Omega t + \theta_0) \quad (6.16)$$

donde ω_0 se sigue denominando *pulsación libre*, γ es el *parámetro de amortiguamiento*, y aparecen tres nuevas constantes, B , Ω y θ_0 , que están relacionadas, como veremos, con la amplitud, la frecuencia y la fase inicial de la fuerza (o par) de excitación, respectivamente.

Solución general del MAF

Como la ecuación (6.16) es lineal respecto a $x(t)$, la solución general se puede escribir como la suma de la solución general de la ecuación homogénea $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $x_h(t)$, que coincide con la ecuación de movimiento del MAA, y una solución particular $x_p(t)$ de (6.16): $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, donde $x_h(t)$ es la solución correspondiente del MAA, que, en cualquiera de los tres casos, es un movimiento amortiguado que desaparece con el tiempo. Este tiempo, que depende del parámetro de amortiguamiento, lo podemos evaluar como $t \gg \gamma^{-1}$, de forma que el factor $e^{-\gamma t} \sim 0$. Decimos que $x_h(t)$ es el término **transitorio**. La solución particular x_p



se encuentra por tanteo. Partimos de:

$$x_p(t) = A_p \sin(\Omega t + \theta_0 - \varphi_p) \quad (6.17)$$

donde A_p y φ_p son constantes que hay que ajustar para que (6.17) efectivamente cumpla la ecuación (6.16). Si sustituimos $x_p(t)$, $\dot{x}_p(t)$ y $\ddot{x}_p(t)$, encontrados a partir de (6.17), en (6.16), obtenemos:

$$\tan \varphi_p = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} ; \quad \sin \varphi_p \geq 0 \quad (6.18)$$

$$A_p = \frac{B}{\Omega \sqrt{4\gamma^2 + \left(\Omega - \frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)^2}} \quad (6.19)$$

Por tanto, la solución general del MAF (6.16) se puede escribir como un término transitorio x_h , solución general del MAA, más un término **estacionario** x_p , definido según (6.17) con una amplitud particular A_p conforme a (6.19), y una fase inicial $\theta_0 - \varphi_p$, donde φ_p está definido según (6.18). φ_p puede ser entendido como la diferencia de fase entre la excitación y la elongación.

Por ejemplo, en el caso oscilatorio, $\omega_0 > \gamma$, la solución general es:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A_p \sin(\Omega t + \theta_0 - \varphi_p) \quad (6.20)$$

donde A y φ_0 son constantes de integración. Al inicio del movimiento, no hay una pulsación definida. Se trata de una superposición de dos movimientos armónicos de pulsaciones respectivas ω y Ω . Pasado un tiempo, $t \gg \gamma^{-1}$, podemos considerar que el término transitorio desaparece y solo nos queda el término estacionario. El término estacionario $x_p(t)$ es un movimiento oscilatorio armónico de pulsación Ω , determinada por el excitador, y de amplitud A_p y fase inicial $\theta_0 - \varphi_p$ que no están relacionadas con las condiciones iniciales. Están fijadas por magnitudes presentes en la ecuación de movimiento y, por consiguiente, del sistema: B , ω_0 , γ , Ω y θ_0 .

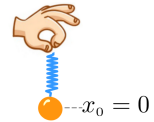


Fig. 6.9: En lugar de fijar el extremo superior del muelle al techo, lo cogemos con la mano. Si mantenemos la mano muy quieta, el punto de equilibrio es el mismo de antes y no se mueve $x_0 = 0$

Ejemplo de movimiento armónico forzado

Seguimos con el ejemplo de la esfera fijada en el extremo de un muelle, en iguales condiciones que en el apartado anterior. Ahora, mantenemos el otro extremo del muelle con la mano (v. figura 6.9).

Con la mano quieta, la ecuación de movimiento será exactamente la misma que en el caso del muelle fijado en el techo (v. ecuación (6.15)), que podemos escribir de la forma:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - k(x - x_0) \quad (6.21)$$



aunque ahora es $x_0 = 0$.

Si sacudimos la mano en dirección vertical, con un movimiento sinusoidal de amplitud A_F y pulsación Ω , provocaremos que el punto de equilibrio se desplace alrededor de $x = 0$ según $x_0 = A_F \sin(\Omega t + \theta_0)$ (v. figura 6.10). Esta excitación externa provoca que la fuerza del muelle cambie a través del cambio de x_0 . Sustituyendo el nuevo valor de x_0 en (6.21), obtenemos:

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - k(x - A_F \sin(\Omega t + \theta_0))$$

que se puede escribir:

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - kx + kA_F \sin(\Omega t + \theta_0)$$

donde vemos que el efecto de sacudir la mano es la aparición de una fuerza que actúa sobre la esfera $F = kA_F \sin(\Omega t + \theta_0)$. Si lo expresamos en forma canónica:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{kA_F}{m} \sin(\Omega t + \theta_0) \quad (6.22)$$

obtendremos las mismas expresiones para ω_0 y γ y también $B = \frac{kA_F}{m}$.

Fenómenos de resonancia

Como hemos comentado, las características del movimiento oscilante que resulta de aplicar un excitador a un cierto sistema no vienen determinadas por las condiciones iniciales, sino por magnitudes que, son del sistema o bien del excitador. En particular, la amplitud A_p tiene un valor determinado por una cierta combinación de estas magnitudes según (6.19). Estudiaremos A_p como función de Ω , puesto que Ω es la magnitud presente en (6.19) que no pertenece al sistema, sino al excitador. La cuestión es si, fijados los valores del sistema, ω_0 y γ , hay algún valor de Ω que haga que A_p sea especialmente grande. Las gráficas de $A_p(\Omega)$ se pueden ver en la figura 6.11 para diferentes valores de γ . En general, siempre que $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, $A_p(\Omega)$ presenta un máximo. ¿A qué valor de Ω corresponde el máximo? Esto es sencillo de responder, puesto que solo tenemos que derivar $A_p(\Omega)$ con respecto a Ω , igualar a cero y despejar Ω .

→ **Resonancia de amplitud.** Siempre que $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, la pulsación de excitación Ω que hace que la amplitud de elongación A_p tenga un máximo, denominada **pulsación de resonancia de amplitud** Ω_{RA} , es:

$$\Omega_{RA} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (6.23)$$

Además de la resonancia de amplitud, tiene también interés la resonancia de velocidad, es decir, la pulsación Ω para la cual la amplitud de velocidad $\Omega A_p(\Omega)$ tiene un valor máximo.

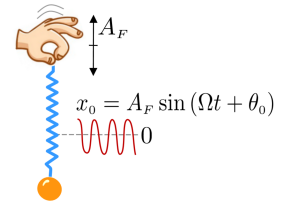


Fig. 6.10: Si sacudimos la mano verticalmente, con un movimiento sinusoidal de amplitud A_F y pulsación Ω , provocaremos que el punto de equilibrio se desplace alrededor de 0 según $x_0 = A_F \sin(\Omega t + \theta_0)$

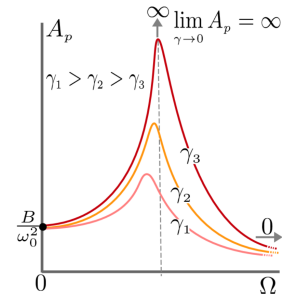


Fig. 6.11: Gráficas de $A_p(\Omega)$ para diferentes valores del parámetro de amortiguamiento $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$. Se observa que, si $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, hay un máximo. Cuando $\gamma \rightarrow 0$, el máximo se sitúa en $\Omega = \omega_0$ y tiende a infinito. Cuando $\Omega \rightarrow \infty$, resulta $A_p(\infty) \rightarrow 0$. Cuando $\Omega \rightarrow 0$, el sistema oscila con una amplitud $A_p = \frac{B}{\omega_0^2}$. En este último caso, si se tratara de la esfera del ejemplo, $B = \frac{kA_F}{m}$ y se obtiene $A_p = A_F$, es decir, la esfera sube y baja sin que el muelle se deforme



→ **Resonancia de velocidad.** La pulsación de excitación Ω que hace que la amplitud de velocidad ΩA_p tenga un máximo, denominada *pulsación de resonancia de velocidad* Ω_{RV} , es

$$\Omega_{RV} = \omega_0 \quad (6.24)$$

Es un hecho notable que, en resonancia de velocidad, la diferencia de fase entre excitación y elongación, φ_p , es, según (6.18), $\frac{\pi}{2}$.

La resonancia de velocidad está muy relacionada con las cuestiones energéticas, como veremos en la próxima subsección.

Energía y potencia

La expresión de la energía dependerá del sistema concreto de que tratemos. Aun así, sabiendo que, para el MAS, $\dot{E} = 0$ debe ser la ecuación de movimiento, podemos deducir que la energía de un movimiento armónico siempre se podrá escribir:

$$E = \frac{1}{2} M_I \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_I \omega_0^2 x^2 \quad (6.25)$$

donde M_I es un factor que contiene la inercia. Por ejemplo, en caso de que se trate de un cuerpo que oscila por traslación, M_I será simplemente la masa, como en el caso del ejemplo de la esfera fijada a un muelle que hemos tratado a lo largo de este capítulo.

Si se trata de un MAA oscilando con $\gamma \ll \omega_0$, podemos escribir la evolución temporal de la energía de la forma aproximada:

$$E = \frac{1}{2} M_I \omega_0^2 A(t)^2 = e^{-2\gamma t} E(0) \quad (6.26)$$

Si se trata de un MAF, la energía no se conserva debido a la presencia de la fricción y de la excitación externa. En este caso, podremos escribir:

$$\dot{E} = -2M_I \gamma \dot{x}^2 + M_I B \sin(\Omega t + \theta_0) \dot{x} \quad (6.27)$$

puesto que, si desarrollamos \dot{E} según (6.25), (6.27) es la ecuación de movimiento del MAF.

Cuando estamos en la fase estacionaria, la media de la energía en un período, \bar{E} , se conserva, puesto que, si calculamos \bar{E} :

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E dt = \frac{1}{4} M_I A_p^2 (\omega_0^2 + \Omega^2) \quad (6.28)$$

podemos observar que \bar{E} no depende de t . Si hay disipación por fricción, pero la media de la suma de la potencia de excitación y la disipación se anulan.



La media de la potencia de excitación, \bar{P} , es, teniendo en cuenta el término de potencia del excitador, es decir, el segundo término del miembro de la derecha de (6.27):

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} M_I B \sin(\Omega t + \theta_0) \dot{x} dt \\ &= \frac{1}{2} M_I B A_p \Omega \sin \varphi_p = \frac{1}{2} Z A_p^2 \Omega^2 \sin \varphi_p\end{aligned}\quad (6.29)$$

donde Z es la *impedancia mecánica*:

$$Z = \frac{F_0}{A_p \Omega} = M_I \sqrt{4\gamma^2 + \left(\Omega - \frac{\omega_0^2}{\Omega}\right)^2} \quad (6.30)$$

y $F_0 = M_I B$.

Como vemos, si la pulsación Ω coincide con la de resonancia de velocidad, $\Omega = \omega_0$, $A_p \Omega$ será máxima y $\sin \varphi_p = 1$. Así, podemos decir:

→ **Potencia de excitación máxima.** En resonancia de velocidad, la potencia media desarrollada por el excitador es máxima.

La diferencia relativa entre Ω_{RV} y Ω_{RA} es:

$$\frac{\Omega_{RV} - \Omega_{RA}}{\Omega_{RV}} = \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^4\right) \quad (6.31)$$

Para amortiguamientos relativamente pequeños, $\gamma \ll \omega_0$, tendremos $\Omega_{RV} = \Omega_{RA} \simeq \omega_0$. En estos casos, es exclusivamente la pulsación libre ω_0 la que caracteriza el comportamiento resonante del sistema.

→7

7 Ondas mecánicas

Introducción

Hasta ahora, hemos estudiado la materia en un modelo de sólido rígido. Ahora consideramos la estructura interna de esta materia. Tomemos un bloque de material sólido homogéneo y demos un vistazo por dentro. ¡No hace falta que lleguemos al nivel atómico! Basta con que consideremos volúmenes suficientemente grandes para que, en situación de equilibrio, la cantidad de materia que contengan se mantenga constante. Estas porciones interactúan las unas con las otras. Podemos construir un modelo representando cada volumen de materia por una partícula. Las diferentes partículas las unimos con muelles que, para pequeñas desviaciones del equilibrio, sabemos que, por lo que hemos aprendido en el capítulo 6, representan bien las fuerzas de interacción (v. figura 7.1).

Hecho esto, si desplazamos repentinamente una de las partículas de la posición de equilibrio, internamente ¡todo empieza a vibrar! Decimos que por el medio se propaga una onda (v. figura 7.2).

En este capítulo, estudiaremos cómo tratar los movimientos internos de la materia, cuando esta deja de ser rígida y pasa a tener propiedades elásticas.

7.1 Ondas

Si **perturbamos** localmente alguna de las propiedades de un medio, la perturbación se transmitirá a todo el medio. La propagación de esta perturbación se denomina **onda** o movimiento **ondulatorio**. Por el hecho de tratar con perturbaciones mecánicas, de algunas de las propiedades de los medios materiales, decimos que tratamos con **ondas mecánicas**. Si no hay confusión, hablamos simplemente de **ondas**. El punto o conjunto de puntos donde se produce la perturbación inicial se denomina **foco**.

Pensemos en algunas experiencias cotidianas relacionadas con las ondas.

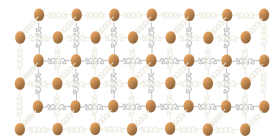


Fig. 7.1: Modelo de materia más allá de la rigidez

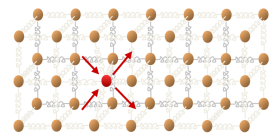


Fig. 7.2: El desplazamiento repentino de solo una de las partículas provoca la propagación de una onda por el medio



- a) Si tiramos de un punto de una cuerda tensa y lo soltamos (v. figura 7.3), observaremos que la deformación producida se transmite a una velocidad v . Si la cuerda está más tensa, la velocidad de propagación será mayor.

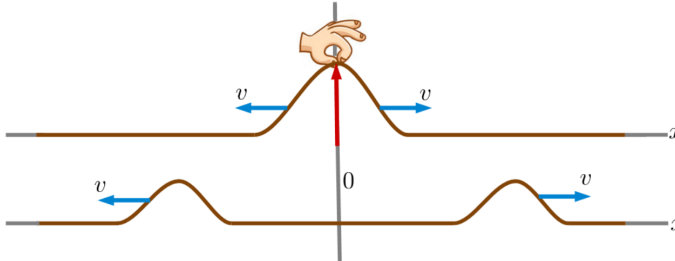


Fig. 7.3: Propagación de una perturbación en una cuerda tensa

- b) Si damos un golpe de martillo a una vía del tren, al poco tiempo, una persona alejada notará la vibración causada si toca la vía con la mano.
- c) Si lanzamos una piedra al agua de un estanque, observamos que la perturbación se va extendiendo circularmente por toda la superficie, a una velocidad constante.
- d) Si explotamos un petardo, la rápida combustión de la pólvora provoca el desplazamiento de los gases que comprimen la capa esférica de aire más próxima al petardo. Como el aire es muy elástico, después de comprimirse se expande y comprime la capa esférica que rodea la primera capa. Y así sucesivamente. El resultado es una onda sonora que se propaga esféricamente por el aire.

Todas las ondas mecánicas tienen unos rasgos comunes, que son:

- Hay un **medio** y una propiedad de este medio que puede ser perturbada. Esta perturbación se denomina **función de onda** o **campo**. En equilibrio, la función de onda es nula.
 - En el caso de una cuerda tensa, la cuerda define el eje x (v. figura 7.3). La función de onda es el desplazamiento transversal y de cada punto de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio, $y = 0$. Como cada punto de la cuerda queda determinado por su posición x y el desplazamiento y de cada punto depende del tiempo, la onda en toda la cuerda queda caracterizada por una función de dos variables, $y(x, t)$, que es la función de onda de la cuerda.
- En las ondas mecánicas, las partículas que constituyen el medio, por término medio, no se mueven; solo oscilan ligeramente alrededor de su posición de equilibrio. Las ondas no transportan materia. Sí podemos decir que las ondas propagan energía y cantidad de movimiento.



Si la velocidad de oscilación es perpendicular a la dirección de propagación, decimos que se trata de **ondas transversales** (v. figura 7.4).

Si la velocidad de oscilación tiene la misma dirección que la de propagación, decimos que se trata de **ondas longitudinales** (v. figura 7.5).

Si la perturbación es un desplazamiento longitudinal o transversal, podemos denominarlo **elongación**, según hemos visto en el capítulo 6.

Si la perturbación inicial es muy breve, la onda que se propaga por el medio se denomina **pulso ondulatorio**. Este es el caso de la figura 7.3.

Si la perturbación inicial consiste en una oscilación durante un cierto intervalo de tiempo Δt , tendremos un **tren de ondas**. En la figura 7.6, se muestra un tren de ondas armónicas. Si el intervalo Δt es muy grande, $\Delta t \rightarrow \infty$, el tren de ondas armónicas se habrá convertido en una **onda armónica**. Las ondas armónicas, como veremos enseguida, son un caso ideal de ondas muy importante.

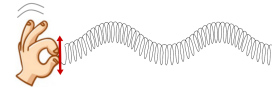
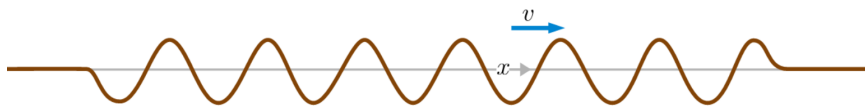


Fig. 7.4: Un muelle largo representa bien un modelo de medio continuo unidimensional. Podemos generar una onda transversal desplazando transversalmente algunas espiras del muelle largo

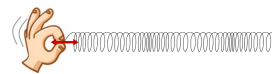


Fig. 7.5: Onda longitudinal provocada por el desplazamiento longitudinal de algunas espiras en un muelle largo

Fig. 7.6: Un caso particular de tren de ondas. Si la perturbación inicial consiste en una oscilación armónica que se prolonga un tiempo Δt , se obtiene un tren de ondas armónicas de longitud $v\Delta t$

Frentes de onda

Un medio se denomina **homogéneo** si, fijada una dirección, la velocidad de propagación es independiente del punto que consideramos.

Un medio se denomina **isótropo** si la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones; en caso contrario, es **anisótropo**.

Un medio se denomina **no dispersivo** si, en cada punto, todas las ondas tienen la misma velocidad.

Un medio se denomina **no disipativo** si el medio no absorbe la energía que transporta la onda.

Se denomina **medio ideal** el medio que es, a la vez, homogéneo, isótropo, no dispersivo y no disipativo. En un medio ideal, la velocidad de propagación de las ondas es constante.

Se denominan **frentes de onda** las regiones del medio conectadas por puntos con un mismo valor de la perturbación. De los puntos de un frente de ondas, se dice que están **en fase**. La dirección de propagación es perpendicular a los frentes de onda.



En un medio ideal, si el foco es puntual o esférico, el frente de ondas será esférico. Si el foco es plano, el frente de ondas también lo será. Lejos del foco, un frente de ondas esférico resulta aproximadamente plano (v. figura 7.7). En un medio ideal, una **onda plana** o unidimensional es la causada por un foco plano. En la práctica, lejos de un foco puntual o localizado, tendremos una onda plana. En un medio ideal, una onda plana se caracteriza porque tiene una única dirección de propagación con velocidad constante.

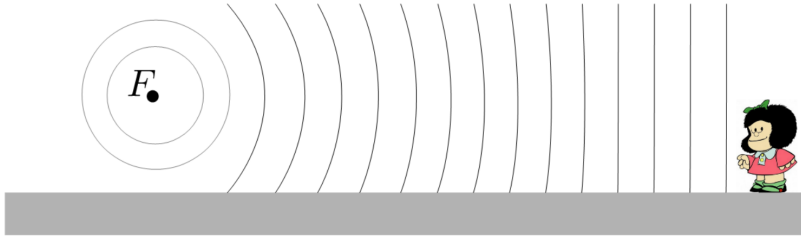


Fig. 7.7: Un foco puntual da lugar a frentes de onda esféricos. Lejos del foco, estos frentes de onda son aproximadamente planos. Lejos del foco, podemos tratar la onda como plana

Las ondas en una cuerda tensa o en una barra larga y estrecha son ejemplos de ondas planas o unidimensionales, puesto que se propagan solo en una dirección.

El aire de la atmósfera, en una franja de unos pocos metros y sin gradientes de temperatura importantes, se puede considerar un medio ideal para las ondas sonoras.

Los frentes de onda dan una imagen muy clara de la propagación de las ondas. De hecho, el estudio de las ondas empezó en el siglo XVII cuando Christiaan Huygens introdujo el principio que lleva su nombre.

→ **Principio de Huygens.** *Cualquier punto de un frente de onda es susceptible de convertirse en un nuevo foco emisor de ondas idénticas a las que lo originaron.*

Este principio permite explicar y prever fenómenos como la reflexión, la refracción y, sobre todo, la difracción de las ondas. Huygens estableció su principio para demostrar que la luz es un tipo de onda, en contra de la opinión de Newton, que creía que la luz no era más que un haz de partículas. Ya en el siglo XIX, primero Fresnel y después Kirchhoff mejoraron el enunciado del principio y, de hecho, Kirchhoff demostró que era una consecuencia de la ecuación de ondas, como veremos en la sección 7.2. Como en este texto estudiamos las ondas desde el punto de vista de la mecánica, no trataremos del principio de Huygens. Solo al final del capítulo 8 comentaremos qué es la difracción.



Fig. 7.8: Christiaan Huygens (1629-1695) fue un matemático, físico y astrónomo neerlandés



7.2 Ondas planas y ecuación de ondas

Ondas planas: la función de onda

Trataremos las ondas planas en un medio ideal. Para este tipo de medio:

- la velocidad de propagación v es una constante característica del medio y
- la perturbación conserva la forma mientras se propaga (v. figura 7.9)

Con estas dos condiciones, una onda plana, descrita por la función de onda y , que en situación de equilibrio vale $y = 0$, será cualquier función y de x y t de la forma:

$$y(x, t) = y(x - vt) \quad \text{o bien} \quad y(x, t) = y(x + vt) \quad (7.1)$$

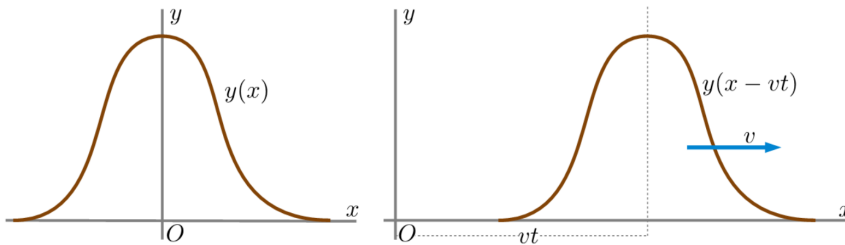


Fig. 7.9: La misma perturbación en el instante inicial $t = 0$ y en un instante posterior t en que se ha propagado en el sentido de las x crecientes

Observando la figura 7.9, podemos ver que $y(x - vt)$ cumple las condiciones **a** y **b**. Los frentes de onda serán los puntos que tienen el mismo argumento de la función de onda, es decir, puntos en que $x - vt = C$, siendo C una constante. Así, para cualquier instante t , los frentes de onda son del tipo $x = C + vt = \text{constante}$. Para cada t son planos, de ahí viene el nombre de ondas planas (v. figura 7.10). Estos planos viajan a la velocidad $\dot{x} = v$. Así, $y = y(x - vt)$ representa una perturbación que se propaga en el sentido creciente del eje x a velocidad v . $y = y(x + vt)$ representa una perturbación que se propaga en el sentido decreciente del eje x a velocidad v .

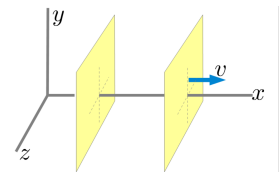


Fig. 7.10: Los frentes de onda de una onda plana son planos paralelos entre sí

Debemos distinguir entre la velocidad de oscilación y la de propagación. Si la onda es plana y viaja en la dirección del eje x , tendrá la forma genérica $y(x, t)$.

→ La **velocidad de oscilación**, v_{osc} , es:

$$v_{\text{osc}}(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (7.2)$$

→ La **velocidad de propagación** v_{prop} , para un medio ideal, es la velocidad $v_{\text{prop}} = |\dot{x}|$ tal que $y = y(x(t), t)$ es constante. Así:

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial y}{\partial t}$$



de donde resulta:

$$v_{\text{prop}} = |\dot{x}| = \left| \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial y}{\partial x}} \right| \quad (7.3)$$

Si la onda es transversal, $\vec{v}_{\text{osc}} \perp \vec{v}_{\text{prop}}$ y, si es longitudinal, $\vec{v}_{\text{osc}} \parallel \vec{v}_{\text{prop}}$. Si el medio es ideal, sabemos que la onda plana tiene la forma $y(x, t) = y(x \pm vt)$ y la velocidad de propagación resulta ser $v_{\text{prop}} = v$.

Ondas planas: ecuación de ondas

Si tenemos en cuenta los dos sentidos posibles de propagación, una onda plana puede tener la forma:

$$y(x, t) = y(x - \varepsilon vt) \quad , \text{donde} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (7.4)$$

Todas las posibles ondas planas de un mismo medio se pueden caracterizar por una ecuación diferencial que tenga por incógnita $y(x, t)$ y que puede depender de v , que es una característica del medio, pero no de ε .

Para encontrar esta ecuación, eliminando ε , tendremos que derivar (7.4). Ahora bien, $y(x, t) = Y(u)$, donde $u = x + \varepsilon vt$. Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{dY}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dY}{du} & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{d^2 Y}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 Y}{du^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{dY}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dY}{du} \varepsilon v & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{d^2 Y}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2 Y}{du^2} \varepsilon^2 v^2 \end{aligned}$$

Como $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon^2 = 1$, con las derivadas segundas eliminamos ε . Eliminando $\frac{d^2 Y}{du^2}$, encontramos la **ecuación de ondas planas**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.5)$$

que es la ecuación de las ondas que se propagan en una sola dirección, la x . Para ondas que se propagan en diferentes direcciones, frentes de onda no planos, hay que considerar las tres dimensiones del espacio x, y, z . Denominando ψ la función de onda, y con razonamientos parecidos a los que se han expuesto para una dimensión, la ecuación de ondas es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.6)$$



Principio de superposición

La ecuación de ondas (7.5) es una ecuación en derivadas parciales **lineal**. La demostración es sencilla: sean $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$ dos ondas, es decir, dos funciones que satisfacen la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0$$

Cualquier combinación lineal de las dos, $ay_1 + by_2$, con a y b constantes arbitrarias, cumple la ecuación de ondas (7.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (ay_1 + by_2)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (ay_1 + by_2)}{\partial t^2} \\ = a \left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right] + b \left[\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

El hecho de que la ecuación de ondas sea lineal significa que está de acuerdo con el **principio de superposición**, lo cual simplifica extraordinariamente el comportamiento y el estudio de las ondas.

→ **Principio de superposición de las ondas.** Si por un medio se propaga más de una onda, cada una se propaga sin verse afectada por las demás.

Como $y_1(x, t) = f(x - vt)$ y $y_2(x, t) = g(x + vt)$ son soluciones de la ecuación de ondas, aplicando el principio de superposición encontramos la solución **general de la ecuación de ondas**:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (7.7)$$

donde f y g son dos funciones arbitrarias.

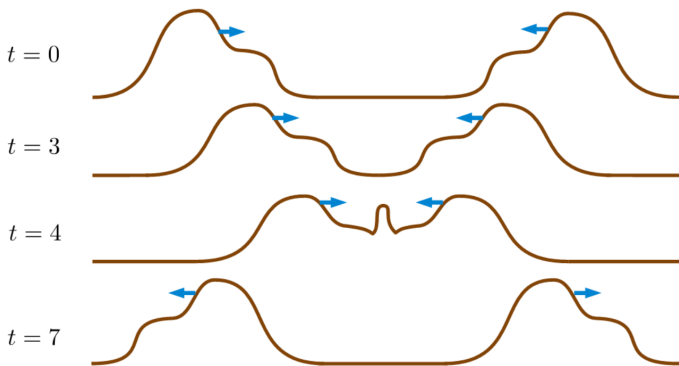


Fig. 7.11: Si en una cuerda se propagan dos pulsos de sentidos contrarios, la elongación de cada punto de la cuerda será la suma de elongaciones que producirían cada uno de los pulsos por separado

En la figura 7.11, podemos ver un caso que ilustra el principio de superposición.



Problema 7.2.1. En el instante $t = 0$, se da un golpe a una cadena larga y tensa, que inicia la propagación de una onda plana (pulso ondulatorio) que se puede expresar como:

$$y(x, t) = \frac{1}{12 + (x + 14t)^2} \quad (1)$$

donde x y y están en m y el tiempo t en s. $y(x, t)$ es similar a la que se muestra en la figura 7.9.

- Comprueba que esta función es una onda plana y encuentra la velocidad con que se propaga. ¿Cuánto valdrá la máxima elongación que experimentará cada pequeño eslabón de la cadena a medida que se propaga la onda?
- Si $y(x, t)$ es un pulso, ¿qué anchura aproximada podemos decir que tiene?
- ¿Cuánto vale la velocidad de oscilación de un punto cualquiera x de la cadena?
- En el instante $t = 0$, ¿qué puntos tendrán la máxima velocidad de oscilación?

Solución

a) Efectivamente, la función $y(x, t)$ de (1) se puede expresar en la forma: $y = f(x - vt)$; por consiguiente, es una onda que se propaga a la velocidad de 14 m/s en el sentido decreciente de las x . También podemos verlo comprobando que satisface la ecuación de ondas (7.5).

Para una x determinada, la máxima elongación y será cuando el denominador de (1) sea mínimo: $x + 14t = 0$. Así pues, para cada x , la máxima y será: $y_{\text{máx}} = 1/12 = 0,0833$ m.

b) Para un valor estimativo, tomamos como anchura del pulso la distancia entre los puntos de la cuerda que tengan una elongación $y = 1/10 y_{\text{máx}}$. Como la forma del pulso no cambia, podemos trabajar a $t = 0$,

$$\frac{1}{10} \frac{1}{12} \approx \frac{1}{12 + x^2} \quad , \text{de donde} \quad x \approx \pm 10 \text{ m}$$

Por tanto, la anchura del pulso es del orden de los 20 m.

c) Para encontrar la velocidad de oscilación, tenemos que derivar y :

$$v_{\text{osc}} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-28(x + 14t)}{[12 + (x + 14t)^2]^2}$$

d) Para un t dado, el punto x del pulso que tendrá la máxima velocidad de oscilación viene dado por:

$$\frac{\partial v_{\text{osc}}}{\partial x} = 0 = \frac{-28 \cdot 14 [12 + (x + 14t)^2] + 112(x + 14t)^2}{[12 + (x + 14t)^2]^3}$$

de donde $(x + 14t)^2 = 4$. Si $t = 0$, entonces $x = \pm 2$ m. Dado que la forma del pulso se mantiene, los dos puntos con la máxima velocidad de oscilación están a 2 m del máximo del pulso. ■



Ondas armónicas

En la figura 7.12, la varilla de un vibrador describe un movimiento armónico simple (MAS) de pulsación ω . Una cuerda indefinidamente larga y tensa tiene un extremo fijado a la varilla. El movimiento se transmite a la cuerda y su propagación es una onda. Si no hay disipación, pasado un tiempo, la onda alcanzará un tramo muy largo de cuerda, de forma que podremos decir que todos los puntos de la cuerda alejados del extremo harán un MAS. Como el MAS de la varilla no se detiene, todos los puntos de la cuerda, en todo momento, hacen un MAS.

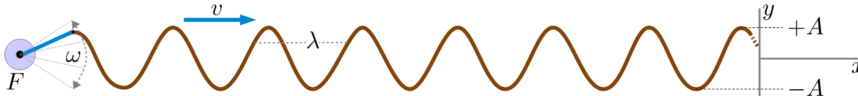


Fig. 7.12: La varilla describe un movimiento armónico simple (MAS) que se propaga a la cuerda tensa fijada por su extremo

La onda de la figura 7.12 es una onda plana que se denomina **onda armónica**. Una onda armónica que se propaga en el sentido creciente de las x es una función de la forma $y(x, t) = f(x - vt)$ donde cada punto x hace un MAS de pulsación ω . Estos requisitos nos imponen la forma general:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (7.8)$$

donde A , k , ω y ϕ son constantes, con $\frac{\omega}{k} = v$. Así, tendremos:

$$y(x, t) = A \sin(k(x - vt) + \phi) \quad (7.9)$$

y se cumple $y(x, t) = f(x - vt)$.

Los parámetros que caracterizan una onda armónica son:

- ➔ **Amplitud** A . Es la magnitud que proporciona las dimensiones físicas a y . Si es una onda de desplazamiento, A tiene dimensiones de longitud. Si es una onda sonora de presión, A tiene dimensiones de presión.
- ➔ **Período** T (s en el S.I.). Si filmamos un punto de la cuerda, situado horizontalmente en $x = x_0$, entonces $y(t) = y(x_0, t)$ es el movimiento vertical de este punto. En la figura 7.13, se representa $y(t)$. T es el período temporal de la onda o simplemente el **período**.



Fig. 7.13: Movimiento armónico simple efectuado por la perturbación y en el punto x_0 a lo largo del tiempo t

- ➔ **Pulsación o frecuencia angular** ω (rad/s en el S.I.). Podemos encontrar la relación con el período teniendo en cuenta la definición de este último:

$$kx - \omega(t + T) + \phi = kx - \omega t + \phi - 2\pi$$



de donde encontramos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- **Frecuencia** f ($s^{-1} = \text{Hz}$ en el S.I., $\text{Hz} = \text{hercio}$). $f = 1/T$
- **Longitud de onda** λ (m en el S.I.). Si detenemos el tiempo, $t = t_0$, entonces $y(x) = y(x, t_0)$ es una “foto” de la onda. En la figura 7.14, se representa $y(x)$. λ es el período espacial de la onda.

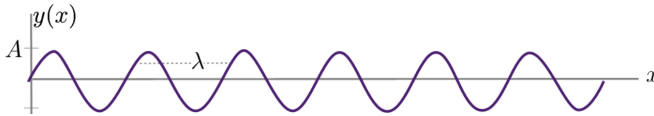


Fig. 7.14: Forma de la función de onda y en el instante t_0 a lo largo de la coordenada x del medio

- **Número de ondas** k (rad/m en el S.I.). Podemos encontrar la relación entre k y la longitud de onda teniendo en cuenta la definición de esta última:

$$k(x + \lambda) - \omega t + \phi = kx - \omega t + \phi + 2\pi$$

de donde encontramos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **Velocidad de propagación o de fase** v (m/s en el S.I.). Podemos encontrar la relación con ω y k , teniendo en cuenta que la fase debe ser una función de $x - vt$:

$$kx - \omega t + \phi = k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) + \phi = k(x - vt) + \phi$$

así

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- **Fase** $\varphi(x, t)$ (rad en el S.I.). Es el argumento de la función seno de (7.8): $\varphi(x, t) = kx - \omega t + \phi$. Se mide en rad, ¡nunca en grados! Así, ϕ es la fase **inicial**, en $t = 0$, y el origen $x = 0$. Los puntos con la misma fase presentan el mismo estado de movimiento.

Un **desfase** es un incremento de la fase $\Delta\varphi$:

- Entre dos puntos x en el mismo instante t : $\Delta\varphi = \varphi(x_2, t) - \varphi(x_1, t) = k(x_2 - x_1)$. Si $x_2 = x_1 + n\lambda$, con n entero, estos dos puntos tienen la misma fase, módulo 2π .
- Entre dos instantes t en el mismo punto x : $\Delta\varphi = \varphi(x, t_2) - \varphi(x, t_1) = \omega(t_2 - t_1)$.



Con el valor adecuado de ϕ , la misma onda (7.8) se puede escribir de varias maneras. Por ejemplo:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi') = A \sin(\omega t - kx + \phi'')$$

Para evaluar desfases entre dos funciones armónicas, las dos se tienen que expresar en forma de sin o las dos en forma de cos. En este texto, optaremos por sin.

Si la onda se propaga en el sentido contrario, decreciendo en x , como $y = f(x+vt)$, tendremos $y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi)$.

Problema 7.2.2. Por una cuerda se propaga la onda armónica siguiente:

$$y(x, t) = 3 \times 10^{-3} \cos \left[200\pi \left(t - \frac{x}{20} \right) \right] \quad (1)$$

donde todas las magnitudes están en el S.I. Para esta onda, averigua cuánto valen:

- la amplitud, el período, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de fase;
- la velocidad y la aceleración transversales máximas de un punto cualquiera de la cuerda;
- la distancia entre dos puntos consecutivos separados por un desfase de $\pi/3$ rad.

Solución

Para hacer que (1) se asemeje a (7.8), se puede escribir como:

$$y = 3 \times 10^{-3} \sin \left(10\pi x - 200\pi t + \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

a) Ahora, comparando (2) con (7.8), obtenemos:

Amplitud:	$A = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$
Número de ondas:	$k = 10\pi = 31,42 \text{ rad/m}$
Pulsación:	$\omega = 200\pi = 628,3 \text{ rad/s}$
Longitud de onda:	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{5} = 0,20 \text{ m}$
Período:	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{100} = 0,010 \text{ s}$
Velocidad de fase:	$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = 20 \text{ m/s}$

b) Todos los puntos de la cuerda hacen un MAS en la dirección del eje y . La velocidad y la aceleración de oscilación vienen dadas por:

$$v_{\text{osc}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$a_{\text{osc}} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t + \phi) = -\omega^2 y(x, t)$$



Los máximos valen:

- Máxima velocidad: $v_{\text{máx}} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\text{máx}} = \omega A = 0,6\pi = 1,885 \text{ m/s}$
- Máxima aceleración: $a_{\text{máx}} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{\text{máx}} = \omega^2 A = 120\pi^2 = 1184 \text{ m/s}^2$

c) La diferencia de fase vale $\Delta\varphi = k\Delta x$. Así, si $\Delta\varphi = \pi/3$ rad, tenemos:

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k} = \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{30} = 0,0333 \text{ m} \quad \blacksquare$$

7.3 De las leyes de Newton a la ecuación de ondas

La mecánica newtoniana predice la existencia de ondas en los medios elásticos y da la expresión de la velocidad de propagación en función de las propiedades del medio.

Ondas en una cuerda tensa

Sea una cuerda tensa muy flexible, de densidad lineal μ (kg/m en el S.I. de unidades), por la cual se propaga una onda transversal. La posición de la cuerda en equilibrio define el eje x . En la figura 7.15, se muestra un diferencial de cuerda, el correspondiente entre los puntos 1 y 2, en movimiento, y las dos tensiones \vec{F}_1 y \vec{F}_2 a que está sometido.

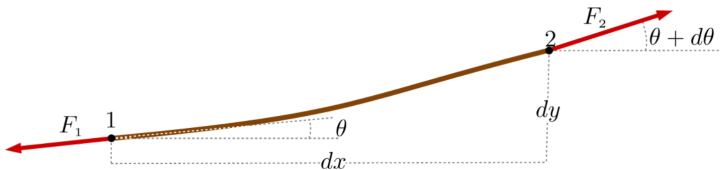


Fig. 7.15: Un diferencial de cuerda

Aplicaremos la segunda ley de Newton a este diferencial de cuerda, que trataremos como una partícula. Trataremos el problema para pequeñas oscilaciones y grandes tensiones. En consecuencia:

- $\theta \ll 1$ y $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$
- El diferencial de cuerda solo tiene un movimiento apreciable transversal.
- $dm = \mu dx$.
- Las tensiones \vec{F}_1 y \vec{F}_2 tienen el mismo módulo: $F_1 \approx F_2 \approx F$.
- La cuerda tensa en equilibrio es horizontal. La fuerza peso se puede despreciar.



Con estas suposiciones, la suma de las fuerzas transversales que actúan sobre $dm = \mu dx$ es:

$$\begin{aligned} F_y &= F_{1y} + F_{2y} = -F \sin \theta + F \sin(\theta + d\theta) \approx \\ &\approx F(-\theta + \theta + d\theta) = F d\theta \end{aligned}$$

Como la pendiente del diferencial de cuerda es la derivada:

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

tenemos:

$$d\theta = \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

Por otro lado, la aceleración transversal vale $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Así pues, la segunda ley de Newton, $F_y = dm a_y$, es:

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.10)$$

de donde resulta la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.11)$$

de la cual deducimos, por comparación con (7.5), que la velocidad de propagación de las ondas es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (7.12)$$

Si introducimos la sección S de la cuerda en la expresión (7.12), obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F/S}{\mu/S}} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (7.13)$$

donde ρ es la densidad volúmica. Volvemos a ver que la velocidad de propagación está relacionada con las características del medio según $\sqrt{\frac{\text{esfuerzo}}{\text{densidad}}}$.

Problema 7.3.1. Un hilo recto y largo de acero, de 0,50 mm de radio, se cuelga del techo. Si suspendemos del extremo libre un cuerpo de 10 kg de masa, determina la velocidad del pulso que se propaga por el hilo si desplazamos transversalmente un poco un punto cualquiera y lo soltamos.

Dato. La densidad del acero es $\rho_{\text{acer}} = 7,80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

**Solución**

Aplicamos la fórmula (7.12), tomando como tensión del hilo: $F = mg = (10 \text{ kg}) \times (9,81 \text{ m/s}^2) = 98,1 \text{ N}$.

La densidad lineal del hilo es:

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\ell} = \rho \pi r^2 = 6,123 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

Por tanto, la velocidad es $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 126,5 \text{ m/s}$. ■

Modelo simple de barra sólida

Sea una cadena muy larga, recta, de N parejas muelle-partícula idénticas, conectadas entre sí, como se ilustra en la figura 7.16. Los muelles tienen una constante recuperadora k y las partículas, una masa m . h es la distancia entre partículas en equilibrio. Fijémonos en una masa cualquiera, i , inicialmente en equilibrio en la posición x_i . La masa anterior está en x_{i-1} y la posterior, en x_{i+1} .

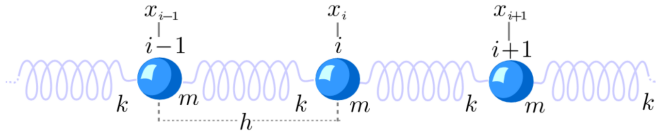


Fig. 7.16: Modelo simple de barra sólida en equilibrio

Cuando por esta cadena pasa una onda, las posiciones de las masas varían. La masa i se desplaza s_i .

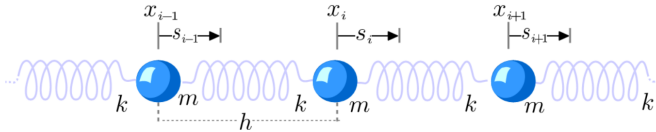


Fig. 7.17: Modelo simple de barra sólida en equilibrio cuando una onda se propaga longitudinalmente

Observando la figura 7.17, podemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula i aplicando la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2 s_i}{dt^2} = +k(s_{i+1} - s_i) - k(s_i - s_{i-1})$$

que, multiplicando y dividiendo por h , podemos reescribir como:

$$\frac{m}{h} \frac{d^2 s_i}{dt^2} = kh \left\{ \frac{\left(\frac{s_{i+1} - s_i}{h} \right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h} \right)}{h} \right\} \quad (7.14)$$

Si h es muy pequeña y N muy grande, podemos dar el paso al continuo: manteniendo la longitud de la cadena, $L = Nh$, finita, hacemos $N \rightarrow \infty$, a la vez que



$h \rightarrow 0$. En lugar de pensar que la partícula i , de posición de equilibrio x_i , se desplaza s_i , pensaremos que la partícula de posición de equilibrio x es desplazada s . En este caso, s pasa a ser una función continua de x y del tiempo t , $s(x, t)$. Así, podemos aproximar el miembro de la derecha de (7.14) con derivadas parciales:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\frac{s_{i+1} - s_i}{h} \right) - \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{h} \right)}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_{x+h}}{h} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (7.15)$$

Por otro lado, la derivada ordinaria del miembro de la izquierda de (7.14) la podemos entender como derivada parcial, puesto que s_i es ahora $s(x, t)$. Por tanto, de (7.15), (7.14) acaba quedando como la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \quad \text{con} \quad v = h \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.16)$$

Es decir, en la cadena de muelles-masas, una perturbación longitudinal se propaga de una masa a la siguiente como una onda de velocidad v dada por (7.16).

Como ya hemos comentado, (7.16) es correcta si la longitud h es muy pequeña con respecto a la longitud de onda de la onda armónica que se propague por la cadena. Si la onda que se propaga no es una onda armónica, sino un pulso ondulatorio, h debe ser mucho más pequeña que la anchura del pulso.

No hace falta que h sea la longitud natural del muelle. Si lo es, podemos entender que, en equilibrio, la cadena no está sometida a ninguna tensión externa. Si no lo es, entenderemos que, en equilibrio, la cadena está sometida a una tensión o compresión externa constante.

A pesar de que se trata de un modelo, podemos reescribir la velocidad de propagación (7.16), introduciendo la sección S de la cadena, como:

$$v = h \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{hk/S}{m/(hS)}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}} \quad (7.17)$$

donde $\rho = \frac{m}{hS}$ es la densidad volúmica media de la cadena y $\tau_1 = \frac{hk}{S}$ puede entenderse como el esfuerzo que hace que la deformación sea $\Delta L = L$. La tensión correspondiente es $F = \tau_1 S$.

Ondas longitudinales y transversales en una barra sólida

Consideramos una barra larga, homogénea, de longitud L , sección recta uniforme S y densidad volúmica ρ (v. figura 7.18). La barra tiene un comportamiento elástico lineal por tracción/compresión longitudinal. Ello quiere decir que, si se aplica a cada uno de los dos extremos de la barra una fuerza F de tracción (positiva, hacia fuera) o de compresión (negativa, hacia dentro), la barra se alargará o se acortará, respectivamente, una pequeña longitud ΔL proporcional al esfuerzo F/S :

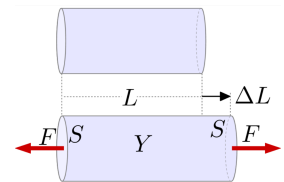


Fig. 7.18: Barra larga, homogénea, de longitud L , sección recta uniforme S y densidad volúmica ρ , sometida a una fuerza de tracción F



$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F}{S} \quad (7.18)$$

donde Y es el **módulo de Young** que caracteriza la elasticidad de la barra, tiene dimensiones de presión y se suele medir en $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa}$.

Podemos tratar la barra siguiendo el modelo de muelles-masas que hemos estudiado anteriormente. En particular, podemos utilizar (7.17) para la velocidad de las ondas longitudinales en la barra. El esfuerzo τ_1 lo encontramos a partir de (7.18) con $\Delta L = L$, es decir, $\tau_1 = Y$. La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en la barra, v_{long} , será así:

$$v_{long} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (7.19)$$

En la tabla 7.1, se dan los módulos de Young y de cizalladura, la densidad y la velocidad v_{long} de las ondas longitudinales para barras de varios materiales.

	Y	G	ρ	v_{long}	v_{tran}	Z
	($\times 10^9 \text{ Pa}$)	($\times 10^9 \text{ Pa}$)	(kg/m^3)	(m/s)	(m/s)	(rayl)
Acero	200	78	7800	5064	3160	$39,5 \times 10^6$
Aluminio	70	26	2700	5092	3100	$13,7 \times 10^6$
Cobre	130	49	8900	3821	2350	$34,0 \times 10^6$
Vidrio	~ 60	~ 24	~ 2500	~ 4900	~ 3100	$\sim 12,3 \times 10^6$

Tabla 7.1: Módulos de Young y de cizalladura, densidad y velocidades de las ondas longitudinales y transversales para barras de diversos materiales. Z es la impedancia acústica específica definida en el capítulo siguiente

La velocidad (7.19) es válida para barras delgadas y largas. En sólidos extensos, la velocidad de las ondas longitudinales viene dada por esta expresión, multiplicada por un factor que tiene en cuenta otras características elásticas de los materiales. Así, por ejemplo, para el acero, el factor de corrección es 1,15 y la velocidad resulta ser 5824 m/s.

En los sólidos, también se propagan ondas transversales. En este caso, la propagación depende del **módulo de cizalladura o torsión**, G , que relaciona el momento de un par de fuerzas aplicadas a las caras de una “rebanada de barra” con la deformación caracterizada por el ángulo θ (v. figura 7.19)

$$\theta = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$$

La velocidad de las ondas transversales v_{tran} , que damos sin demostración, es:

$$v_{tran} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.20)$$

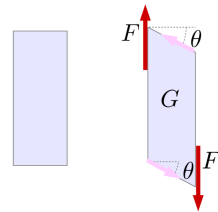


Fig. 7.19: El módulo G relaciona el momento aplicado a una rebanada de barra con la deformación caracterizada por θ



que también tiene la forma $\sqrt{\frac{\text{esfuerzo}}{\text{densidad}}}$. En la tabla 7.1, se dan los valores de G para algunos materiales. Se puede demostrar que, para cualquier material, $G < Y$. Así:

→ Para un mismo material, la velocidad de las ondas longitudinales es siempre mayor que la de las ondas transversales.

En los fluidos, $G = 0$ y la consecuencia es:

→ En el interior de los fluidos, tan solo se propagan ondas longitudinales.

Los terremotos son la manifestación en la superficie de la Tierra de las **ondas sísmicas** que se generan cuando, en un punto de la corteza terrestre, chocan o se mueven grandes bloques rocosos. Las ondas sísmicas que se crean comportan ondas longitudinales, transversales y otras. Parten del foco, el hipocentro, y se propagan como ondas esféricas. Sabemos que las ondas longitudinales son más rápidas (se conoce bastante bien la velocidad media de estas ondas) que las transversales y se detectan fácilmente por el hecho de que llegan antes a los observatorios sísmicos. Con tres observatorios que registren los terremotos, ya se puede determinar, por triangulación, la posición del hipocentro.

Ondas longitudinales en un fluido

Sea una onda plana longitudinal que se propaga en la dirección del eje x por un medio fluido. Consideramos un tubo de fluido, en la dirección de propagación, de sección recta constante S que, en equilibrio, tiene una densidad uniforme ρ . La onda se puede describir como una **onda de desplazamiento** o como una **onda de densidad**.

En el primer caso, la perturbación es el desplazamiento, s , de cada sección recta del tubo. Así, la sección inicialmente en x pasa a estar en $x + s$, donde s depende de x y de t : $s(x, t)$.

En la figura 7.20 (a), se muestra, en equilibrio, antes de que pase la onda, el tubo y un diferencial o “rebanada” de tubo limitado por las secciones x_1 y $x_2 = x_1 + dx$. El volumen de este diferencial es $S dx$ y la masa, $dm = \rho S dx$.

En la figura 7.20 (b), se muestra el mismo tubo, pero cuando está pasando la onda. Las secciones rectas que limitaban la masa dm en las posiciones x_1 y x_2 han pasado a estar en $x'_1 = x_1 + s_1$ y $x'_2 = x_2 + s_2$, siendo $s_2 = s_1 + ds$. El volumen de esta nueva rebanada diferencial es ahora $S(dx + ds)$.

Como ha cambiado el volumen que ocupaba la masa dm , también ha tenido que cambiar la densidad en el nuevo diferencial de volumen, que pasa de la de equilibrio

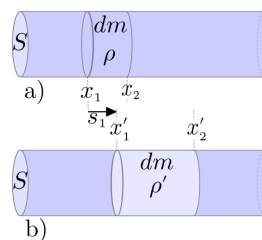


Fig. 7.20: Tubo de fluido en la dirección de propagación



ρ a $\rho + \rho_p$. La masa dm puede expresarse como:

$$dm = \rho S dx = (\rho + \rho_p) S (dx + ds)$$

de donde resulta:

$$\rho_p = -(\rho + \rho_p) \frac{ds}{dx}$$

Si restringimos el estudio a pequeñas perturbaciones, $\rho_p \ll \rho$ y, por consiguiente, $\rho + \rho_p \approx \rho$. Como s es una función de x y de t , podemos escribir ds/dx como una derivada parcial. Obtenemos así la relación entre la onda de densidad y la onda de desplazamiento:

$$\rho_p = -\rho \frac{\partial s}{\partial x} \quad (7.21)$$

Una perturbación de densidad ρ_p provoca una perturbación de presión p o **presión acústica**:

$$p \approx dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_C d\rho \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_C \rho_p$$

y, teniendo en cuenta (7.21):

$$p = -\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_C \frac{\partial s}{\partial x}$$

es decir:

$$p = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (7.22)$$

donde B es una magnitud propia de cada fluido, denominada **módulo de compresibilidad** que, para pequeñas variaciones de presión o densidad, es constante. El subíndice C en la derivada anterior es para indicar cómo se hace el proceso de compresión. B tiene dimensiones de presión y se mide en Pa. Tenemos:

$$B = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_C \quad \text{o también} \quad B = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_C \quad (7.23)$$

Podemos escribir (7.23) para pequeñas variaciones de volumen $\partial V \approx \Delta V$ y presión $\partial p \approx p$ (v. figura 7.21)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{B} p \quad (7.24)$$

En la figura 7.22, se muestra un cilindro largo de fluido, de sección recta S . Más concretamente, se muestra una “rebanada” de longitud dx y masa dm . La cara de la izquierda de la rebanada, situada en x , está sometida a la presión $p(x)$ y la cara de la derecha, situada en $x + dx$, sometida a la $p(x + dx)$. La fuerza total sobre la rebanada, $dF = -F' + F$, vale:

$$dF = [-p(x + dx) + p(x)]S = -S dp \quad (7.25)$$

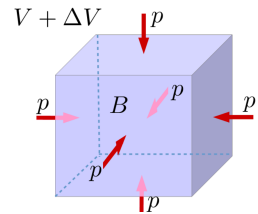


Fig. 7.21: Módulo de compresibilidad B

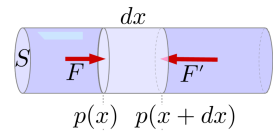


Fig. 7.22: Una rebanada de tubo de fluido de longitud dx y masa dm



Aplicamos la segunda ley de Newton a la rebanada, $dF = dm a$:

$$dm a = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

y, considerando (7.25) y (7.22):

$$dF = -S dp = -S B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

de donde resulta:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7.26)$$

que es la ecuación de las ondas longitudinales en el seno de un fluido.

Hasta ahora no hemos especificado si el fluido es un líquido o un gas. Necesitamos este dato para calcular (7.23), puesto que la derivada $(dp/d\rho)_C$ depende del proceso C de compresión que se haga. En el caso de los líquidos, el proceso es puramente mecánico¹ y el módulo B es constante. En la tabla 7.2, tenemos el módulo B y la densidad ρ de algunos líquidos, así como la velocidad v de las ondas correspondientes.

¹ Un proceso es puramente mecánico, en relación con la termodinámica, cuando no hay ni variación de temperatura ni transferencia de calor. Es decir, cuando el proceso es isotérmico y adiabático

Líquido	B ($\times 10^9$ Pa)	ρ (kg/m^3)	v (m/s)	Z (rayl)
Agua	2,1	1000	1450	$1,45 \times 10^6$
Glicerina	4,8	1261	1950	$2,46 \times 10^6$
Mercurio	27	13600	1400	$19,0 \times 10^6$

Tabla 7.2: Módulo de compresibilidad, densidad y velocidad de las ondas en líquidos. Z es la impedancia acústica específica definida en el capítulo siguiente

Ondas sonoras en un gas

Al comprimir un gas, aumenta la densidad, varía la temperatura y hay transporte de calor. Los dos procesos más importantes de compresión o expansión de un gas son el **isotérmico** y el **adiabático**. Según la termodinámica, las compresiones isotérmicas de un gas ideal, para las cuales $pV = \text{constante}$, comportan un transporte de calor que permite mantener constante la temperatura. En las compresiones adiabáticas, no hay transporte de calor. Los procesos rápidos suelen representarse bien por procesos adiabáticos.

En las ondas sonoras, las compresiones y las expansiones son tan rápidas y los gases tan malos conductores del calor que los podemos considerar procesos adiabáticos. La relación entre la presión y el volumen en el caso de un gas ideal es $pV^\gamma = \text{constante}$, y entre la presión y la densidad $p/\rho^\gamma = \text{constante}$, donde γ es el **coeficiente adiabático** del gas. Si el gas es monoatómico, $\gamma = 5/3$ y, si es diatómico, $\gamma = 7/5$. El aire puede ser considerado diatómico.



Para los procesos adiabáticos de un gas ideal, el módulo B (7.23), teniendo en cuenta $p/\rho^\gamma = \text{constante}$, es:

$$B = \rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{adiab}} = \gamma p \quad (7.27)$$

Así pues, a partir de (7.26) y (7.27), la velocidad de propagación de una onda sonora en un gas ideal es:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (7.28)$$

De acuerdo con la ecuación de estado de los gases ideales, $p = \frac{\rho}{M} RT$, donde M es la masa molar del gas, en kg; T es la temperatura absoluta, en kelvin, K; y R es la constante universal de los gases, $R = 8,314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$, la velocidad del sonido en un gas ideal se puede escribir como:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (7.29)$$

Para un gas dado, la velocidad solo depende de la temperatura.

En la tabla 7.3, se indican los valores de la velocidad del sonido en algunos gases ideales a 15°C y la densidad del gas a $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Gas	ρ (kg/m ³)	v (m/s)	Z (rayl)
Helio, He	0,169	916	155
Hidrógeno, H ₂	0,0845	1295	109
Aire	1,23	340	418

Tabla 7.3: Densidad y velocidad del sonido en gases, a $15^\circ\text{C} = 288,2 \text{ K}$. Z es la impedancia acústica específica, que se define en el capítulo siguiente

7.4 Análisis y síntesis de Fourier

El principio de superposición nos dice que, si tenemos dos ondas armónicas planas en un medio de velocidad de propagación v :

$$y_1(x, t) = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_{10}) \quad y_2(x, t) = A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_{20})$$

donde $\omega_1, k_1, \omega_2, k_2$ han de cumplir $v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$, la superposición de las dos, $y_1 + y_2$, también es una onda que se propaga en este medio.

Si $f(u)$ es una función periódica de u , de período T , entonces $f(u + T) = f(u)$, para cualquier u . El **teorema de Fourier** nos dice que toda función periódica de u , $f(u)$, de período T , puede ser descompuesta como una suma de funciones armónicas.²

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n u + \varphi_n) \quad (7.30)$$

² Si la función no es periódica, también se puede hacer una descomposición en funciones armónicas similar a (7.30), pero la diferencia es que, en lugar de un sumatorio para $\omega_n = n\omega_1$ lo que tendríamos es una integral y las ω pasarán a ser valores continuos



donde las frecuencias ω_n son múltiplos enteros de la **frecuencia fundamental** $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$:

$$\omega_n = n\omega_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y la función:

$$f_1 = A_1 \sin(\omega_1 u + \varphi_1)$$

es el **armónico fundamental**. Los otros términos, $A_2 \sin(\omega_2 u + \varphi_2)$, etc., son los **armónicos superiores**.

En cuanto a las amplitudes A_n , las relaciones A_n/A_1 (y las fases φ_n) son características de cada función $f(u)$.

En (7.30), la función $f(u)$ es una función periódica. Para que se trate de una onda periódica, solo hay que hacer la sustitución:

$$u = t - \frac{x}{v}$$

→ **Análisis de Fourier**. Toda onda $y(x - vt)$ periódica puede ser descompuesta en ondas armónicas.

Dada la onda periódica $y(x - vt)$, siempre la podemos expresar en la forma:

$$y(x - vt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t - nk_1 x + \varphi_n) \quad v = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{n\omega_1}{nk_1} \quad (7.31)$$

Cuando descomponemos una onda en ondas armónicas, decimos que hacemos el **análisis de Fourier de la onda**. Combinándolo con el principio de superposición, podemos afirmar lo siguiente:

→ **Síntesis de Fourier**. Toda onda periódica puede ser sintetizada a partir de la superposición de ondas armónicas.

Cuando construimos una onda a partir de ondas armónicas, decimos que hacemos la **síntesis de Fourier** de la onda.

Ejemplo. Sea $f(t)$ la **onda cuadrada positiva** (v. figura 7.23) definida como:

$$f(t) = \begin{cases} F_0, & \text{si } 0 < t < T/2 \\ 0, & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$$

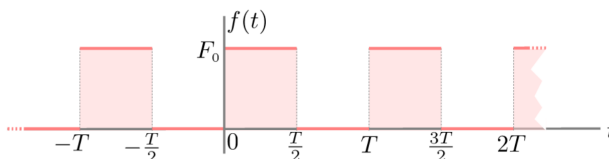


Fig. 7.23: Onda cuadrada positiva



Se puede demostrar que la función anterior se puede descomponer en la serie de Fourier de seno siguiente:

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + F_0 \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right) \quad (7.32)$$

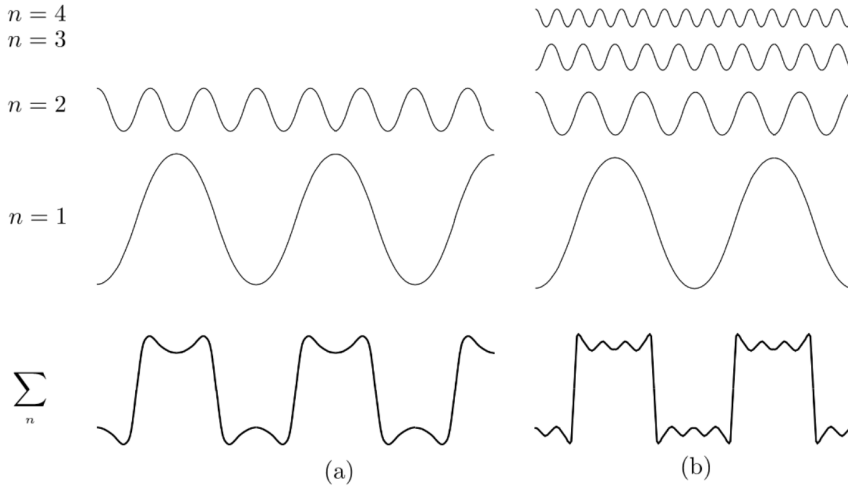


Fig. 7.24: Primeros términos de la serie de Fourier correspondiente a la onda cuadrada positiva

En la figura 7.24, se han representado los primeros términos de la serie (7.32), $n = 1, n = 2, \dots$, y las sumas respectivas, \sum_n . En la columna (a), solo hay los dos primeros términos y, en la (b), los cuatro primeros. Se observa que la suma de solo cuatro términos es ya una buena aproximación a la función (7.32). En la gráfica de la figura 7.25, se muestran las amplitudes relativas, A_n/A_1 , en función de la frecuencia, ω_n , para $n = 1, 2, 3 \dots$. El estudio de una señal periódica se denomina **análisis espectral**.

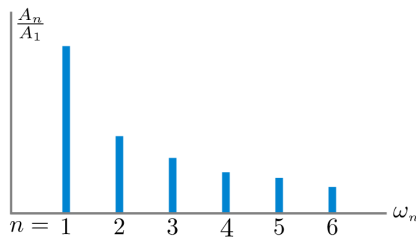


Fig. 7.25: Análisis espectral de la onda cuadrada positiva



→ 8

8 Fenómenos ondulatorios

Introducción

En este capítulo, estudiamos fenómenos relacionados con las ondas. Algunos de estos fenómenos están muy ligados a características específicas de las ondas, como el principio de superposición. Otros están relacionados con aspectos energéticos, cuando entendemos las ondas como un fenómeno de propagación y distribución de la energía a través del medio. Empezaremos estudiando estos últimos.

8.1 Potencia e intensidad de las ondas planas

Sabemos que, lo que se propaga en una onda es una perturbación de alguna de las propiedades del medio. Ello comporta siempre la propagación de energía.

Potencia de una onda armónica en una cuerda

Calculemos la potencia que transporta la onda armónica $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ cuando se propaga por una cuerda de densidad lineal μ sometida a la tensión F . Fijémonos que, si no hay pérdidas, esta potencia debe ser la misma que suministra el foco origen de las ondas.

Como hemos visto en la sección 7.3, la componente transversal y de la tensión F que el tramo de cuerda de la derecha hace sobre el tramo izquierdo es (v. figura 7.15):

$$F_y = F \sin \theta \approx F \tan \theta = F \frac{\partial y}{\partial x}$$

Esta fuerza transmite, hacia la derecha, una potencia de excitación instantánea P_{exc} dada por el producto de F_y por la velocidad transversal $\partial y / \partial t$ de cada elemento de la cuerda:

$$P_{\text{exc}} = \frac{dW}{dt} = F_y \frac{\partial y}{\partial t} \approx F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (8.1)$$

Si la onda es armónica, (8.1) se puede escribir:

$$P_{\text{exc}} = F k \omega A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$



Como $v = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ y $k = \omega/v$, la expresión para P_{exc} se puede escribir como

$$P_{\text{exc}} = \mu\omega^2 v A^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (8.2)$$

Esta potencia oscila entre 0 y $\mu\omega^2 v A^2$. En la práctica, tiene más interés la potencia media \bar{P}_{exc} , que podemos calcular como la integral de P_{exc} durante un período T , dividida por T , es decir:

$$\bar{P}_{\text{exc}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P_{\text{exc}} dt \quad (8.3)$$

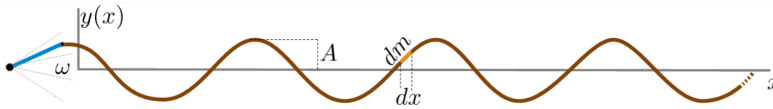
Sustituyendo (8.2), encontramos:

$$\bar{P}_{\text{exc}} = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2 v \quad (8.4)$$

El problema siguiente trata de encontrar el resultado (8.4) de una forma alternativa más directa.

Problema 8.1.1. Calcula la energía por unidad de longitud que tiene una cuerda por la cual se propaga una onda armónica y, después, la potencia necesaria que se debe ir suministrando a la cuerda para mantener la onda.

Solución



Solución del problema 8.1.1

Consideramos la onda armónica $y = A \sin(kx - \omega t)$ que se propaga a la velocidad v a través de una cuerda de densidad lineal μ . Cada diferencial de cuerda puede entenderse como una partícula de masa $dm = \mu dx$, sometida a un MAS de amplitud A y frecuencia ω (v. figura).

Del estudio del MAS, sabemos que el elemento dm tiene la energía dE , dada por:

$$dE = \frac{1}{2} (\omega^2 dm) A^2 = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2 dx$$

Por tanto, la energía por unidad de longitud de la cuerda vale:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2$$

Para propagar una onda armónica, hay que ir cediendo la energía a lo largo del tiempo de forma continua y sin interrupciones. Por ejemplo, atando un extremo de la cuerda a una plaqueta vibratoria controlada por un pequeño motor. La energía que en un dt pasará, a la velocidad v , por un punto dado será la que tiene el elemento de cuerda $dx = v dt$. La potencia, entendida como la energía transportada dE en un dt , $P = \frac{dE}{dt}$ será:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2 v$$

que coincide con la potencia de excitación media \bar{P}_{exc} (8.4). ■



Intensidad de una onda sonora plana

¿Qué potencia media transporta una onda armónica longitudinal que se propaga por un medio contenido en un tubo muy largo de sección recta S ? El medio puede ser sólido o fluido. Como en el ejemplo anterior, nos basaremos en el MAS de un diferencial o “rebanada” del medio interior del tubo, situado en x y de grosor dx . Si el medio tiene una densidad ρ , la masa del diferencial vale $dm = \rho S dx$ (v. figura 8.1).

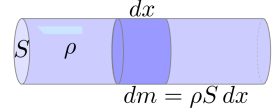


Fig. 8.1: Rebanada del medio interior del tubo, situado en x y de grosor dx

Debido a que la masa dm situada en x describe un MAS según la onda armónica $s(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$, podemos decir que:

- Tiene una energía cinética dE_c :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S dx \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

- Tiene una energía potencial elástica dU . La masa es $dm = \rho S dx$. Por tanto, la energía potencial asociada es:

$$dU = \frac{1}{2} dm \omega^2 s^2 = \frac{1}{2} \rho S dx \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

- La energía total es así:

$$dE = dE_c + dU = \frac{1}{2} \rho dx \omega^2 A^2 S$$

Esta energía está contenida en el volumen $dV = S dx = S v dt$. Por tanto, $dm = \rho dV = \rho S v dt$. Así, la energía que atraviesa S en cada dt es:

$$dE = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 S v dt$$

Definimos la impedancia **acústica específica** del medio como:

$$Z = \rho v \quad (8.5)$$

La energía dE anterior se puede escribir:

$$dE = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 S dt$$

y la potencia de una onda plana armónica a través de una superficie transversal S , como:

$$P_s = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 S \quad (8.6)$$

Definimos la **intensidad de una onda** como la potencia que se transmite por unidad de superficie transversal:

$$I = \frac{dP_s}{dS} \quad (8.7)$$



La intensidad asociada a la potencia (8.6) es:

$$I = \frac{dP_s}{dS} = \frac{dE}{S dt} = \frac{1}{2} Z(\omega A)^2 \quad (8.8)$$

En el S.I., la unidad de intensidad es W/m^2 . La unidad de la impedancia acústica específica (8.5) es $\text{kg}/\text{m}^2\text{s} = \text{rayl}$ (en honor a Lord Rayleigh). Las tablas 7.1, 7.2 y 7.3 proporcionan las impedancias de varios medios.

Intensidad de las ondas sonoras planas como ondas de presión

En (7.22), hemos visto que la presión acústica, p , se relaciona con la elongación s en la forma:

$$p = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (8.9)$$

Si la onda es armónica, $s(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ y la presión acústica será:

$$p(x, t) = -B \frac{\partial s}{\partial x} = B A k \sin(\omega t - kx + \pi/2) \quad (8.10)$$

de donde encontramos lo siguiente:

- La onda de presión $p(x, t)$ está desfasada $\pi/2$ rad respecto a la onda de desplazamiento $s(x, t)$. Cuando la elongación s es, en valor absoluto, máxima, la presión acústica es cero, y al revés.
- De (8.10) y (7.26), encontramos que la amplitud de la onda de presión, \mathcal{P} , se relaciona con la amplitud de la onda de desplazamiento A en la forma:

$$\mathcal{P} = B A k = \rho v^2 A \frac{\omega}{v} = \rho \omega v A \quad (8.11)$$

La intensidad de las ondas sonoras, según (8.8) con (8.5), la podemos expresar en función de \mathcal{P} , teniendo en cuenta (8.11):

$$I = \frac{1}{2} Z(\omega A)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}^2}{Z} \quad (8.12)$$

Nivel de intensidad y decibelios

Para la especie humana, el intervalo de frecuencias audible va de 20 Hz a 20 kHz. Los sonidos por debajo de 250 Hz se califican de **graves** o tonos bajos. Por encima de 5 kHz, se califican de **agudos** o tonos altos. Por debajo de 20 Hz, hablamos de **infrasonidos**, y por encima de los 20 kHz, de **ultrasonidos**.

La intensidad mínima audible o umbral depende de la frecuencia. Para los humanos, entre 500 Hz y 5000 Hz es $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ y crece cuando la frecuencia está lejos



de este intervalo. Así, la intensidad umbral para 100 Hz o 18 kHz es del orden de 1000 veces I_0 .

En la práctica, para expresar la intensidad sonora recibida por una persona, se utiliza el **nivel de intensidad**, β , que se relaciona con la intensidad I a través del logaritmo decimal:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{8.13}$$

donde I_0 es la intensidad mínima mencionada, de 10^{-12} W/m^2 . β se expresa en **decibelios**, dB.

El nivel de intensidad β más débil que se puede captar es de $\beta = 0$, que corresponde a $I = I_0$. El nivel de intensidad correspondiente al umbral del sonido doloroso es de 120 dB, correspondiente a $I = 1 \text{ W/m}^2$. Entre 10 dB y 110 dB, hay todas las intensidades habituales:

- en una biblioteca tranquila, el sonido puede estar entre 30 y 40 dB;
- en la calle, con tráfico moderado, entre 50 y 70 dB;
- cerca de una máquina muy ruidosa, es de unos 100 dB, etc.

En la figura 8.2, se muestra un sonómetro, aparato que mide los niveles de intensidad en situaciones cotidianas.

Problema 8.1.2. Si los sonidos más fuertes y los más débiles que podemos oír están entre los 120 dB y los 0 dB, ¿a qué amplitudes de onda de desplazamiento y de onda de presión acústica en el aire corresponden?

Solución

Teniendo en cuenta (8.12), las amplitudes A del desplazamiento y de la presión acústica \mathcal{P} en función de la intensidad del sonido valen:

$$A = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{Z}}, \quad \mathcal{P} = \sqrt{2ZI}$$

con $Z = 418 \text{ rayl}$, como se indica en la tabla 7.3. En cuanto a la intensidad, según (8.13), tenemos

$$I = I_0 10^{\beta/10}, \quad \text{con } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Utilizando estas expresiones, obtenemos la tabla siguiente:

f	$\beta =$	0 dB	60 dB	120 dB
100 Hz	$A \text{ (m)} =$	$1,10 \times 10^{-10}$	$1,10 \times 10^{-7}$	$1,10 \times 10^{-4}$
5 kHz	$A \text{ (m)} =$	$2,20 \times 10^{-12}$	$2,20 \times 10^{-9}$	$2,20 \times 10^{-6}$
-	$\mathcal{P} \text{ (Pa)} =$	$2,89 \times 10^{-5}$	$2,89 \times 10^{-2}$	28,9



Fig. 8.2: Sonómetro para medir el nivel de intensidad del sonido en las situaciones cotidianas. Los sonómetros responden a la presión de la onda sonora

Tabla de la solución del problema 8.1.2. Amplitudes para dos frecuencias y tres niveles de intensidad.



Atenuación por absorción

Cuando una onda se propaga por un **medio absorbente**, hay una pérdida de energía o una **atenuación por absorción**. Experimentalmente, sabemos que la pérdida de intensidad de una onda plana, dI , al atravesar un grosor dx , es proporcional al grosor y a la intensidad I incidente. El factor de proporcionalidad se denomina **coeficiente de absorción del medio**, α :

$$dI = -\alpha I dx \quad (8.14)$$

donde el signo indica que la intensidad disminuye. Integrando (8.14), tenemos:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = \int_0^x -\alpha dx \Rightarrow I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (8.15)$$

La intensidad de una onda plana disminuye exponencialmente al propagarse por un medio absorbente.

8.2 Potencia e intensidad de las ondas esféricas

Cuando el foco suministra una potencia determinada, esta se reparte uniformemente por el frente de onda. La intensidad de la onda es la potencia media transmitida por unidad de área normal a la dirección de propagación de la onda. La intensidad de la onda en los puntos de la esfera de radio r , centrada en el foco, es:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (8.16)$$

Si el medio no disipa energía, la potencia media que atraviesa la superficie de una esfera de radio r_1 debe ser la misma que la que más tarde atraviesa la de radio r_2 , $r_2 > r_1$ (v. figura 8.3). Si I_1 y I_2 son las intensidades respectivas, tendremos:

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

es decir:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (8.17)$$

Por tanto, a pesar de que el medio no sea absorbente, una onda esférica manifiesta una **atenuación geométrica**.

→ La intensidad de una onda esférica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.

Debido a que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, el resultado anterior nos proporciona un argumento físico para entender que las amplitudes de las ondas esféricas sean inversamente proporcionales a la distancia r al foco. Si en $r = r_0$ la amplitud es s_0 , entonces:

$$s(r, t) = \frac{s_0 r_0}{r} \sin(kr - \omega t) \quad (8.18)$$

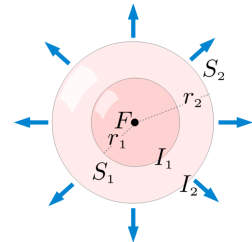


Fig. 8.3: Una onda esférica



donde hemos sustituido el kx de las ondas planas (7.8) por kr , porque ahora la coordenada r cumple el mismo papel que x en las ondas planas. Los frentes de onda son esferas de radio r concéntricas, con el foco situado en $r = 0$.

En un medio absorbente, una onda esférica experimenta una atenuación geométrica y por absorción. Teniendo en cuenta (8.18) y (8.15), tenemos:

$$I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2} e^{-\alpha r} \quad s(r, t) = A_0 \frac{r_0}{r} e^{-\alpha r/2} \sin(kr - \omega t) \quad (8.19)$$

Estas expresiones son válidas para las ondas sonoras en el aire. Cerca del foco, la atenuación dominante es la geométrica. Lejos del foco, la atenuación dominante es por absorción.

Problema 8.2.1. Un altavoz emite a una potencia $P = 0,5 \text{ W}$ uniformemente en todas las direcciones.

- ¿Qué nivel de intensidad tiene un punto A situado a 10 m del altavoz?
- ¿A qué distancia el sonido tiene un nivel de intensidad de 100 dB?
- ¿Cuántos altavoces, todos iguales al del enunciado, tendrían que estar juntos para que el nivel de intensidad en el punto A se incrementara en 20 dB?

Solución

a) Tan solo debemos aplicar las expresiones (8.13) y (8.16):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 3,98 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{3,98 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 86,0 \text{ dB}$$

b) Utilizamos de nuevo (8.13) y (8.16), pero ahora la incógnita es r :

$$100 = 10 \log \left(\frac{0,5}{4\pi r^2} \right) \frac{1}{10^{-12}}$$

Despejando r , resulta: $r = 1,99 \text{ m}$.

c) Si en el apartado a el nivel era β , ahora será $\beta' = \beta + 20$. Debido a que la intensidad I de n altavoces (no coherentes) es n veces la intensidad de un altavoz

$$\beta + 20 = 10 \log \frac{nI}{I_0} = 10 \log n + 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log n + \beta$$

de donde obtenemos:

$$n = 10^{20/10} = 10^2 = 100$$

■

8.3 Transmisión y reflexión de una onda en un cambio de medio

En el medio 1, se propaga una onda armónica plana en la dirección y el sentido del eje x . ¿Qué pasa cuando la onda incide en $x = 0$, donde hay un cambio de medio? Para simplificar, consideramos el caso en que la frontera entre los dos medios, 1 y 2, es normal a la onda incidente. El estudio de la incidencia oblicua daría lugar al fenómeno de la **refracción**.

Analizaremos ondas longitudinales en los medios 1 y 2, que podemos caracterizar por sus impedancias acústicas específicas Z_1 y Z_2 y velocidades de propagación v_1 y v_2 , respectivamente. Los subíndices I , R y T etiquetarán las ondas incidente, reflejada y transmitida. Las densidades de los medios son, según (8.5), $\rho_1 = Z_1/v_1$ y $\rho_2 = Z_2/v_2$, y supondremos que la frontera está en $x = 0$ (v. figura 8.4).

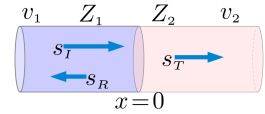


Fig. 8.4: Ondas longitudinales en un cambio de medio

Las ondas incidente, reflejada y transmitida son:

$$\begin{aligned} s_I(x - v_1 t) &= A_I \sin(\omega_I t - k_I x), & s_R(x + v_1 t) &= A_R \sin(\omega_R t + k_R x + \varphi_R) \\ s_T(x - v_2 t) &= A_T \sin(\omega_T t - k_T x + \varphi_T) \end{aligned} \quad (8.20)$$

con las condiciones:

$$v_1 = \frac{\omega_I}{k_I} = \frac{\omega_R}{k_R} \quad v_2 = \frac{\omega_T}{k_T} \quad (8.21)$$

Utilizando el principio de superposición, tenemos:

$$s_1(x, t) = s_I(x, t) + s_R(x, t) \quad s_2(x, t) = s_T(x, t) \quad (8.22)$$

Se tienen que satisfacer las condiciones siguientes:

- a) Continuidad del medio: en todo instante de tiempo t , en el plano $x = 0$ entre medios, se debe cumplir:

$$s_1(0, t) = s_2(0, t) \quad (8.23)$$

que, teniendo en cuenta (8.22) y (8.20), es:

$$A_I \sin(\omega_I t) + A_R \sin(\omega_R t + \varphi_R) = A_T \sin(\omega_T t + \varphi_T) \quad (8.24)$$

- b) Conservación de la energía: si los medios no son disipativos, la intensidad de la onda reflejada, más la de la onda transmitida, han de igualar la de la onda incidente: $I_I = I_R + I_T$. Según (8.8), tenemos:

$$Z_1 \omega_R^2 A_R^2 + Z_2 \omega_T^2 A_T^2 = Z_1 \omega_I^2 A_I^2 \quad (8.25)$$



c) Conservación de la cantidad de movimiento: observando la figura 8.4, podemos entender la situación como una serie continua de choques, de izquierda a derecha. En $x = 0$, y para todo t , en un dt , la masa $dm_1 = \rho_1 S v_1 dt$ (S es la sección del tubo), que va a la velocidad de oscilación $\frac{\partial s_I}{\partial t}(0, t)$, choca con una masa $dm_2 = \rho_2 S v_2 dt$ en reposo. Debido al choque, dm_1 y dm_2 tienen velocidades $\frac{\partial s_R}{\partial t}(0, t)$ y $\frac{\partial s_T}{\partial t}(0, t)$, respectivamente. La conservación de la cantidad de movimiento se puede escribir:

$$\frac{Z_1^2}{\rho_1} \frac{\partial s_1}{\partial x}(0, t) = \frac{Z_2^2}{\rho_2} \frac{\partial s_2}{\partial x}(0, t) \quad (8.26)$$

que, si es necesario, podemos explicitar, teniendo en cuenta las expresiones (8.20).

Con estas tres condiciones, se puede demostrar:

1) Las frecuencias ω_R y ω_T son iguales a la frecuencia incidente, ω_I :

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T \equiv \omega \quad (8.27)$$

2) Los cambios de fase φ_R y φ_T son 0 o π . Debido a que $\varphi = \pi$ es equivalente a $\varphi = 0$ con una amplitud negativa, tomamos $\varphi_R = \varphi_T = 0$ y damos la posibilidad de que $A_{TR} \leq 0$.

Teniendo en cuenta (8.24), para el caso particular $\omega t = \pi/2$, y (8.25), encontramos las igualdades:

$$A_I + A_R = A_T \quad , \quad Z_1 A_R^2 + Z_2 A_T^2 = Z_1 A_I^2 \quad (8.28)$$

de las cuales obtenemos:

$$\frac{A_R}{A_I} = a_R \quad , \text{con} \quad a_R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (8.29)$$

$$\frac{A_T}{A_I} = a_T \quad , \text{con} \quad a_T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (8.30)$$

donde a_R y a_T son los **coeficientes de reflexión y transmisión de amplitud**.

Las intensidades de las ondas incidente, reflejada y transmitida son:

$$I_I = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_I^2 \quad I_R = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_R^2 \quad I_T = \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_T^2$$

Teniendo en cuenta (8.29) y (8.30), encontramos:

$$\frac{I_R}{I_I} = p_R \quad , \text{con} \quad p_R = a_R^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (8.31)$$



$$\frac{I_T}{I_I} = p_T \quad , \text{con} \quad p_T = \frac{Z_2}{Z_1} a_T^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (8.32)$$

donde p_R y p_T son los **coeficientes de reflexión y transmisión de potencia**.

Con estas relaciones, podemos hacer la tabla 8.1 de casos según el valor relativo de las impedancias Z_1 y Z_2 .

- | | | | | | |
|----|---------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| a) | Si $Z_1 \sim Z_2$: | $a_R \approx 0$, | $a_T \approx 1$, | $p_R \approx 0$, | $p_T \approx 1$ |
| b) | Si $Z_1 \ll Z_2$: | $a_R \approx -1$, | $a_T \approx 0$, | $p_R \approx 1$, | $p_T \approx 0$ |
| c) | Si $Z_1 < Z_2$: | $a_R < 0$, | $a_T > 0$, | | |
| d) | Si $Z_1 > Z_2$: | $a_R > 0$, | $a_T > 0$, | | |

Tabla 8.1: Coeficientes de reflexión y transmisión para diferentes relaciones de las impedancias

Podemos añadir los comentarios siguientes:

- Si las impedancias son parecidas, casi toda la intensidad pasa a la onda transmitida.
- Si las impedancias son muy diferentes, casi toda la intensidad se refleja (v. ejemplo en el problema 8.3.1).
- Si $Z_1 < Z_2$, entonces $A_R < 0$, es decir, la onda reflejada experimenta un cambio de fase de π .

Los coeficientes de reflexión y transmisión para ondas armónicas han resultado ser independientes de la frecuencia. En consecuencia, los coeficientes obtenidos se pueden aplicar también a ondas no armónicas.

Problema 8.3.1. Una onda sonora plana que se propaga por el aire incide normalmente en el agua de una piscina. ¿Qué porcentaje de intensidad pasa al agua? ¿Cuántos decibelios disminuye el nivel de intensidad al pasar al agua?

Solución

Según las tablas 7.3 y 7.2, la impedancia del aire es 418 rayl y la del agua, $1,45 \times 10^6$ rayl. Utilizando (8.32), encontramos que la potencia que pasa al agua es:

$$p_T = 0,00115 = 0,115 \%$$

Podemos decir que el 99,88% de la intensidad se refleja.

Según (8.13), la pérdida del nivel de intensidad al pasar al agua vale:

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_{\text{agua}}}{I_0} - 10 \log \frac{I_{\text{aire}}}{I_0} = 10 \log \frac{I_{\text{agua}}}{I_{\text{aire}}} = 10 \log p_T = -29,4 \text{ dB} \quad \blacksquare$$



8.4 Interferencias y batidos

Superposición de dos ondas armónicas

Cuando dos ondas armónicas de la misma frecuencia ω se encuentran en un punto P , este oscila armónicamente (v. figura 8.5).

Si el punto P está a una distancia r_1 del foco F_1 y a r_2 del F_2 , las elongaciones en el punto P pueden ser escritas:

$$s_1(r_1, t) = A_1 \sin(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \quad s_2(r_2, t) = A_2 \sin(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \quad (8.33)$$

La elongación resultante en P es la superposición de s_1 y s_2 :

$$s(P, t) = s_1(r_1, t) + s_2(r_2, t)$$

Utilizando la notación $\phi_1 = -kr_1 + \varphi_1$ y $\phi_2 = -kr_2 + \varphi_2$, tenemos:

$$\begin{aligned} s(P, t) &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = \\ &= \sin \omega t [A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2] + \cos \omega t [A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2] \end{aligned} \quad (8.34)$$

Queremos escribir esta suma en la forma:

$$s(P, t) = A_R \sin(\omega t + \phi) \quad (8.35)$$

donde nos hace falta A_R y ϕ . Por eso, desarrollamos (8.35) e identificamos con (8.34):

$$s(P, t) = \sin \omega t A_R \cos \phi + \cos \omega t A_R \sin \phi$$

y obtenemos:

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad (8.36)$$

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (8.37)$$

En el caso más simple, donde $A_1 = A_2 = A$, queda:

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (8.38)$$

Interferencias

Suponemos que las amplitudes de las dos ondas son iguales. $s(P, t)$ es:

$$s(P, t) = A_R \sin(\omega t + \phi) = 2A \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

Sustituyendo ϕ_1 y ϕ_2 y haciendo $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, obtenemos:¹

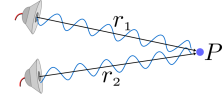


Fig. 8.5: Dos ondas planas armónicas se encuentran en un punto P

¹ Recordemos que $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$



$$s(P, t) = 2A \cos\left(\frac{k\Delta r}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$s(P, t)$ es un MAS de amplitud:

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{k\Delta r}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (8.39)$$

A_R depende de la diferencia de caminos recorridos, Δr , y del desfase inicial entre las dos ondas, $\Delta\varphi$. Destacamos:

→ **Interferencia constructiva:** la amplitud A_R es máxima, $A_{R_{\max}} = 2A$, si

$$\pi \frac{\Delta r}{\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2} = 2n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (8.40)$$

→ **Interferencia destructiva:** la amplitud A_R es nula, $A_{R_{\min}} = 0$, si:

$$\pi \frac{\Delta r}{\lambda} - \frac{\Delta\varphi}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (8.41)$$

También destacamos dos casos muy habituales:

→ Las dos ondas están *en fase*: $\Delta\varphi = 0 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2 \dots$

$$\text{Int. constructiva:} \quad \Delta r = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (8.42)$$

$$\text{Int. destructiva:} \quad \Delta r = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (8.43)$$

→ Las dos ondas están *en oposición de fase*: $\Delta\varphi = \pi \pm 2n\pi$:

$$\text{Int. constructiva:} \quad \Delta r = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (8.44)$$

$$\text{Int. destructiva:} \quad \Delta r = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (8.45)$$

Si las amplitudes no son iguales, las condiciones de interferencia son las mismas. Ni el mínimo de amplitud, $A_{R_{\min}}$, será nulo ni el máximo, $A_{R_{\max}}$, será $2A$. Obtendremos:

$$A_{R_{\min}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| \quad (8.46)$$

$$A_{R_{\max}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 \quad (8.47)$$



Interferencias y coherencia

En todo lo que hemos dicho con respecto a la interferencia, hay un detalle fundamental: el desfase inicial $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ debe ser constante a lo largo del tiempo. Ello se cumple si los focos son fuentes emisoras coherentes. Las **fuentes coherentes** son focos que proporcionan ondas cuyas diferencias de fase son independientes del tiempo.

Problema 8.4.1. Dos personas están cantando a la misma potencia. Aunque emitan en la misma frecuencia, las ondas emitidas no serán coherentes.

- a) Si en un punto P , situado a la misma distancia de las dos personas, la intensidad de una de las dos es I , ¿cuánto vale la intensidad en el punto P y en cuántos decibelios se incrementa el nivel de intensidad si cantan las dos?

Las ondas son ahora emitidas por dos altavoces coherentes de la misma frecuencia e interfieren en P constructivamente.

- b) ¿Cuánto vale la intensidad total en P ? ¿Cuál es el nivel de intensidad?

Solución

- a) Al no cumplirse la condición de coherencia, no hay ninguna interferencia y las intensidades son proporcionales a la energía. La intensidad total es la suma de las dos intensidades, es decir: $I_{\text{total}} = I + I = 2I$.

El nivel de intensidad, al pasar de una voz a dos voces (pasamos de I a $2I$), se incrementa en: $\Delta\beta_{nc} = 10 \ln 2 = 3,0 \text{ dB}$. El subíndice nc quiere decir no coherente.

- b) En una onda armónica, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud A : $I = \alpha A^2$. Si en P hay una interferencia constructiva, la amplitud en P valdrá $2A$ y la intensidad correspondiente será:

$$I_{\text{total}} = \alpha(2A)^2 = 4\alpha A^2 = 4I$$

y el nivel de intensidad se incrementa en: $\Delta\beta_c = 10 \ln 2^2 = 20 \ln 2 = 2\Delta\beta_{nc} = 6,0 \text{ dB}$.

Problema 8.4.2. Dos altavoces, A y B , coherentes y en fase, emiten ondas sonoras de la misma frecuencia que llegan con la misma intensidad a un oyente O situado a 4 m de A y a 3 m de B . ¿Qué frecuencias f_n no podrá oír bien el oyente?

Dato: La temperatura es de 15°C ; por consiguiente, la velocidad del sonido es 340 m/s .

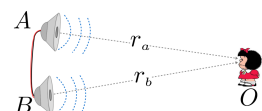


Figura del problema 8.4.2

**Solución**

Debido a que los altavoces emiten con coherencia, las ondas sonoras de los dos altavoces experimentarán interferencias. Las frecuencias f que el oyente tendrá dificultades para oír serán las que provoquen interferencias destructivas. Por tanto, como los altavoces emiten en fase, debemos aplicar la igualdad (8.43): $\Delta r = (2n + 1)\lambda/2$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y como $\lambda = v/f$ y $\Delta r = r_b - r_a = 1$ m, la condición de interferencia destructiva es:

$$\Delta r = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} = (2n + 1)\frac{v}{2f}$$

es decir:

$$f_{\text{dest}} = (2n + 1)\frac{v}{2\Delta r}$$

Con los datos $\Delta r = 1$ m, $v = 340$ m/s, y $(2n + 1) = 1, 3, 5, \dots$ encontramos:

$$f_{\text{dest}} = 170 \text{ Hz}, 510 \text{ Hz}, 850 \text{ Hz}, 1190 \text{ Hz} \dots \text{ etc.} \quad \blacksquare$$

Batidos

Se producen **batidos** cuando superponemos en un punto P dos ondas armónicas de frecuencias ligeramente diferentes. Supondremos que, en P , tienen la misma amplitud (v. figura 8.5 de la página 205):

$$s_1(r_1, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) \quad s_2(r_2, t) = A \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_1) \quad (8.48)$$

con $\omega_2 \gtrsim \omega_1$: $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ con $\Delta\omega \ll \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Sumando s_1 y s_2 , con $\phi_1 = -k_1 r_1 + \varphi_1$ y $\phi_2 = -k_2 r_2 + \varphi_2$, obtenemos la elongación del punto P , $s(P, t)$:

$$s(P, t) = 2A \cos\left(\frac{t\Delta\omega}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (8.49)$$

que es parecida a la de un MAS de frecuencia ω , prácticamente la misma que la de las ondas originales, pero con una amplitud A_R :

$$A_R = 2A \cos\left(\frac{t\Delta\omega}{2} + \phi\right) \quad (8.50)$$

A_R depende armónicamente del tiempo, con una frecuencia $\Delta\omega/2$. ϕ es una fase que contiene la dependencia en r_1 y r_2 y que, para un punto fijado P , es una constante.

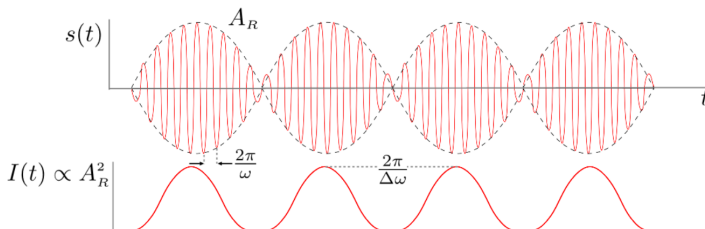


Fig. 8.6: Batidos. Gráficas para la elongación y la intensidad



La intensidad $I \propto A_R^2$ tiene un período que es la mitad que el de la amplitud A_R (v. gráfica de la figura 8.6). Por tanto, si, por ejemplo, se trata de ondas sonoras, el receptor situado en P percibe la intensidad de los batidos con una frecuencia doble que la de (8.50):

$$\omega_{\text{bat}} = |\omega_2 - \omega_1| = \Delta\omega \quad (8.51)$$

Una forma muy simple de producir batidos sonoros es, como se muestra en la figura 8.7, haciendo sonar simultáneamente dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes, por ejemplo, $f = 440$ Hz y $f' = 437$ Hz. Los batidos harán que la intensidad varíe con una frecuencia $f_{\text{bat}} = \Delta f = 440 - 437 = 3$ Hz.

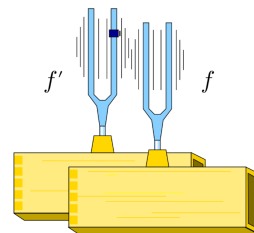


Fig. 8.7: Producción de batidos con dos diapasones muy parecidos

8.5 Ondas estacionarias

En la sección 8.3, hemos visto que, cuando una onda llega a un cambio de medio, una parte de ella se refleja. Si las impedancias son muy diferentes, prácticamente toda la onda se refleja. Esto es lo que pasa cuando una onda llega al final del medio y el siguiente es muy diferente. Debido a que, en realidad, todos los medios son limitados, a la propagación de la onda inicial habrá que superponer la onda reflejada al final del medio. Esta última podría presentar un cambio de fase de π rad.

Estudiamos la superposición de dos ondas planas armónicas de la misma amplitud y frecuencia, pero que se propagan en sentidos contrarios. Una puede ser la inicial y la otra, la reflejada. Tenemos:

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_1) \quad y_2(x, t) = A \sin(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (8.52)$$

donde φ_1 y φ_2 son constantes. Aplicando (8.35, 8.38), encontramos que $y = y_1 + y_2$ es

$$y(x, t) = 2A \cos(kx + \phi) \sin(\omega t + \phi') \quad (8.53)$$

donde $\phi = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, $\phi' = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. Veremos que ϕ y ϕ' son irrelevantes.

La superposición de dos ondas es siempre una onda. Por tanto, (8.53) lo es. Pero también vemos que esta onda no se propaga: todo punto x hace un MAS de frecuencia ω y amplitud A_R , que depende de x en la forma:

$$A_R(x) = 2A \cos(kx + \phi) \quad (8.54)$$

pero que no depende de t . Hay puntos que nunca oscilan, $A_R = 0$; son los **nodos**. Otros oscilan siempre con la máxima amplitud, $2A$; son los **vientres o antinodos**.

Debido a que $k = 2\pi/\lambda$, las posiciones de los vientres y nodos son, según (8.54):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vientres:} \quad \cos(kx + \phi) = \pm 1, \quad \text{de donde} \quad \frac{2\pi}{\lambda} x_n + \phi = n\pi \\ \text{Nodos:} \quad \cos(kx + \phi) = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{2\pi}{\lambda} x_n + \phi = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



donde $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos, n y $n + 1$, es:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2} \quad (8.55)$$

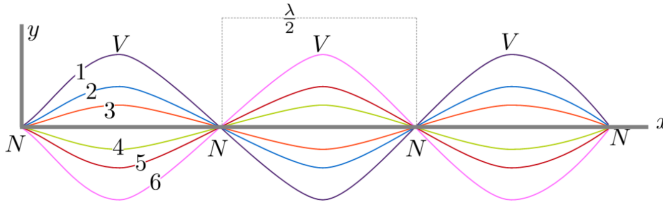


Fig. 8.8: Ondas estacionarias en un medio. Los diferentes instantes los hemos destacado con diferentes colores

En la figura 8.8, se muestra un medio que experimenta ondas estacionarias. Vemos cuatro nodos (N) y tres vientres (V). La figura muestra la gráfica de la perturbación $y(x, t_i)$ en seis instantes t_i diferentes $i = 1, 2 \dots$

Ondas estacionarias en cuerdas finitas

Consideremos una cuerda de longitud L , sometida a una tensión F , con los dos extremos fijos. Que los extremos estén fijos quiere decir que no se moverán. Hacemos vibrar un punto de la cuerda y provocamos una onda armónica. Es la onda inicial. Esta onda llegará a uno de los extremos y se reflejará, superponiéndose a lo largo de toda la cuerda las ondas inicial y reflejada. Esta superposición es la que hemos visto que da lugar a ondas estacionarias. Pero también tendremos que ver qué pasa con la onda reflejada cuando llega al extremo opuesto de la cuerda: dará lugar a una nueva reflexión, que se tendrá que superponer a las anteriores. Y así indefinidamente. En general, en una cuerda de longitud L , no hay ondas estacionarias. La solución de onda estacionaria solo se dará cuando dos de los nodos N coincidan con los dos extremos fijos. Esto pasa solo para determinadas frecuencias. En la figura 8.9, se muestran tres casos posibles de una cuerda con los extremos fijos, sometida a ondas estacionarias: la longitud L de la cuerda debe ser un múltiplo entero de media longitud de onda, la distancia entre nodo y nodo o vientre y vientre. Es decir:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad \text{donde } n = 1, 2, 3 \dots \quad (8.56)$$

Solo las longitudes de onda λ que satisfagan (8.56) son posibles. Si la velocidad de las ondas en la cuerda es $v = \sqrt{F/\mu}$, con $\lambda = v/f$, obtenemos que las únicas frecuencias f que producirán ondas estacionarias son:

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad (8.57)$$

donde $n = 1, 2, 3 \dots$

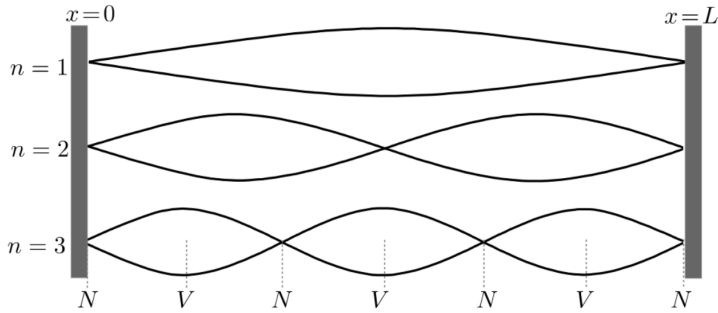


Fig. 8.9: Tres casos posibles de ondas estacionarias en una cuerda con los extremos fijos

→ $f_1 = \frac{v}{2L}$ es la frecuencia más baja o frecuencia **fundamental**. Si $n = 2, n = 3, \dots$ son el **segundo armónico**, el **tercer armónico** y, en general, se denominan armónicos superiores. El conjunto de frecuencias f_n son las **frecuencias propias** y las formas de oscilar correspondientes, los **modos normales de oscilación**. Las frecuencias propias a menudo también se denominan **frecuencias de resonancia**.

En la figura 8.9, podemos ver un esquema de la cuerda en los modos fundamental, segundo y tercero.

Problema 8.5.1. En la figura, se muestra una cuerda, de densidad $0,65 \text{ g/m}$, que tiene un extremo fijado a una pared y el otro, después de pasar por una polea, se le liga un peso mg . Se puede considerar que ambos extremos están fijados. La longitud de la cuerda hasta la polea es de $L = 31,6 \text{ cm}$. Junto a la cuerda, hemos colocado un altavoz A que emite un sonido que hacemos variar entre los 500 Hz y los 1500 Hz . Observamos que la cuerda solo entra en resonancia a las frecuencias 880 Hz y 1320 Hz . Halla la tensión a la cual está sometida la cuerda y a qué armónicos corresponden estas frecuencias.

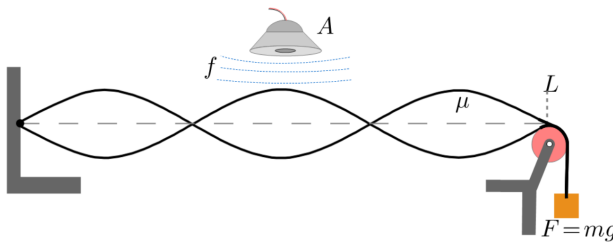


Figura del problema 8.5.1

Solución

Si la frecuencia del altavoz A se hace variar de forma continua y solo hay resonancia a 880 Hz y 1320 Hz , es que estas frecuencias se corresponden con dos valores consecutivos de las posibles frecuencias de las ondas estacionarias: la correspondiente al modo n y al $n + 1$, sin saber, en principio, a qué valor natural corresponde n . Ahora



bien, por (8.57), tenemos que:

$$f_{n+1} - f_n = f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

es decir:

$$1320 - 880 = \frac{1}{2 \cdot 0,316} \sqrt{\frac{mg}{0,65 \times 10^{-3}}}$$

de donde encontramos que la tensión de la cuerda es: $F = mg = 50,26 \text{ N}$

Como $f_1 = 440 \text{ Hz}$, el número del armónico de las frecuencias de resonancia encontradas es $n = \frac{880 \text{ Hz}}{440 \text{ Hz}} = 2$ y $n + 1 = 3$ ■

Ondas estacionarias en tubos finitos

Estudiamos la formación de ondas estacionarias longitudinales en un medio gaseoso contenido en un tubo. Si el tubo está **cerrado por los dos extremos**, el aire del tubo en contacto con sus paredes no podrá vibrar. El comportamiento de las ondas de desplazamiento en este tubo es el mismo que el de las ondas en una cuerda con los extremos fijos. Si L es la longitud del tubo y $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la velocidad de propagación, las frecuencias f_n que producen ondas estacionarias son las dadas por (8.57). En la figura 8.10, se muestra un tubo de longitud L , cerrado por los dos extremos, vibrando según el primero y el segundo armónico de la onda de desplazamiento.

Si los extremos están abiertos, a una distancia pequeña de estos, proporcional al diámetro del tubo, hay un vientre de desplazamiento. Por simplicidad, no tendremos en cuenta este **efecto de boca**. En la figura 8.11, se muestran los dos primeros armónicos para este caso. Se observa que las posiciones de los nodos y de los vientres están traspuestas respecto al caso del tubo cerrado por los dos extremos. Las frecuencias posibles para las ondas estacionarias son las mismas (8.57) que las correspondientes al mismo tubo con los dos extremos cerrados.

→ En los tubos cerrado-cerrado y abierto-abierto, son posibles todos los armónicos

Si uno de los extremos es cerrado y el otro es abierto, habrá un nodo de desplazamiento en el extremo cerrado y un vientre en el extremo abierto. En la figura 8.12, se muestran los esquemas de los tres primeros casos de longitud de onda más grande. Si $n = 1, 2, 3 \dots$ es la secuencia de armónicos (8.57), los posibles armónicos n_s en el tubo cerrado-abierto deben cumplir:

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} = n_s \frac{\lambda}{4} \quad \text{donde} \quad n_s = 1, 3, 5 \dots$$

Y, como $v = \lambda f$, entonces las únicas frecuencias f que dan lugar a las ondas estacionarias en un tubo cerrado-abierto son:

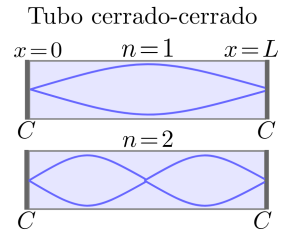


Fig. 8.10: Tubo cerrado por los dos extremos

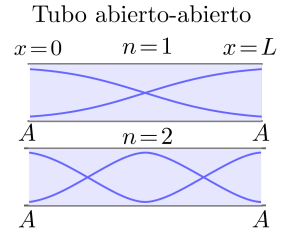


Fig. 8.11: Tubo abierto por los dos extremos

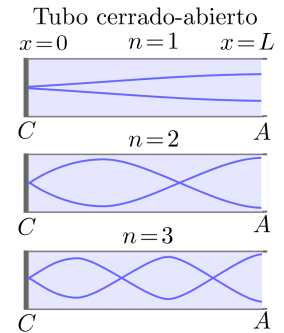


Fig. 8.12: Tubo con un extremo cerrado y el otro abierto



$$f_{n_s} = n_s \frac{v}{4L}, \quad n_s = 1, 3, 5... \quad (8.58)$$

→ La frecuencia más baja o frecuencia **fundamental**, $n_s = 1$, es $f_1 = \frac{v}{4L}$. Las frecuencias de los armónicos superiores se obtienen de (8.58).

→ En un tubo cerrado-abierto, solo son posibles los armónicos impares.

→ Como la onda de presión está desfasada $\pi/2$ rad respecto a la onda de desplazamiento, los nodos y los vientres de la onda de presión están intercambiados respecto a los de la onda de desplazamiento.

Problema 8.5.2. La longitud de la caja de resonancia de un diapasón, cerrada por un extremo, de frecuencia 440 Hz, es de 17,0 cm. ¿Es adecuada esta longitud?

Solución

Si tomamos la velocidad del sonido como 343 m/s, correspondiente al aire a unos 20°C, aplicando (8.58), para $n_s = 1, 3, 5...$, tenemos:

$$f_{n_s} = 440 \text{ Hz} = n_s \frac{v}{4L}$$

de donde:

$$L = n_s \frac{343}{4 \cdot 440} = n_s 0,195 \text{ m}$$

Para $n_s = 1$, obtenemos 19,5 cm \neq 17,0 cm. La longitud de la caja no parece ser la adecuada. La longitud de la caja es la adecuada si tenemos en cuenta el efecto de boca. ■



Figura del problema 8.5.2

Resonancia

De una manera muy similar a lo que sucede en los sistemas oscilantes de un grado de libertad, que hemos estudiado en el capítulo 6 (objetos puntuales o de 0 dimensiones), los objetos de una, dos y tres dimensiones también pueden experimentar fenómenos de resonancia. En este capítulo, hemos estudiado objetos de una dimensión (cuerdas, barras, tubos...), pero lo que comentamos es extensible a otras dimensiones.

Un objeto cualquiera es un medio limitado susceptible de vibrar por la excitación de las ondas que llegan de los medios adyacentes. Por las características geométricas y materiales, este objeto tendrá unas frecuencias propias. Decimos que el objeto **entra en resonancia** cuando el excitador externo vibra en alguna de las frecuencias propias del objeto y provoca ondas estacionarias de esta frecuencia.

Un buen ejemplo lo encontramos en el comportamiento de los instrumentos musicales.

→ La frecuencia fundamental f_1 de un instrumento musical se corresponde con el **tono** o **nota** musical. La relación de las amplitudes de los armónicos superiores

respecto a la fundamental, A_2/A_1 , A_3/A_1 ... determina el **timbre** del instrumento. Un do de clarinete y uno de flauta tienen el mismo tono pero diferente timbre.

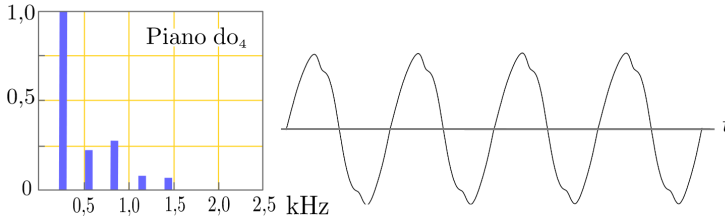


Fig. 8.13: Relación de amplitudes para el do central o do_4 del piano y la onda resultante de la superposición

En la figura 8.13, se muestra el análisis espectral del do_4 de un piano y la forma de la onda correspondiente. Fijémonos que el término dominante es el armónico fundamental, 261 Hz, y que disminuyen rápidamente las amplitudes de los dos armónicos siguientes. Hay instrumentos que son más ricos en armónicos, es decir, en que la sucesión A_n/A_1 disminuye más lentamente.

En muchos casos, las resonancias implican unas amplitudes y/o aceleraciones tan grandes que pueden llegar a ser destructivas y que conviene evitar. En otros casos, las resonancias pueden ser muy útiles. Así, un sistema con varias frecuencias de resonancia puede actuar como un **filtro** de frecuencias.

En la figura 8.14 se muestra un ejemplo de filtro. Una cuerda muy larga está unida por su extremo derecho a una barra elástica delgada, que está cogida por el centro con una mordaza. Al extremo simétrico opuesto de la barra, se ata una segunda cuerda muy larga. Por la cuerda izquierda llega una onda progresiva incidente y_I , de frecuencia ω_I . Esta onda incidente proporciona la excitación sobre la barra. La

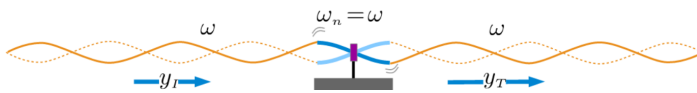


Fig. 8.14: Una cuerda muy larga unida a una barra elástica

barra, con el punto central fijado (nodo) y los extremos libres (vientres), puede vibrar transversalmente con un determinado conjunto de frecuencias² f_n . Si la frecuencia de la onda incidente coincide con uno de los modos de vibración de la barra, se producirán ondas estacionarias transversales a la barra que darán lugar a una onda transmitida y_T a la cuerda derecha. En este caso, decimos que hay resonancia entre la onda incidente y la barra. En caso contrario, la barra no vibrará (al menos de forma notable) y tampoco habrá onda transmitida.

Si la frecuencia de la onda incidente coincide con una de las propias de la barra,

² Para las vibraciones longitudinales, una barra en las condiciones descritas vibra a las frecuencias $f_n = n f_1$, con $f_1 = \frac{v}{2L}$, y $n = 1, 2, 3, \dots$, es decir, las mismas a que vibra un tubo con los dos extremos cerrados o abiertos. Las vibraciones transversales son más complejas que las longitudinales y la relación $f_n \neq n f_1$ no es válida, pero sí existen unas frecuencias propias f_n .



$\omega = \omega_n$, las ondas en las cuerdas se transmitirán, es decir:

$$\begin{aligned}y_I(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) \\y_{\text{barra}} &= A \cos k_n x \cos \omega_n t \\y_T(x, t) &= A \cos(\omega t - k[x - L] + \pi)\end{aligned}$$

Si no coincide, no habrá onda transmitida. Si por la cuerda de la izquierda llega una superposición de muchas frecuencias, la barra solo permitirá la transmisión a la cuerda de la derecha de las ondas de frecuencias que coincidan con alguna de las frecuencias propias de la barra. Cambiando la barra, cambiarán las frecuencias propias que se transmitirán; la barra actúa de “filtro”, favoreciendo el paso de unas frecuencias e impidiendo el paso del resto.

Problema 8.5.3. En la figura, se muestran dos habitaciones, separadas por una pared P que las aísla acústicamente excepto por un tubo delgado, abierto por ambos lados, de longitud L que las comunica. En una de las habitaciones, cerca del tubo, un generador de sonido D emite con frecuencia f e intensidad I_a .

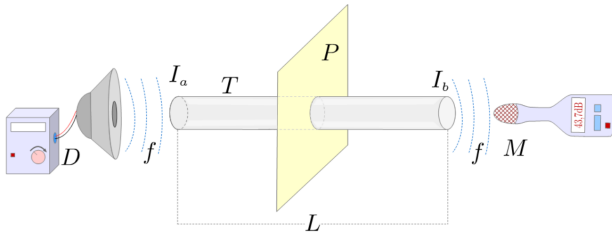


Figura del problema 8.5.3

En la otra habitación, un sonómetro M mide la I_b del sonido que llega a través del tubo. A continuación, se repiten la emisión y la medición de I_b para varias frecuencias f . Suponiendo que todas las intensidades I_a emitidas son iguales, ¿cómo son las intensidades I_b medidas en función de la frecuencia f ?

Solución

Cada intensidad recibida I_b depende mucho de la frecuencia f del sonido: si esta es la fundamental del tubo, $f_1 = v/2L$, o una de sus múltiplos, $f_n = n f_1$, habrá una resonancia y la intensidad I_b será máxima. Pero, a medida que la frecuencia f se aleja de una de estas frecuencias propias del tubo, la intensidad I_b del sonido disminuye hasta llegar a un mínimo. Si el radio del tubo es relativamente grande, las máximas I_b serán poco inferiores a I_a y las mínimas, prácticamente cero. El tubo actúa de filtro acústico. ■

8.6 Efecto Doppler y ondas de choque

Efecto Doppler

Se denomina **efecto Doppler** la variación de la frecuencia de las ondas recibidas por un observador debida al movimiento relativo entre este y la fuente. Cuando un



Fig. 8.15: Christian Andreas Doppler (1803-1853) fue un matemático y físico austriaco



tren se nos acerca, sentimos su silbato más agudo que cuando está parado, y más grave cuando se aleja.

En la figura 8.16, el observador O mide la frecuencia f_O de las ondas que le llegan, emitidas por la fuente F , con una frecuencia f_F .

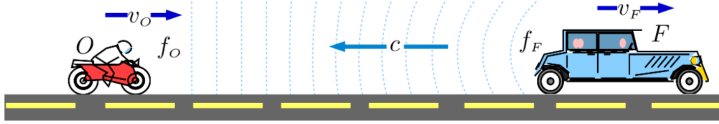


Fig. 8.16: Efecto Doppler

Sea c la velocidad de la onda y sean v_F y v_O las velocidades constantes de F y O (positivas en el sentido de O hacia F).

Supongamos que la fuente F , en un determinado instante t_1 , emite un frente de onda y, pasado un período $T_F = 1/f_F$, en el instante $t_2 = t_1 + T_F$, emite el siguiente, etc. Si x_{F0} es la distancia del observador a la fuente en el instante t_1 , estos frentes de onda llegarán al observador-receptor en los instantes t'_1, t'_2 , etc., dados por las relaciones:

$$v_O (t'_1 - t_1) = x_{F0} - c(t'_1 - t_1) \quad v_O (t'_2 - t_1) = x_{F0} + v_F T_F - c(t'_2 - t_1 - T_F)$$

De aquí encontramos que el período T_O de la onda que llega al observador es:

$$T_O = t'_2 - t'_1 = \frac{c + v_F}{c + v_O} T_F$$

o, en términos de frecuencias:

$$\frac{f_O}{c + v_O} = \frac{f_F}{c + v_F} \quad (8.59)$$

Debemos advertir que las velocidades v_O y v_F son con respecto al medio. Si se trata de ondas sonoras y el medio es aire y hace viento, en la expresión (8.59) deberemos utilizar las velocidades relativas al aire, teniendo en cuenta el viento.

El efecto Doppler tiene muchas aplicaciones prácticas: radares para detectar excesos de velocidad en el tráfico, *sonars* utilizados en la navegación marítima, ecografías.... Una buena parte del conocimiento de la astrofísica está basado en el efecto Doppler que experimentan las ondas electromagnéticas emitidas por las estrellas y galaxias en movimiento con respecto a la Tierra.

Problema 8.6.1. Dos estudiantes, A y B , llevan diapasones iguales de $f_d = 440$ Hz en vibración. Si A se está quieto y B se aleja de él a $v_B = 6$ m/s, ¿cuántos batidos por segundo, debidos al efecto Doppler, oirán uno y otro? Supón que no hace viento y que la velocidad del sonido es de $c = 340$ m/s.



Solución

Aplicando la expresión anterior (8.59) sobre el efecto Doppler a los dos casos, se concluye que las frecuencias que perciben A y B, f'_A y f'_B , respectivamente, del diapasón del otro, son:

$$f'_A = \frac{c}{c + v_B} f_d \qquad f'_B = \frac{c - v_B}{c} f_d$$

Fijémonos que, si v_B es bastante más pequeña que c , las dos frecuencias son muy parecidas. Las frecuencias de los batidos son:

$$f_A^{\text{bat}} = f_d - f'_A = \frac{v_B}{c + v_B} f_d = 7,63 \text{ Hz}; \quad f_B^{\text{bat}} = f_d - f'_B = \frac{v_B}{c} f_d = 7,76 \text{ Hz} \quad \blacksquare$$

Ondas de choque

Las **ondas de choque** se producen cuando la fuente emisora se mueve más rápidamente que las ondas que emite. Son ejemplos de ondas de choque las producidas por los aviones cuando van a una velocidad superior a la del sonido, o las dos ramas del surco que deja en el agua un barco al desplazarse.

En la figura 8.17, una fuente F de ondas esféricas se mueve en la dirección del eje x a velocidad constante v_F superior a la de las ondas emitidas, de velocidad c . En

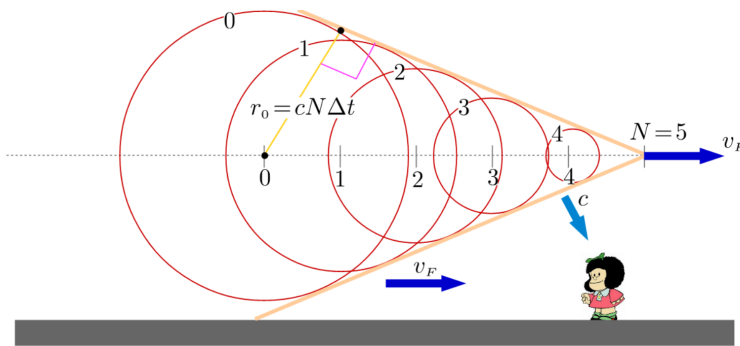


Fig. 8.17: Ondas de choque

el instante $t = 0$, la fuente F está en $x_0 = 0$ y emite un frente de onda que en el instante $t_N = N\Delta t$ (en la figura 8.17, hemos tomado $N = 5$) será una esfera de radio $r_0 = Nc\Delta t$. En el instante $t_1 = \Delta t$, cuando está en $x = v_F\Delta t$, emite otro frente, que en t_N tendrá un radio $r_1 = 4c\Delta t$. Y así sucesivamente. En el instante $t_N = N\Delta t$, F emite un frente que, en este mismo instante, tiene radio cero.

Como se aprecia claramente en la figura, para cualquier N , esta sucesión de ondas esféricas da lugar a una envolvente cónica que concentra todos los frentes de onda: es la llamada **onda de choque**, que viaja detrás mismo de la fuente de ondas. El semiángulo de apertura del cono θ cumple $\sin \theta = cN\Delta t / (v_F N\Delta t)$, es decir:

$$\sin \theta = \frac{c}{v_F} \qquad (8.60)$$



La onda de choque se desplaza a la misma velocidad v_F que la fuente F , mientras que la onda lo hace a velocidad c .

8.7 Difracción

Consideremos una onda plana que incide en una pared que le impide el paso excepto por un agujero. Si el agujero no es muy pequeño, la onda pasa sin alterar la dirección que llevaba. Muy aproximadamente, sigue siendo una onda plana. Si el agujero es muy pequeño, el medio situado en el agujero actúa como un foco emisor de ondas esféricas que se propagan al otro lado de la pared. En la figura 8.18, se

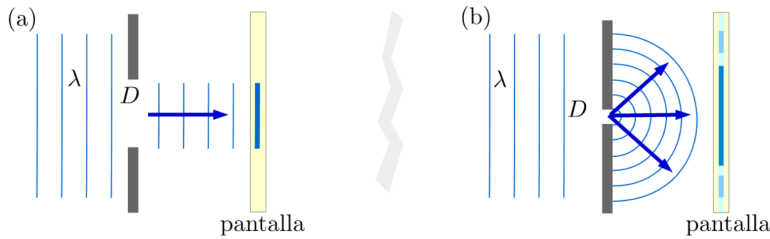


Fig. 8.18: Modelo para entender la difracción

ilustran muy esquemáticamente estos comportamientos, que son los casos extremos de un conjunto de fenómenos, conocidos con el nombre de **difracción**, que ocurren cuando un objeto de unas dimensiones equiparables a la longitud de onda se interpone en el camino de esta onda.

Difracción de Fraunhofer

Una situación de difracción muy interesante es la observación de la difracción de las ondas al pasar a través de una apertura circular, de diámetro D , hecha a una distancia mucho más grande que D (v. figura 8.20). Es la difracción **de Fraunhofer**. Una onda plana de longitud de onda λ incide normal a la apertura.

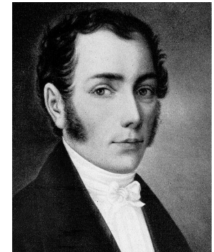


Fig. 8.19: Joseph von Fraunhofer (1787–1826) fue un óptico alemán

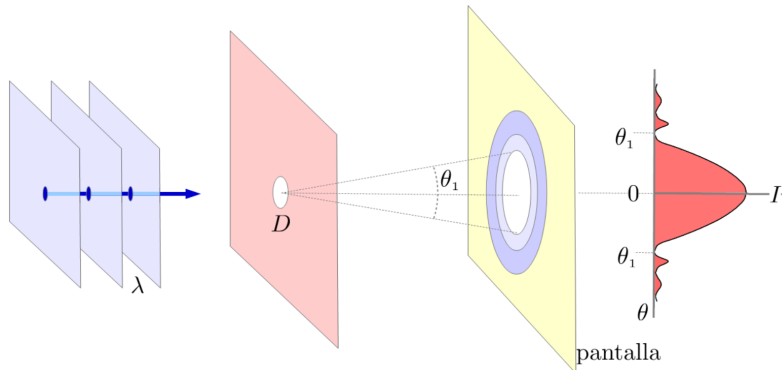


Fig. 8.20: Difracción de Fraunhofer. La observación del fenómeno se hace en una pantalla

La intensidad de la onda difractada, observada en la pantalla, en función del ángulo



θ , se reparte desde un valor máximo a $\theta = 0$ hasta un mínimo para el ángulo θ_1 . Es la **mancha de Airy**. Para valores $\theta > \theta_1$, la intensidad va pasando por una serie de máximos y mínimos, cada vez más debilitados. En la mancha de Airy, determinada por el ángulo θ_1 , se concentra el 84 % de la intensidad difractada por la apertura. Se puede demostrar y corroborar experimentalmente que el ángulo θ_1 viene dado por:

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (8.61)$$

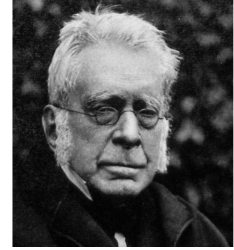


Fig. 8.21: Sir George Biddell Airy (1801-1892) fue un astrónomo y matemático inglés

→ 9

9 Ecuaciones de Lagrange

Introducción

Este capítulo solo justifica su presencia para que, quién lo desee, pueda hacer una cata de la mecánica analítica y su relación con la mecánica newtoniana a través de la ecuación general de la dinámica explicada en el capítulo 3. Partiendo de esta, se deducen las ecuaciones de movimiento de Lagrange para sistemas con ligaduras geométricas dependientes del tiempo, que serían la extensión a L grados de libertad de las ecuaciones halladas en el capítulo 3 para sistemas conservativos empleando la función de la energía mecánica del sistema. Veremos cómo podemos definir la función de Lagrange o lagrangiana y, a partir de esta, encontrar las L ecuaciones de movimiento de segundo orden que permiten hallar el movimiento del sistema. No vamos más allá porque el único objetivo es hacer de puente entre la mecánica newtoniana y la analítica en general, que se puede encontrar en multitud de textos.

9.1 Ecuaciones de Lagrange de segunda clase

Partimos de la ecuación general de la dinámica, explicada en la sección 3.9:

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (9.1)$$

Trataremos, como mucho, con ligaduras geométricas que pueden depender del tiempo. Supondremos que tenemos las ligaduras expresadas en forma paramétrica, con parámetros $\{q_1, q_2 \dots q_L\}$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2 \dots q_L, t) \quad (9.2)$$

siendo L el número de grados de libertad del sistema. Tenemos:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{a=1}^L \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a \quad (9.3)$$



Fig. 9.1: Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia



El término de (9.1) que contiene las fuerzas \vec{F}_i se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{a=1}^L Q_a dq_a$$

donde:

$$Q_a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \quad (9.4)$$

se denominan **fuerzas generalizadas**, que siempre se podrán expresar como función de los parámetros q_a o **coordenadas generalizadas**. Observamos que las unidades de Q_a no son necesariamente unidades de fuerza (es decir, newtons) ni siquiera todas las Q_a tendrán, en general, las mismas unidades. Las unidades de las Q_a dependerán de las unidades de q_a . Si ocurrirá que $Q_a dq_a$ tendrá unidades de energía (es decir, joules).

El término de (9.1) que contiene la aceleración se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{a=1}^L \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} dq_a \\ &= \sum_{a=1}^L \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \right) dq_a \end{aligned} \quad (9.5)$$

Teniendo en cuenta:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{b=1}^L \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b} \dot{q}_b + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \quad (9.6)$$

y

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_a} = \sum_{b=1}^L \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_b \partial q_a} \dot{q}_b + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_a \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \quad (9.7)$$

Con (9.6, 9.7), podemos escribir (9.5) como:

$$\sum_{a=1}^L \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_a} - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a} \right) dq_a = \sum_{a=1}^L \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} \right) dq_a$$

de manera que la ecuación general de la dinámica (9.1) toma la forma:

$$\sum_{a=1}^L \left\{ Q_a - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} \right) \right\} dq_a = 0$$

donde E_c es la energía cinética del sistema como función de las coordenadas generalizadas y el tiempo, es decir, $E_c(q_a, \dot{q}_b, t)$.



Finalmente, teniendo en cuenta que dq_a son desplazamientos arbitrarios, obtenemos las **ecuaciones de Lagrange de segunda clase**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial E_c}{\partial q_a} = Q_a \quad (9.8)$$

9.2 Ecuaciones de Lagrange

Si las fuerzas \vec{F}_i son conservativas, tendremos:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -dU = - \sum_{a=1}^L \frac{\partial U}{\partial q_a} dq_a$$

y, por consiguiente,

$$Q_a = - \frac{\partial U}{\partial q_a} \quad (9.9)$$

donde U será función de las q_a y quizás de t , pero no de \dot{q}_a . Sin necesidad de pasar por las fuerzas \vec{F}_i , si las fuerzas generalizadas Q_a cumplen (9.9), con $U(q_a, t)$, decimos que el sistema tiene **fuerzas potenciales** y U es su energía potencial. Si $U(q_a)$ no depende del tiempo, decimos que las fuerzas generalizadas son conservativas.

Si definimos la **función de Lagrange** \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = E_c - U \quad (9.10)$$

y tenemos en cuenta que U no depende de \dot{q}_a , podemos escribir las ecuaciones (9.8) para sistemas con fuerzas potenciales, utilizando la función de Lagrange \mathcal{L} , en forma de **ecuaciones de Lagrange**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \quad (9.11)$$

Si no todas las fuerzas \vec{F}_i son conservativas, las ecuaciones de Lagrange adoptan la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = Q_a \quad (9.12)$$

donde Q_a vendrán dadas según (9.4), solo teniendo en cuenta las fuerzas no conservativas o, en general, las que no hayan sido incluidas en la lagrangiana a través de la energía potencial.

Las ecuaciones de Lagrange tienen algunas propiedades importantes, que analizamos a continuación.



Lagrangianas equivalentes

Si dos lagrangianas \mathcal{L} y \mathcal{L}' difieren en una función de la forma $\frac{d\Omega(q_a, t)}{dt}$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\Omega}{dt}$, las ecuaciones de Lagrange asociadas son iguales. La demostración es inmediata y equivale a demostrar la identidad:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) = 0$$

que se puede hacer sin aplicar las ecuaciones de Lagrange.

Conservación de la energía

Si definimos la función $\mathcal{H} = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \mathcal{L}$ y utilizamos las ecuaciones de Lagrange, se cumple $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. Es sencillo ver que, si las fuerzas son conservativas y las ligaduras no dependen del tiempo, \mathcal{L} no dependerá del tiempo, la energía mecánica E coincidirá con \mathcal{H} y se conservará. La función \mathcal{H} es el germen de un objeto de gran importancia, que se denomina **función de Hamilton o hamiltoniano**.

Conservación y simetría: teorema de Noether

Dada una transformación infinitesimal continua de coordenadas $q_a \rightarrow q_a + \delta q_a$ la lagrangiana se transforma $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right)$$

Si usamos las ecuaciones de Lagrange, podemos escribir:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a$$

→ Una transformación infinitesimal, $q_a \rightarrow q_a + \delta q_a$, es una **transformación de simetría** si deja invariante la forma de las ecuaciones de movimiento por el hecho de transformar la lagrangiana en una equivalente, $\delta \mathcal{L} = \frac{d\delta\Omega}{dt}$, sin utilizar las ecuaciones de Lagrange. Podemos, pues, enunciar un teorema de gran importancia en la física moderna:

→ **Teorema de Noether.** Si la lagrangiana \mathcal{L} tiene la simetría $q_a \rightarrow q_a + \delta q_a$ entonces hay unas cantidades que se conservan (son constantes cuando el sistema se mueve según las ecuaciones de movimiento):

$$\sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_a} \right) \delta q_a = \text{constante} \quad (9.13)$$

El caso más sencillo es cuando la lagrangiana no depende de alguna de las coordenadas q_a , por ejemplo q_1 . Podemos decir que la lagrangiana es simétrica con



Fig. 9.2: Emmy Noether (1882-1935) fue una matemática alemana



respecto a transformaciones $q_1 \rightarrow q_1 + \delta q_1$ y tenemos una cantidad conservada:

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \text{constante} \quad (9.14)$$

Principio de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange (9.11) se pueden obtener, suponiendo que ya conocemos la función de Lagrange $\mathcal{L}(q_a, \dot{q}_a, t)$, a partir del principio de Hamilton. Para enunciar este principio, primero hay que definir el **funcional de acción** S . Si $q_{a1}(t_1)$ y $q_{a2}(t_2)$ son las configuraciones iniciales y finales del sistema, el funcional de acción se define en función de las trayectorias $q_a(t)$, que van de $q_{a1}(t_1)$ a $q_{a2}(t_2)$, en la forma:

$$S[q_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t), t) dt \quad (9.15)$$

→ **Principio de Hamilton.** Dado un sistema con lagrangiana $\mathcal{L}(q_a(t), \dot{q}_a(t), t)$, la trayectoria que seguirá el sistema de $q_{a1}(t_1)$ a $q_{a2}(t_2)$ es un extremal del funcional de acción $S[q_a(t)]$ con respecto a las trayectorias que pasan por estas dos configuraciones:

$$\frac{\delta S[q_a(t)]}{\delta q_a(t)} = 0 \quad (9.16)$$

El principio de Hamilton también se conoce con el nombre de **principio de mínima acción** y es empleado en múltiples situaciones en la física moderna.

Veamos ahora algunos ejemplos sencillos, de un grado de libertad, que podemos tratar con los métodos de este capítulo.

Problema 9.2.1. En la figura podemos ver un péndulo forzado, formado por una masa m , cogida del extremo de una varilla, rígida y de masa despreciable. La mano sujeta el otro extremo de la varilla y lo desplaza horizontalmente $x_0(t)$ con respecto a su posición no forzada $x_0 = 0$. Encuentra la lagrangiana y la ecuación de movimiento del péndulo y particularízala para pequeñas oscilaciones para los casos siguientes:

- el péndulo oscila sin fricción,
- hay una fricción viscosa, que podemos expresar como una fuerza $-b\vec{v}$, siendo \vec{v} la velocidad de la masa m .



Fig. 9.3: William Rowan Hamilton (1805-1865) fue un matemático, físico y astrónomo británico irlandés

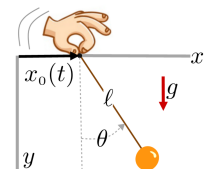


Figura del problema 9.2.1



Solución

Se trata de un sistema con ligaduras. Si la posición de la masa m es $\vec{r} = (x, y)$, la ligadura es $(x - x_0(t))^2 + y^2 = \ell^2$. Si $x_0 = 0$, tenemos el péndulo usual.

El sistema tiene un grado de libertad, que representaremos con el ángulo θ . Tenemos $\vec{r} = (x_0 + \ell \sin \theta, \ell \cos \theta)$ y $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}_0 + \ell \dot{\theta} \cos \theta, -\ell \dot{\theta} \sin \theta)$.

La energía cinética es $E_c = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}_0 + \ell \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\ell \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]$ y la potencial, $U = -mg\ell \cos \theta$. La lagrangiana es, pues:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta + m\dot{x}_0\ell \cos \theta \tag{1}$$

Las ecuaciones de movimiento las encontramos a partir de (1):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta + m\ddot{x}_0\ell \cos \theta = 0$$

Si consideramos pequeñas oscilaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, obtenemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{\ell}$$

y, si el movimiento forzado $x_0(t)$ es armónico, la masa m efectúa oscilaciones armónicas forzadas, como las que hemos visto en la sección 6.4, pero sin fricción.

Para incluir la fricción, expresada como una fuerza $-b\vec{v}$, tendremos, según (9.4):

$$Q = -b\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -b\ell(\dot{x}_0 \cos \theta + \dot{\theta}) \tag{2}$$

Y ahora obtendremos las ecuaciones de Lagrange según (9.12), es decir:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta + m\ddot{x}_0\ell \cos \theta = -b\ell(\dot{x}_0 \cos \theta + \dot{\theta})$$

que, para pequeñas oscilaciones, es:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = -\frac{\ddot{x}_0}{\ell} - \frac{b}{m}\frac{\dot{x}_0}{\ell} \tag{3}$$

Como vemos, la fricción afecta el comportamiento del término forzado. Será un movimiento armónico forzado (MAF) como los descritos en 6.4, solo si el término de la derecha de (3) tiene la forma $B \sin(\Omega t + \theta_0)$, es decir, si el movimiento de x_0 cumple:

$$\ddot{x}_0 - \frac{b}{m}\dot{x}_0 = \ell B \sin(\Omega t + \theta_0)$$

y, esencialmente, esto quiere decir que x_0 tenga la forma:

$$x_0(t) = \frac{mB}{\Omega(\Omega^2 m^2 + b^2)} (b \cos[\Omega t + \theta_0] - m\Omega \sin[\Omega t + \theta_0]) \quad \blacksquare$$

Problema 9.2.2. En la figura, podemos ver un sistema forzado, formado por una masa m , sujeta en el extremo de un muelle, de masa despreciable. La mano coge el otro extremo del muelle y lo desplaza verticalmente, de forma que desplaza $x_0(t)$ la posición de equilibrio del sistema $x_0 = 0$. Encuentra la lagrangiana y la ecuación de movimiento para los casos siguientes:

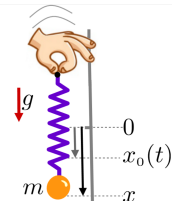


Figura del problema 9.2.2



a) el sistema oscila sin fricción,

b) hay una fricción viscosa, que podemos expresar como una fuerza $-b\vec{v}$, siendo \vec{v} la velocidad de la masa m .

Solución

En este caso, no se trata de un sistema con ligaduras. La fuerza neta que recibe la masa m es $\vec{F} = -k(x - x_0(t))\hat{i}$. No es una fuerza conservativa, puesto que depende del tiempo, pero sí es potencial: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0(t))^2$. La energía cinética es $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. La lagrangiana es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_0(t))^2 \quad (1)$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\ddot{x} + kx - kx_0(t) = 0$$

La ecuación canónica es:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0(t)$$

Si tenemos en cuenta la fricción viscosa, tendremos $Q = -b\dot{x}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\ddot{x} + kx - kx_0(t) = -b\dot{x}$$

La ecuación canónica es, en este caso:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0(t) \quad \blacksquare$$

→ 1P

1 Problemas y cuestiones

Problema 1.5.2. Se quiere estudiar la situación siguiente: una bola maciza baja por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. Según lo que sabemos, la aceleración con que baja la bola es:

$$a = g \sin \alpha = g \frac{h}{L} \quad (1)$$

de forma que el movimiento es uniformemente acelerado:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

En realidad, la aceleración correspondiente al movimiento del centro de la bola no puede ser la dada por (1), puesto que la energía potencial gravitatoria no tan solo se convierte en energía cinética de traslación, sino también en energía cinética de rotación en torno a su centro. Ello puede comportar que la aceleración de la esfera se reduzca en un cierto factor $Q < 1$:

$$a = Q g \frac{h}{L} \quad (3)$$

Es este factor Q el que queremos determinar experimentalmente

Para un recorrido s fijado y conocido, se cronometran los tiempos de descenso de la bola para varios valores de h . Utilizando (2), se determina la aceleración de bajada en cada caso. Se han llevado a cabo mediciones sucesivas incrementando h en una cantidad constante, correspondiente a una vuelta de tornillo (paso de rosca) d . Si la altura inicial es h_0 y se va aumentando en n las vueltas del tornillo (con $n = 1, 2, 3, \dots$), la altura alcanzada para cada valor de n es:

$$h_n = h_0 + nd \quad (4)$$

Datos: Dimensiones del plano inclinado, $s = 35,3$ cm; $L = 48,6$ cm; paso de rosca del tornillo, $d = 0,70$ mm; aceleración de la gravedad, $g = 9,81$ m/s²; las mediciones realizadas se indican en la tabla.

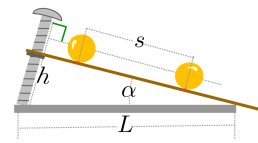


Figura del problema 1.5.2

- a) Encuentra la aceleración a en función de n, h_0, Q, d, L y g .
- b) Representa los puntos (n, a) de acuerdo con las mediciones realizadas y utilizando (2).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t(\text{s})$	4,44	3,92	3,60	3,29	3,10	2,85	2,75	2,57	2,48	2,36	2,30	2,23

Tabla del problema 1.5.2. Para un recorrido s fijado y conocido, se cronometran los tiempos de descenso de la bola para varios valores de n

- c) Encuentra **gráficamente** la recta que se ajusta mejor a estos puntos.
- d) Encuentra por **regresión lineal** la recta que se ajusta mejor a estos puntos.
- e) Utilizando la recta de ajuste encontrada en **d** y la expresión encontrada en **a**, deduce los valores del factor Q y h_0 .
- f) Encuentra el error de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ajuste y calcula, a continuación, el error propagado al factor Q .

Cuestión 1.7.1. Una partícula describe una trayectoria caracterizada por un vector posición $\vec{r} = \sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j} + 2t\hat{k}$ (Unidades S.I.). El radio de curvatura de la trayectoria es:

- a) $5/2$ m
- b) $2/5$ m
- c) 5 m
- d) $\sqrt{5}$ m
- e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ m

Cuestión 1.7.2. Una partícula describe una trayectoria circular, de radio 1,5 m, con una aceleración tangencial $2t$ (en unidades S.I.). En $t = 0$, la partícula se encuentra en reposo. El módulo de la aceleración de la partícula en $t = 1,2$ s será:

- a) $1,38 \text{ m/s}^2$
- b) $3,10 \text{ m/s}^2$
- c) $1,44 \text{ m/s}^2$
- d) $2,40 \text{ m/s}^2$
- e) $2,77 \text{ m/s}^2$



→ 2P

2 Problemas y cuestiones

Cuestión 2.1.1. Sobre un cuerpo de 4 kg que se mueve en la dirección del eje x , se aplica una fuerza en la misma dirección, representada en la figura. En el instante inicial, el cuerpo pasa por $x = 0$ moviéndose en el mismo sentido que la fuerza, a una velocidad de 3 m s^{-1} . La velocidad en la posición $x = 8 \text{ m}$ será:

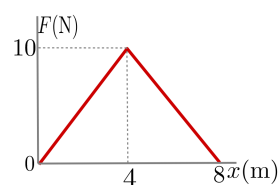


Figura de la cuestión 2.1.1

- a) la misma que en $x = 0$
- b) $\sqrt{29} \text{ m s}^{-1}$
- c) $\sqrt{20} \text{ m s}^{-1}$
- d) 7 m s^{-1}
- e) $\sqrt{11} \text{ m s}^{-1}$

Cuestión 2.1.2. La segunda ley de Newton afirma que:

- a) Si aplicamos una fuerza variable a un cuerpo libre, esta es directamente proporcional a la aceleración producida en el cuerpo.
- b) Cuerpos con masas diferentes son acelerados por una misma fuerza con aceleraciones directamente proporcionales a las masas.
- c) Cuerpos con la misma masa reciben aceleraciones inversamente proporcionales a las fuerzas aplicadas.
- d) La fuerza no se crea ni se destruye.
- e) Ninguna de las anteriores.

Cuestión 2.1.3. El bloque de la figura está atado a una cuerda, de 1,5 m y masa despreciable, que forma un ángulo de 30° con la horizontal. La velocidad angular vale:

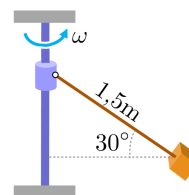


Figura de la cuestión 2.1.3

- a) 7,62 rad/s
- b) 4,62 rad/s
- c) 5,62 rad/s
- d) 6,62 rad/s
- e) 3,62 rad/s

Problema 2.1.5. Un objeto de 5 kg está sometido a una fuerza que varía con la posición del objeto $\vec{F} = \frac{2}{5}x \hat{i}$ (S.I.). Si parte de $x_0 = 25$ m, ¿qué velocidad inicial v_0 hará que llegue justo a $x = 0$?

Ayuda. Para tratar de integrar la ecuación de movimiento y encontrar la velocidad, multiplica ambos miembros por la velocidad y ten en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$.

Solución: $v_0 = -7,07$ m/s

Problema 2.1.6. Un objeto de $m = 4$ kg está sometido a la acción de dos fuerzas, $\vec{F}_1 = \hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = \hat{i} + \hat{j}$ (unidades S.I.). Calcula la aceleración, la velocidad y la posición (vector y módulo) del objeto en el tiempo $t = 3$ s si, en $t = 0$, está en reposo en el origen de coordenadas.

Solución: $\vec{a} = \frac{1}{4}(2\hat{i} - \hat{j})$ m/s²; $a = \frac{\sqrt{5}}{4}$ m/s²; $\vec{v}(3) = \frac{3}{4}(2\hat{i} - \hat{j})$ m/s, $v(3) = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ m/s, $\vec{r}(3) = \frac{9}{8}(2\hat{i} - \hat{j})$ m; $r(3) = \frac{9\sqrt{5}}{8}$ m

Cuestión 2.2.1. Una pelota de tenis de 80 g choca normalmente contra una pared vertical. Tanto antes como después del choque, la pelota se mueve con una velocidad horizontal de módulo 30 m/s. El módulo del impulso que hace la pared sobre la pelota vale:

- a) 0
- b) 9,6 N s
- c) 2,4 N s
- d) 4,8 N s
- e) Faltan datos para calcularlo.

Cuestión 2.2.2. Una pelota de 60 g se deja caer desde una altura de 2 m. Rebota hasta una altura de 1,8 m. Calcula cuánto varía la cantidad de movimiento durante el choque con el suelo.

- a) 0,422 kg m/s
- b) 0,365 kg m/s
- c) 0,731 kg m/s
- d) 0,227 kg m/s
- e) 1,246 kg m/s

Cuestión 2.2.3. El vector posición de una partícula de masa $m = 2$ kg es $\vec{r}(t) = (3t^4 + 1, 2t, 0)$ (unidades S.I.). Es cierto que:

- a) la dirección de la fuerza no es constante.
- b) el movimiento es rectilíneo.
- c) en $t = 0$, el momento angular con respecto al origen es nulo.
- d) en $t = 0$, la cantidad de movimiento de la partícula es $\vec{p} = (0, 2, 0)$.
- e) el impulso suministrado por la fuerza en el primer segundo es $\vec{I} = (24, 0, 0)$.

Cuestión 2.2.4. Un cuerpo de 3 kg se mueve rectilíneamente según $\vec{r}(t) = (1250 + 20t - 0,5t^2)\hat{i}$, para $t \geq 0$ (unidades S.I.). Es cierto que:

- a) la velocidad inicial es $1250 \hat{i}$.
- b) la velocidad inicial es nula.
- c) la cantidad de movimiento inicial es $60 \hat{i}$.
- d) la fuerza aplicada en el cuerpo es $3 \hat{i}$.
- e) la fuerza aplicada en el cuerpo es $-1,5 \hat{i}$.

Problema 2.2.3. Una partícula de 2 kg está inicialmente en el punto $\vec{r}(0) = (0; 0)$, donde tiene una velocidad $\vec{v}(0) = (0; 2)$ m/s. Si, a partir de este punto, empieza a actuar una fuerza $\vec{F}(t) = (8; -4)$ N, calcula:

- a) $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$
- b) ¿Dónde estará la partícula cuando $t = 5$ s?
- c) ¿Para qué tiempo la velocidad en el eje y será nula?
- d) Escribe la ecuación de la trayectoria de la partícula.

Solución: a) $\vec{a}(t) = (4, -2)$; $\vec{v}(t) = (4t, 2 - 2t)$; $\vec{r}(t) = (2t^2, 2t - t^2)$; b) $\vec{r}(5) = (50, -15)$; c) 1 s; d) $y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} - \frac{x}{2}$

Cuestión 2.3.1. La trayectoria de una partícula de masa 2 kg es $\vec{r}(t) = -3t^2 \hat{i} + (5t + 4) \hat{j}$ (unidades S.I.). El momento angular con respecto al origen de coordenadas vale (unidades S.I.):

- a) $\vec{L}(t) = 6t(5t + 28) \hat{k}$
- b) $\vec{L}(t) = 30t^2 \hat{k}$
- c) $\vec{L}(t) = (5t + 8) \hat{k}$
- d) $\vec{L}(t) = (30t + 8) \hat{k}$
- e) $\vec{L}(t) = 6t(5t + 8) \hat{k}$

Problema 2.3.3. La pastilla, de masa m , efectúa una trayectoria circular, de velocidad angular ω , atada a la cuerda, de longitud ℓ , que tiene el otro extremo fijado al pasador, que puede girar sin fricción alrededor del eje, a una altura $h = \ell/2$. Si aumentamos h en $\Delta h = h/5$, ¿cuál será el aumento $\Delta\omega$?

Solución: $\Delta\omega = \frac{11}{64}\omega$

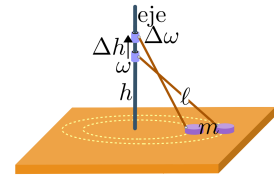


Figura del problema 2.3.3

Problema 2.3.4. Una pequeña pastilla de 250 g se desliza por una mesa horizontal mientras se mantiene atada a un hilo inextensible, que pasa por un orificio y que cogemos por el otro extremo. La pastilla describe una trayectoria circular de 500 mm de radio. Vamos estirando del hilo y, consiguientemente, reducimos el radio de la trayectoria hasta dejarlo en 200 mm. Si la velocidad inicial de la pastilla es de 5 m/s, determina la velocidad al final.

Solución: 12,5 m/s

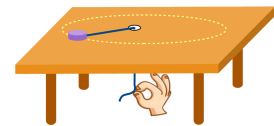


Figura del problema 2.3.4

Problema 2.3.5. Una masa puntual de 2 kg describe la trayectoria: $x = t^3$; $y = t - 2t^2$; $z = t^4/4$, donde t es el tiempo. Calcula a los 2 s:

- a) los vectores velocidad y aceleración.
- b) el vector cantidad de movimiento.
- c) el momento angular con respecto al punto $P = (7; -7; 3)$.
- d) la fuerza que actúa sobre la masa puntual.

Solución: a) $\vec{v} = 12 \hat{i} - 7 \hat{j} + 8 \hat{k}$; $\vec{a} = 12 \hat{i} - 4 \hat{j} + 12 \hat{k}$; b) $\vec{p} = 24 \hat{i} - 14 \hat{j} + 16 \hat{k}$;
 c) $\vec{L}_{(P)} = 30 \hat{i} + 8 \hat{j} - 38 \hat{k}$; d) $\vec{F} = 24 \hat{i} - 8 \hat{j} + 24 \hat{k}$

Problema 2.3.6. Una partícula atada a una cuerda, de masa despreciable y longitud ℓ , oscila en el plano vertical.

- a) Encuentra la ecuación de movimiento utilizando la ley de movimiento del momento angular.
- b) Especifica el resultado para pequeñas oscilaciones.

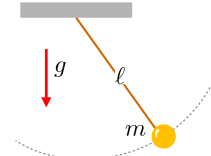


Figura del problema 2.3.6

Solución: a) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$; b) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta$

Cuestión 2.4.1. Una partícula de masa 2 kg se mueve en la dirección del eje x , sometida a una fuerza conservativa cuya energía potencial es $U = x^4 - 8x^2$ (unidades S.I.). Es cierto que:

- a) la fuerza es nula para $x = \pm 1$.
- b) la aceleración en $x = 0$ es máxima.
- c) la fuerza que actúa sobre la partícula tiene por expresión $F = -x^4 + 8x^2$.
- d) la fuerza que actúa sobre la partícula tiene por expresión $F = -\frac{x^5}{5} + \frac{8}{3}x^3$.
- e) la aceleración en $x = 1$ vale 6 m/s^2 .

Cuestión 2.4.2. En la figura, se muestra una curva de energía potencial en función de una variable x . ¿Cual de las gráficas siguientes de la fuerza en función de esta variable es compatible con la gráfica $U(x)$?

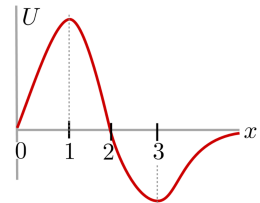
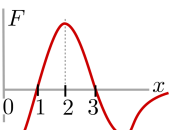
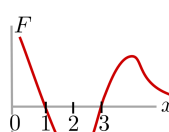
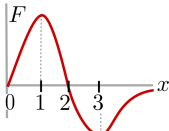
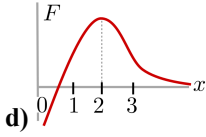


Figura de la cuestión 2.4.2

- a) 
- b) 
- c) 



d)

e) Si no se conoce la energía cinética, no se puede determinar la fuerza a partir de $U(x)$.

Cuestión 2.4.3. La fuerza que se ejerce sobre un cuerpo de 15 kg que se desplaza en la dirección del eje x varía con la posición en la forma indicada en la figura. Es cierto que:

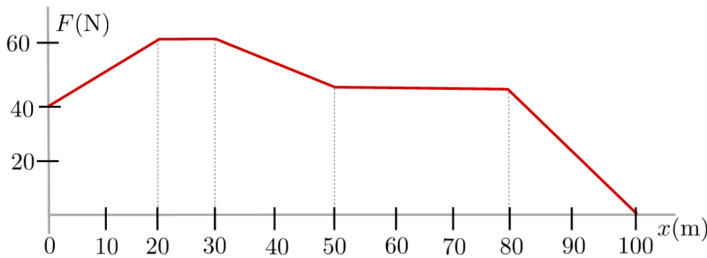


Figura de la cuestión 2.4.3

- a) cuando el cuerpo pasa de la posición $x = 0$ a $x = 50$ m, la energía potencial disminuye en 2600 J.
- b) cuando el cuerpo pasa de la posición $x = 80$ m a $x = 100$ m, la energía cinética disminuye en 400 J.
- c) en el tramo desde $x = 50$ m hasta $x = 80$ m, el movimiento es uniforme.
- d) la velocidad máxima alcanzada por el cuerpo se da en el tramo desde $x = 20$ m hasta $x = 30$ m.
- e) Ninguna de las otras cuatro afirmaciones es cierta.

Cuestión 2.4.4. Un cuerpo de 0,15 kg de masa se mueve a lo largo del eje x en un campo de fuerzas cuya energía potencial U se representa en la figura. Dejamos el cuerpo en el punto C con una velocidad de 4 m/s en el sentido positivo del eje x . Es cierto que:

- a) la energía mecánica del cuerpo es 0,3 J.
- b) la velocidad en el punto B es 3,4 m/s.

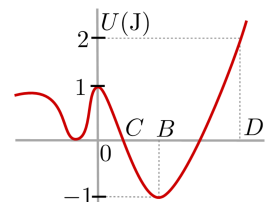


Figura de la cuestión 2.4.4

- c) la velocidad en $x = 0$ es nula.
- d) en el punto B , la energía mecánica del cuerpo es mínima.
- e) el cuerpo no puede llegar al punto D .

Cuestión 2.4.5. Una partícula de 80 g se mueve a lo largo del eje x por acción de una fuerza conservativa. Su energía potencial vale $U = x^4 - 2x^2$ (unidades S.I.). Si la energía mecánica de la partícula vale 3 J, su velocidad máxima será:

- a) 2,4 m/s
- b) 10 m/s
- c) 8 m/s
- d) 6,79 m/s
- e) 3,8 m/s

Cuestión 2.4.6. Una partícula se mueve por efecto de una única fuerza conservativa. Podemos afirmar que:

- a) en cualquier trayectoria, la variación de energía potencial entre las posiciones inicial y final de la trayectoria es siempre nula.
- b) si la partícula describe un movimiento circular uniforme, la variación de la energía potencial entre dos puntos de esta trayectoria es nula.
- c) el incremento de la energía mecánica de la partícula puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo del trabajo de la fuerza.
- d) la energía potencial de la partícula aumenta si el trabajo de la fuerza es positivo.
- e) Ninguna de las otras cuatro afirmaciones es correcta.

Cuestión 2.4.7. Si dejamos caer una piedra desde la torre de un castillo y despreciamos la resistencia del aire, es cierto que:

- a) el trabajo de la fuerza gravitatoria es nulo.
- b) la energía potencial de la piedra no varía.
- c) la energía cinética de la piedra no varía.

- d) la energía mecánica de la piedra no varía.
- e) el trabajo de la fuerza gravitatoria es negativo.

Cuestión 2.4.8. La energía potencial de una partícula de 5 kg de masa, que se mueve en la dirección del eje x , está indicada en la figura. Podemos afirmar que:

- a) la posición $x = 0$ es de equilibrio estable.
- b) la posición $x = 0$ es de equilibrio inestable.
- c) la aceleración en $x = 0$ es $-0,4 \text{ m/s}^2$.
- d) la aceleración en $x = 2 \text{ m}$ es -2 m/s^2 .
- e) el trabajo de la fuerza cuando la partícula pasa de $x = 0$ a $x = 2 \text{ m}$ es 4 J.

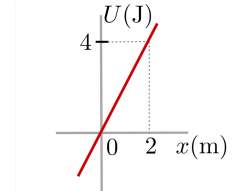


Figura de la cuestión 2.4.8

Cuestión 2.4.9. La fuerza que actúa sobre una partícula, de masa 4 kg, es $\vec{F} = 6z \hat{k}$. Si v es el módulo de la velocidad, la energía mecánica es, excepto en una constante (todas las unidades se expresan en el S.I.):

- a) $E = 2v^2 - 3z$
- b) $E = 4v^2 - 3z^2$
- c) $E = 2v^2 - 3z^2$
- d) $E = 2v^2 + 3z$
- e) $E = 2v^2 - \frac{1}{3}z^3$

Problema 2.4.5. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas de energía potencial asociada $U = 16 - (x^2 + y^2)$, en unidades S.I.

- a) Determina las ecuaciones de las superficies equipotenciales en que $U = 0$; $U = 12$ y $U = 18$. ¿Son todas posibles? Dibuja la primera.
- b) Encuentra el lugar geométrico de los puntos con U máximo. ¿Cuánto vale la energía potencial máxima?
- c) Encuentra la expresión analítica del campo de fuerzas cuya energía potencial es la dada.
- d) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en el punto $P_0 = (1; 1; 0)$? Si parte de P_0 en reposo, ¿cuál es la velocidad más alta que puede alcanzar en algún instante posterior?

e) Calcula el trabajo realizado por la fuerza para llevar la partícula desde P_0 hasta $P = (22; 22; 0)$.

Solución: a) $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 4$; no existe; b) $x^2 + y^2 = 0$, $U_{\text{máx}} = 16 \text{ J}$;
c) $\vec{F} = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$; d) $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$, $v = \infty$; e) $W = 966 \text{ J}$

Problema 2.4.6. Una partícula está sometida a una fuerza $F = -kx + a/x^3$. Encuentra la expresión de la energía potencial U .

Solución: $U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{a}{2x^2} + \text{cte.}$

Problema 2.4.7. Dada la fuerza $\vec{F} = (3x - 4y)\hat{i} + (4x + 2y)\hat{j}$, calcula:

a) el trabajo realizado por \vec{F} al llevar la partícula de A a B y el realizado en una vuelta completa a lo largo de la elipse, siendo a y b , respectivamente, los semiejes mayor y menor: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) ¿Es conservativa la fuerza \vec{F} ? ¿Por qué?

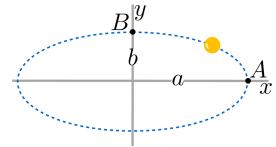


Figura del problema 2.4.7

Nota. Forma paramétrica de una elipse centrada en el origen:

$$\vec{r}(\lambda) = (x, y) = (a \cos \lambda, b \sin \lambda)$$

Solución: a) $\frac{2b^2 - 3a^2}{2} + 2\pi ab, 8\pi ab$; b) no

Problema 2.4.8. La fuerza que actúa sobre una partícula se expresa como $\vec{F} = -ax^2 \hat{i}$, donde a es una constante. Calcula la función energía potencial tomando $U = 0$ para $x = 0$ y dibuja el gráfico de U en función de x .

Solución: $U = \frac{1}{3}ax^3$

Problema 2.4.9. Un cuerpo de 2 kg de masa se puede desplazar por el plano horizontal xy , donde actúa la fuerza $\vec{F} = 2xy \hat{i} + x^3 \hat{j}$.

a) Calcula el trabajo de esta fuerza en el camino que va de $A = (1; 1)$ a $B = (5; 9)$ siguiendo la recta que une ambos puntos.

b) Calcula el trabajo entre A y B cuando el camino pasa por $C = (5; 1)$, siguiendo las direcciones de los ejes x y y en los trayectos AC y CB , respectivamente.

c) ¿Se puede asociar una energía potencial a esta fuerza?

Sustituimos la fuerza anterior por otra $\vec{F} = -2x \hat{i}$. Dejamos el cuerpo en el punto A con una velocidad de 8 m/s en la dirección del eje x en sentido positivo.

- d) Determina el incremento de energía potencial en el desplazamiento AC .
- e) ¿Hasta qué punto llegará el cuerpo en su movimiento?
- f) ¿Con qué velocidad pasará por la posición de equilibrio?

Nota. Las fuerzas están expresadas en N y las distancias, en m.

Solución: a) $W = 453,3 \text{ J}$; b) $W = 1024 \text{ J}$; c) Fuerza no conservativa, no se puede definir una energía potencial; d) $\Delta U = 24 \text{ J}$; e) Llega hasta el punto $(8,06; 1) \text{ m}$; f) $v = 8,06 \text{ m/s}$

Problema 2.4.10. Un cuerpo de 2 kg de masa parte del reposo y se mueve sin fricción hacia arriba en un plano inclinado de 30° con respecto a la horizontal, desplazándose 10 m . Sobre el cuerpo actúan, además del peso, las tres fuerzas, tal como se indica en la figura. Calcula el trabajo total realizado por el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo y la potencia de estas fuerzas en función de la distancia x recorrida.

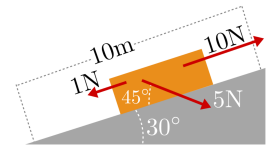


Figura del problema 2.4.10

Solución: $W = 27,26 \text{ J}$; $P = 4,50\sqrt{x}$, en unidades S.I.

Problema 2.4.11. Un objeto de 5 kg está sometido a una fuerza que varía con la posición del objeto, tal como se muestra en la figura. Si parte del reposo en $x = 0$, ¿cuál será su velocidad en $x = 25 \text{ m}$ y en $x = 50 \text{ m}$?

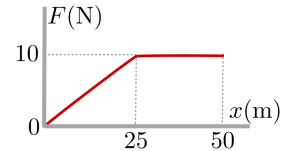


Figura del problema 2.4.11

Solución: $v_{25} = 7,07 \text{ m s}^{-1}$; $v_{50} = 12,25 \text{ m s}^{-1}$

Cuestión 2.5.1. Presionamos una caja de masa m contra una pared vertical con una fuerza horizontal de magnitud F . Si el coeficiente estático de rozamiento con la pared es μ , el valor mínimo de F para que la caja no deslice hacia abajo es:

- a) mg
- b) μmg
- c) $\sqrt{1 - \mu^2} mg$
- d) $\frac{mg}{\mu}$
- e) $mg\sqrt{\mu}$

Cuestión 2.5.2. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x y es atraída hacia el origen de coordenadas por una fuerza $F = -k/x$, donde k es una constante positiva. Si parte del reposo desde el punto x_0 , ¿qué velocidad llevará cuando pase por el punto $x = x_0/2$?

- a) $v = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- b) $v = \sqrt{\frac{2k}{m} \ln 2}$
- c) $v = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
- d) $v = \frac{k}{m} e^{-\frac{kx_0}{m}}$
- e) Ninguna de las anteriores.

Cuestión 2.5.3. La figura representa un plano inclinado de 30° con dos muelles idénticos de constante $k = 20 \text{ N/m}$, una en la parte superior y la otra en la parte inferior del plano. Un cuerpo de 2 N de peso se suelta sin velocidad inicial desde la posición indicada en la figura, estando el muelle de la parte superior comprimido una distancia x_1 (en metros). Al inicio del movimiento, el cuerpo se encuentra 50 cm por encima del extremo del muelle inferior. ¿Cuál debe ser el trabajo de la fuerza de fricción (en joules) existente entre el cuerpo y el plano para que la compresión máxima del muelle inferior sea también x_1 ?

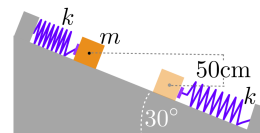


Figura de la cuestión 2.5.3

- a) $W_f = -(x_1 + 1)$
- b) $W_f = -(x_1^2 + 1)$
- c) $W_f = -\frac{(4x_1+2)}{20}$
- d) $W_f = -20x_1^2$
- e) Sin conocer la longitud natural de los muelles, no se puede saber.

Cuestión 2.5.4. Una partícula está sometida a una fuerza central dirigida a un punto O . Podemos afirmar que:

- a) la energía cinética de la partícula se mantiene constante.
- b) la trayectoria de la partícula está contenida en un plano y su cantidad de movimiento se mantiene constante.
- c) el momento angular de la partícula con respecto al punto O es nulo.
- d) el impulso angular de la fuerza con respecto al punto O es nulo.
- e) la trayectoria de la partícula es circular.

Cuestión 2.5.5. Dadas las fuerzas siguientes, indica cuáles son conservativas:

- A) fuerza de fricción seca que actúa sobre una caja que se desliza.
- B) fuerza que actúa sobre un cuerpo debida a un muelle que sigue la ley de Hooke.
- C) fuerza de la gravedad.
- D) La fuerza sobre un coche debida a la resistencia del aire.

- a) A, B y C
- b) A y D
- c) B y C
- d) C y D
- e) A, C y D

Problema 2.5.4. El cuerpo P de la figura adjunta tiene una masa $m = 5 \text{ kg}$ y gira a una velocidad angular de 20 rev/min alrededor del eje EE' sobre una superficie (fija) cónica lisa. El cuerpo está sujeto al eje mediante una cuerda, de masa despreciable y longitud $0,5 \text{ m}$, paralela a la superficie cuando P la toca. Si $\alpha = 45^\circ$, determina:

- a) la reacción de la superficie sobre el cuerpo.
- b) la tensión de la cuerda.
- c) la velocidad angular del cuerpo a la cual se separará de la superficie.

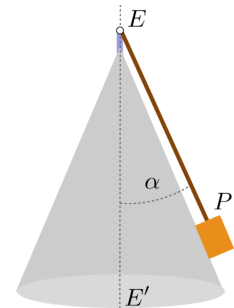


Figura del problema 2.5.4

Solución: a) $29,6 \text{ N}$; b) $40,13 \text{ N}$; c) $5,26 \text{ rad/s}$

Problema 2.5.5. Un cuerpo pequeño de masa $m = 5 \text{ kg}$ cae desde el punto A sin velocidad inicial, por el carril representado en la figura.

Solo hay fricción en el tramo BC , de longitud 4 m , y el punto A está situado a una altura $h_A = 2 \text{ m}$. Sabiendo que el cuerpo se para en el punto C , calcula el coeficiente de fricción entre el cuerpo deslizante y el suelo en el tramo BC .

Solución: $\mu = 0,5$

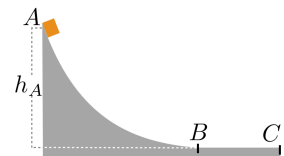


Figura del problema 2.5.5

Problema 2.5.6. Dejamos libre un bloque de 2 kg sobre un plano inclinado sin fricción a 4 m de un muelle de constante $k = 100 \text{ N/m}$. El plano está inclinado 30° .

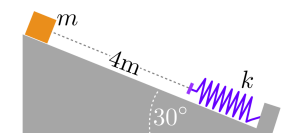


Figura del problema 2.5.6

- a) Calcula la compresión máxima del muelle, suponiendo que no tiene masa.
- b) Si hay fricción y el coeficiente de fricción entre la masa y el plano es 0,2, calcula la compresión máxima.
- c) En el último caso, donde hay fricción, ¿hasta qué distancia recorrerá el bloque por el plano después de separarse del muelle?

Solución: a) 0,989 m; b) 0,783 m; c) 1,54 m

Problema 2.5.7. Para desviar los electrones en un osciloscopio, se utiliza un campo eléctrico constante de 2000 N/C. Teniendo en cuenta que al inicio los electrones tienen una velocidad de 10^6 m/s, calcula la desviación cuando han recorrido 1 cm en la dirección normal al campo eléctrico.

Solución: 1,76 cm

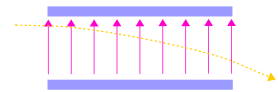


Figura del problema 2.5.7

Problema 2.5.8. En 2009, se inauguró el gran colisionador de hadrones (LHC) en Ginebra para estudiar las propiedades de las partículas subatómicas.

Históricamente, esto se ha hecho en cámaras de niebla, donde las partículas dejan un rastro de gotitas de condensación. Para determinar la carga de estas partículas y su masa, se han utilizado campos magnéticos. La fuerza que percibe una partícula cargada al atravesar un campo magnético es $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, donde q es la carga de la partícula, v es su velocidad y \vec{B} es el campo magnético. Demuestra que una partícula cargada dentro de un campo magnético, uniforme y normal al plano del movimiento describe una órbita circular de radio $R = \frac{mv}{qB}$, donde m es la masa de la partícula y v es su velocidad.



Figura del problema 2.5.8. Trayectorias de partículas subatómicas en el seno de un campo magnético

Problema 2.5.9. Las nubes están situadas a unos 2 km de distancia de la superficie terrestre. Calcula la velocidad con que caerían las gotas a tierra si no existiera rozamiento con el aire. Repite el cálculo teniendo en cuenta el rozamiento con el aire ($b = 10^{-4}$ kg/s) y que la masa de las gotas es de unos 0,1 g.

Solución: 197 m/s; 9,8 m/s

Problema 2.5.10. Una partícula de 4 kg de masa se mueve a lo largo del eje x según $x(t) = t + 2t^3$, (x en m y t en s). Calcula:

- a) la energía cinética en función del tiempo,
- b) la aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en función del tiempo,
- c) la potencia suministrada a la partícula en función del tiempo,

d) el trabajo realizado por la fuerza de $t = 0$ a $t = 2$ s.

Solución: a) $(2 + 24t^2 + 72t^4)$ J; b) $12t$ m/s²; $48t$ N; c) $(48t + 288t^3)$ W; d) 1248 J

Problema 2.5.11. Sobre un tablero horizontal se colocan dos pastillas, A y B , de masas m_A y m_B , con coeficientes de fricción pastilla-tablero μ_A y μ_B (fricción dinámica = estática). Vamos inclinando el tablero.

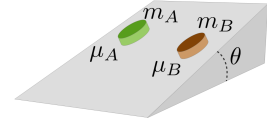


Figura del problema 2.5.11

a) ¿Cuál es la condición necesaria para que A inicie el movimiento antes que B ?

b) ¿Cuál es la condición necesaria para que los dos cuerpos se deslicen juntos?

c) Cumpliéndose la condición anterior, calcula el valor de θ que hace que el movimiento de A y B sea uniforme.

d) Calcula la aceleración del movimiento cuando θ es más mayor que el valor encontrado en c.

Solución: a) $\mu_A < \mu_B$; b) $\mu_A = \mu_B$; c) $\tan \theta = \mu_A = \mu_B$; d) $a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$



→ 3P

3 Problemas y cuestiones

Cuestión 3.2.1. Un alambre semicircular homogéneo de masa m se sujeta, tal como indica la figura, mediante una articulación en O . En equilibrio, θ vale:

- a) $25,1^\circ$
- b) $23,0^\circ$
- c) $32,5^\circ$
- d) $39,5^\circ$
- e) No puede estar en equilibrio.

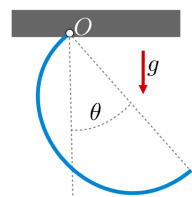


Figura de la cuestión 3.2.1

Cuestión 3.2.2. Un alambre homogéneo está doblado en forma de triángulo, tal como indica la figura. Las coordenadas del CM son:

- a) $(1; 4/3)$
- b) $(1; 3/2)$
- c) $(3/2; 2)$
- d) $(1; 2)$
- e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

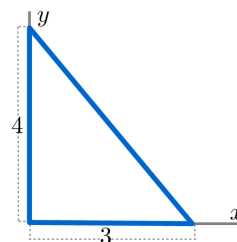


Figura de la cuestión 3.2.2

Cuestión 3.2.3. El objeto de la figura está constituido por dos alambres de longitud L y densidad lineal λ , situados en el plano xy , y por un cuarto de circunferencia de densidad lineal 2λ , situado en el plano yz . La coordenada z del centro de masas vale:

- a) $2L/(2 + \pi)$

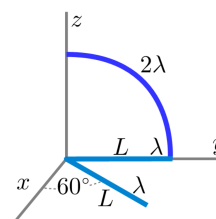


Figura de la cuestión 3.2.3

- b) $2L/\pi$
- c) $2L/(4 + \pi)$
- d) $L/2$
- e) $L/4$

Cuestión 3.2.4. ¿Cuál es la coordenada z del CM del cuarto de cono homogéneo, de altura h , de la figura?

- a) $h/16$
- b) $h/8$
- c) $h/4$
- d) $h/3$
- e) $h/2$

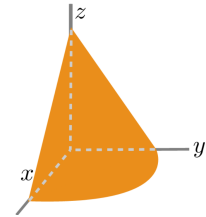


Figura de la cuestión 3.2.4

Cuestión 3.2.5. Una lámina rectangular homogénea de 4×8 cm de lado tiene un agujero circular de 1 cm de radio. El centro C del agujero se encuentra a una distancia b del centro O del rectángulo y está situado sobre el eje de simetría, tal como se puede ver en la figura. Para que el centro de masas de la lámina sea un punto de la periferia del agujero, b debe valer:

- a) 0,90 cm
- b) 0,50 cm
- c) 0,30 cm
- d) 0,70 cm
- e) 0,85 cm

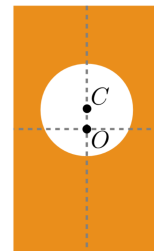


Figura de la cuestión 3.2.5

Cuestión 3.2.6. Un coche de 1500 kg se mueve hacia el oeste a una velocidad de 20 m/s y un camión de 3000 kg se mueve hacia el este a una velocidad de 16 m/s. Calcula la velocidad del centro de masas del sistema.

- a) 10 m/s hacia el oeste
- b) 4 m/s hacia el este

- c) 2 m/s hacia el este
- d) 5 m/s hacia el oeste
- e) 8 m/s hacia el este

Cuestión 3.2.7. Las coordenadas del CM de la pieza homogénea de la figura, en forma de sector circular de radio R , son:

- a) $x = y = 0,50R$
- b) $x = y = 0,33R$
- c) $x = y = 0,58R$
- d) $x = y = 0,62R$
- e) $x = y = R$

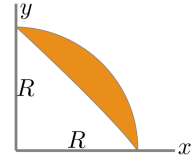


Figura de la cuestión 3.2.7

Cuestión 3.2.8. La pieza de la figura tiene una densidad volúmica uniforme. La parte superior es un cilindro de radio r y altura h , y la inferior es una semiesfera de radio $2r$. Para conseguir que el CM de la pieza esté en la base del cilindro, se debe cumplir:

- a) $h = \sqrt{2}r$
- b) $h = r/2$
- c) $h = 2r$
- d) $h = r$
- e) $h = 2\sqrt{2}r$

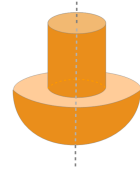


Figura de la cuestión 3.2.8

Cuestión 3.2.9. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas de la chapa homogénea de la figura, formada por un cuadrado y un círculo?

- a) $x_{CM} = R; y_{CM} = 1,44R$
- b) $x_{CM} = R; y_{CM} = 2R$
- c) $x_{CM} = 2,52R; y_{CM} = 1,76R$
- d) $x_{CM} = 1,88R; y_{CM} = 2R$

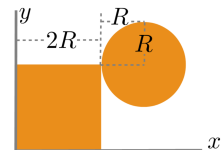


Figura de la cuestión 3.2.9

e) $x_{CM} = 1,88R$; $y_{CM} = 1,44R$

Cuestión 3.2.10. La distancia del centro de la base del sombrero de copa, hecho de lámina homogénea, al centro de masas es:



Figura de la cuestión 3.2.10

- a) $\frac{H^2 r}{R}$
- b) $\frac{R^2 r + r^2 R}{H^2 + 2Rr}$
- c) $\frac{H^2 r + r^2 H}{R^2 + 2Hr}$
- d) $\frac{H^2 R + R^2 H}{r^2 + 2HR}$
- e) $\frac{R^2 r}{H}$

Problema 3.2.3. Determina el CM de la varilla homogénea de la figura (unidades S.I.).



Figura del problema 3.2.3

Solución: Con el origen de (x, y) a la izquierda del inicio del semicírculo: $(3,13; 0,8)$

Problema 3.2.4. Un rodillo macizo tiene la forma indicada en la figura. El rodillo está construido a partir de un cilindro homogéneo al cual sacamos un trozo semi-esférico de una base y lo añadimos a la otra base. Halla el centro de masas en caso de que $a = 40$ cm y $d = 20$ cm.

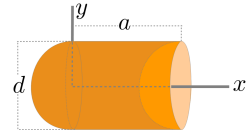


Figura del problema 3.2.4

Solución: $x_{CM} = 40/3$ cm

Problema 3.2.5. En la figura, se muestra un tren formado por tres vagones cuyas masas son $m_A = 21 \times 10^3$ kg, $m_B = 18 \times 10^3$ kg y $m_C = 24 \times 10^3$ kg. Los tres vagones están unidos por dos cadenas de masas despreciables.



Figura del problema 3.2.5

Si sobre el primer vagón se aplica una fuerza paralela a la vía $F = 70$ kN, y suponemos que no hay fricciones y que la vía es recta, determina la aceleración con que se desplazan los tres vagones y las tensiones de las dos cuerdas:

- a) si la vía es horizontal,
- b) si la vía está inclinada un ángulo $\theta = 15^\circ$ hacia arriba.

Solución:

- a) $a = 1,11 \text{ m/s}^2$; $T_{AB} = 46,7 \text{ kN}$; $T_{BC} = 26,7 \text{ kN}$
- b) $a' = -1,43 \text{ m/s}^2$; $T'_{AB} = 46,7 \text{ kN}$; $T'_{BC} = 26,7 \text{ kN}$

Cuestión 3.3.1. La condición necesaria y suficiente para que la cantidad de movimiento de un sistema de partículas se conserve exige que:

- a) se conserve la energía mecánica del sistema.
- b) el centro de masas del sistema esté en reposo.
- c) las fuerzas externas que actúen sean conservativas.
- d) la resultante de las fuerzas externas sea nula.
- e) las fuerzas internas del sistema sean conservativas.

Problema 3.3.2. Imaginemos que a un astronauta de 75 kg, que lleva una herramienta de 5 kg (total = 80 kg) en un “paseo espacial” fuera de la nave, se le rompe el cable que lo une con la nave. ¿Habría alguna manera de volver? Si se aleja de la nave a una velocidad de 2 m/s, ¿sería factible volver, o para siempre permanecería en el espacio?

Solución: Lanzando la herramienta a una velocidad con respecto a la nave > 32 m/s.

Problema 3.3.3. Un niño de 40 kg se halla en el extremo de una plataforma de 80 kg y 2 m de longitud. El niño se desplaza hasta el extremo opuesto de la plataforma. Suponemos que no hay rozamiento entre la plataforma y el suelo.

- a) ¿Cuánto se desplaza el centro de masas del sistema formado por la plataforma y el niño?
- b) ¿Cuánto se desplaza el niño con respecto al suelo? ¿Cuánto se desplaza la plataforma con respecto al suelo?
- c) Si el niño corre sobre la plataforma a una velocidad constante de 0,5 m/s (con respecto a la plataforma), ¿con qué velocidad se mueve la plataforma?

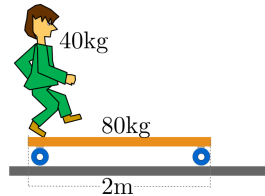


Figura del problema 3.3.3

Solución: a) No se desplaza; b) El niño se mueve $4/3$ m y la plataforma, $2/3$ m en sentido opuesto; c) $v = -1/6$ m/s

Cuestión 3.4.1. Un sistema está formado por dos partículas de la misma masa m . En un instante determinado, una de ellas está en reposo en el punto $(0; 0; 0)$ y la otra, situada en $(0, L, 0)$, se mueve a una velocidad $\vec{v} = v \hat{i}$. El momento angular del sistema con respecto al punto $(0; L/2; 0)$ es:

- a) $2mLv \hat{i}$

- b) $-\frac{mLv}{2}\hat{k}$
- c) $2mLv\hat{k}$
- d) $\frac{mLv}{2}\hat{i}$
- e) $mv\hat{k}$

Cuestión 3.4.2. Dos partículas de masas $m_1 = 10\text{ kg}$ y $m_2 = 20\text{ kg}$ se mueven con respecto a un sistema de referencia inercial según $\vec{r}_1 = 2t^2\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{r}_2 = 4t^2\hat{i} - 3\hat{j}$. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema con respecto al origen?

Nota. Todas las unidades están expresadas en el S.I.

- a) $\vec{L} = -600t\hat{k}$
- b) $\vec{L} = -360t^2\hat{k}$
- c) $\vec{L} = 12t\hat{k}$
- d) $\vec{L} = 360t\hat{k}$
- e) $\vec{L} = -12t\hat{k}$

Cuestión 3.4.3. Dos partículas de masas $m_1 = 10\text{ kg}$ y $m_2 = 20\text{ kg}$ se mueven con respecto a un sistema de referencia inercial según $\vec{r}_1 = 2t^2\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{r}_2 = 4t^2\hat{i} - 3\hat{j}$. ¿Cuánto vale el momento resultante de las fuerzas con respecto al origen?

Nota. Todas las unidades están expresadas en el S.I.

- a) $\vec{M} = 12\hat{k}$
- b) $\vec{M} = 600t\hat{k}$
- c) $\vec{M} = 360\hat{k}$
- d) $\vec{M} = -600\hat{k}$
- e) $\vec{M} = -360t\hat{k}$

Problema 3.4.3. En patinaje artístico, es común aumentar la velocidad angular encogiendo los brazos. En una primera aproximación, podemos suponer que los brazos tienen una masa despreciable por el hecho de llevar unas pesas en cada mano y que el resto de cuerpo está muy próximo al eje de giro. Calcula la relación entre la velocidad angular inicial y final, si la patinadora encoge las manos desde una distancia de 1 m del cuerpo a 20 cm.

Solución: $\omega_f/\omega_{in} = 25$

Problema 3.5.3. Un niño de masa $m = 35 \text{ kg}$ se halla en el extremo de una carretilla de masa $M = 70 \text{ kg}$ que inicialmente está parada y que puede rodar libremente (v. figura). En un instante determinado, el niño da un salto con una velocidad de salida $v_0 = 5 \text{ m/s}$ y un ángulo $\theta = 30^\circ$ con el suelo, y cae justamente en el otro extremo de la carretilla.

Despreciando cualquier tipo de fricción, determina:

- a) la velocidad con que se desplaza hacia atrás la carretilla mientras el niño está en el aire durante el salto;
- b) la distancia que recorre el niño con respecto al suelo;
- c) la distancia que recorre la carretilla y su longitud;
- d) la velocidad de la carretilla una vez el niño ha aterrizado en el otro extremo.

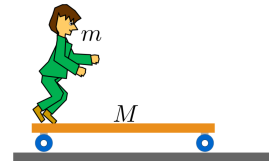


Figura del problema 3.5.3

Solución: a) 2,17 m/s; b) 2,21 m; c) 1,11 m y 3,31 m; d) 0

Problema 3.5.4. Un bloque de 50 kg está en contacto con un muelle de constante elástica 300 N/m y de masa despreciable y comprimida 0,2 m. El conjunto está sobre una vagoneta de 75 kg (las ruedas son de masa despreciable) y lo soltamos. Determina las velocidades del bloque y de la vagoneta a partir del instante en que el bloque, deslizándose sin fricción sobre la vagoneta, pierde el contacto con el muelle.

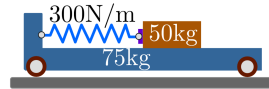


Figura del problema 3.5.4

Solución

v : velocidad del bloque, positiva hacia la derecha. V : velocidad de la vagoneta, positiva hacia la izquierda.

Conservación de la cantidad de movimiento: $0 = 50v - 75V$

Conservación de la energía: $\frac{1}{2}300 \cdot 0,2^2 = \frac{1}{2}50v^2 + \frac{1}{2}75V^2$

Resolviendo el sistema y tomando la solución positiva, que es la que está de acuerdo con el hecho de que el muelle esté inicialmente comprimido:

$$v = 0,3795 \text{ m/s} ; V = 0,2540 \text{ m/s} \quad \blacksquare$$

Problema 3.6.2. Una bola de 8 kg de masa, con una velocidad de 5 m/s, choca sin fricción con otra, de igual radio, de 6 kg y en reposo, sobre un suelo horizontal liso.

Determina la velocidad y la dirección de la segunda bola, si la primera es desviada, a consecuencia del choque, 30° con respecto a la dirección inicial, suponiendo que el suelo y las bolas son lisas y el choque es elástico.

Solución: Dos soluciones son posibles, 5,68 m/s; $-5,9^\circ$ y 3,35 m/s; $-54,1^\circ$ (los ángulos, con respecto a la dirección inicial).

Problema 3.6.3. Una bola de masa $m = 0,5 \text{ kg}$ se sujeta mediante una cuerda inextensible y de masa despreciable, de longitud $L = 1 \text{ m}$. Se separa la masa 90° con respecto a la posición de equilibrio y se deja caer. Al llegar a la parte inferior de la trayectoria, la bola choca de forma inelástica con un bloque de masa $M = 3 \text{ kg}$, que se halla en reposo sobre una superficie. Sabiendo que el coeficiente de restitución entre la bola y el bloque es $e = 0,8$ y que el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal es $\mu = 0,2$, determina:

- a) la velocidad del bloque y de la bola después de la colisión;
- b) el trabajo realizado por la fuerza de fricción hasta que el bloque de masa M se para, y
- c) la altura alcanzada por la bola después de la colisión.

Solución: a) m retrocede a una velocidad de $2,40 \text{ m/s}$ y M avanza a una velocidad de $1,14 \text{ m/s}$; b) $-1,95 \text{ J}$; c) $0,29 \text{ m}$

Problema 3.6.4. Un bloque de 13 kg se halla en reposo sobre una superficie horizontal. Lanzamos horizontalmente contra él una masa de 400 g de arcilla, que queda adherida. El bloque y la arcilla deslizan 15 cm sobre la superficie. Si el coeficiente de fricción es $0,4$, ¿cuál es la velocidad inicial de la arcilla?

Solución: $36,4 \text{ m/s}$

Problema 3.6.5. Un objeto de 11 kg explota en tres trozos de masas $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$ y m_3 , con velocidades coplanarias $\vec{v}_1 = (v_{1x}, 3)$, $\vec{v}_2 = (4, v_{2y})$ y $\vec{v}_3 = (0; 2)$. Calcula v_{1x} y v_{2y} .

Solución: $v_{1x} = -6,00 \text{ m/s}$; $v_{2y} = -2,33 \text{ m/s}$

Problema 3.6.6. Un pajarito de 125 g que vuela a $0,6 \text{ m/s}$ está a punto de capturar una abeja de 5 g que vuela perpendicularmente a 15 m/s . ¿Cuál será la velocidad del pajarito justo después de capturar la abeja?

Solución: $0,816 \text{ m/s}$

Problema 3.6.7. Soltamos una esfera de 1 kg desde una altura $1,8 \text{ m}$, que rebota sobre una placa de 5 kg y llega a una altura máxima de $1,5 \text{ m}$. Determina:

- a) el coeficiente de restitución en este caso y
- b) la altura máxima a que llegaría la esfera si la placa estuviera soportada por dos muelles de constante elástica $k = 2 \text{ kN/m}$ cada una y el choque fuera completamente elástico.

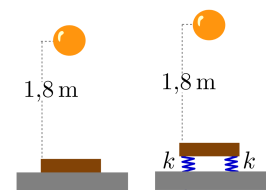


Figura del problema 3.6.7

c) Calcula la máxima deformación de los muelles.

Solución: a) 0,913; b) 0,8 m; c) 0,07 m

Problema 3.6.8. Desde una torre de 95 m de altura, se deja caer una piedra y, un segundo más tarde, se lanza una segunda piedra idéntica desde el suelo hacia arriba y por la misma vertical. Ambas chocan frontalmente y elásticamente en el punto medio de la torre. Calcula:

- a) las velocidades de las piedras justo después del choque,
- b) la altura a que llega la primera piedra después del choque y
- c) la altura a que llegaría la segunda piedra si no hubiera chocado.

Solución: \sqrt{x} a) 30,5 m/s y $-12,32$ m/s; b) 7,74 m; c) 55,225 m

Problema 3.6.9. Una bola de 4 kg de masa se mueve sobre un suelo horizontal perfectamente liso, a una velocidad, con respecto al sistema de referencia (x, y) fijado al suelo, de $(20; 0)$ m/s y choca con otra de 6 kg que se mueve a una velocidad de $(10; 10)$ m/s.

- a) Si ambas bolas salen enganchadas a consecuencia del choque, determina la velocidad (vectorial) del conjunto.
- b) Calcula, en este último caso, la energía (de traslación) disipada en el choque.
- c) Las dos bolas son lisas y tienen el mismo radio. El choque es totalmente elástico. Encuentra las dos posibles velocidades (vectorial) de la segunda bola, si sabemos que la primera sale en dirección y sentido $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Solución: a) $(14; 6)$ m/s; b) 240 J; c) $(9,81; 2,19)$ m/s y $(19,39; 7,72)$ m/s

Problema 3.7.2. Se denomina *velocidad de escape* asociada a un planeta (o estrella) la velocidad mínima para que un cuerpo se escape de él (eso es, que saliendo de la superficie del planeta, llegue hasta el infinito con velocidad nula). Demuestra que esta velocidad es $v = \sqrt{2GM/R}$, donde G es la constante gravitatoria, M es la masa del planeta y R es su radio.

Se denomina *agujero negro* un astro con velocidad de escape igual a la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s). ¡Nada se puede escapar! Calcula, utilizando la mecánica newtoniana, qué radio debería tener el Sol ($M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg) para que se comportara como un agujero negro.

Solución: $R_{\text{Sol}} = 2,93$ km

Problema 3.7.3. Demuestra que la energía total de un cuerpo en órbita circular alrededor de un planeta (el planeta se puede considerar fijo) es la mitad de su energía potencial.

Problema 3.7.4. La vida en el planeta Tierra, tal como la conocemos, desaparecerá de aquí a 10^9 años porque la brillantez del Sol crecerá hasta eliminar toda posibilidad de supervivencia. Para evitarlo, tenemos dos posibilidades (según Korycansky *et al.*): emigrar a otro planeta o aumentar el radio de la órbita del planeta Tierra de $1,5 \times 10^{11}$ m hasta $2,2 \times 10^{11}$ m (aproximar la órbita de la Tierra a una circunferencia con el Sol fijo en el centro). La primera posibilidad implica que toda la biomasa del planeta (que supondremos de masa $m_{\text{bio}} = 10^{20}$ kg) abandone la ligadura con el campo gravitatorio terrestre, es decir, que logre la velocidad de escape. A partir de estos datos, ¿qué método es más factible energéticamente (“cuesta” menos energía): hacer emigrar toda la biomasa o cambiar la órbita del planeta?

Datos: $M_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg y $R_{\text{Tierra}} = 6 \times 10^6$ m

[Problema inspirado en el artículo “Astronomical engineering: a strategy for modifying planetary orbits”, publicado en la revista *Astrophysics and Space Science*, de D. G. Korycansky *et al.* A su vez, el autor se inspira en unos cálculos de Carl Sagan en 1993 (Pollack y Sagan, 1993).]

Solución: Coste energético de cambiar la órbita de la Tierra: $8,4 \times 10^{32}$ J. Coste energético de emigrar de la Tierra: $6,57 \times 10^{27}$ J

Problema 3.7.5. Se puede calcular el campo gravitatorio en la superficie terrestre a partir de datos de la órbita de la Luna, tal como hizo Newton. Calcula este valor a partir de los datos de la Luna que se proponen: $T = 28$ días, $R_{\text{órbita}} = 3,8 \times 10^8$ m, $R_{\text{Tierra}} = 6,37 \times 10^6$ m. Compara este resultado con el valor conocido de $g = 9,81$ m/s² para la superficie terrestre.

Solución: $g = 9,1$ m/s²

Problema 3.7.6. Calcula la fuerza de atracción gravitatoria que siente un niño recién nacido, de 2 kg de masa, debida a la comadrona, que supondremos de 70 kg de masa, si está a una distancia $d = 0,5$ m del bebé. Calcula la atracción gravitatoria que siente el mismo niño, debida al planeta Marte, de masa $M_{\text{Marte}} = 6,4185 \times 10^{23}$ kg, si está a una distancia $d = 5,9 \times 10^7$ km. A partir de los datos obtenidos razona si, según la astrología, los planetas vendrían a definir el carácter de las personas. ¿Podría esto ser debido a la interacción gravitatoria?

Solución: $F_{\text{niño-comadrona}} = 3,7 \times 10^{-8}$ N; $F_{\text{niño-Marte}} = 7,92 \times 10^{-9}$ N

Cuestión 3.10.1. La partícula de la figura, de masa 1 kg, está obligada a pasar por el alambre sin fricción. En todo momento, actúa la resultante de las fuerzas externas: $\vec{F} = -4y^3 \hat{j}$. Si la soltamos sin velocidad inicial en el punto A, ¿qué velocidad tendrá cuando pase por B? **Nota.** Todas las unidades se expresan en el S.I.

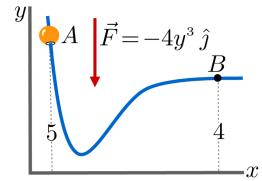


Figura de la cuestión 3.10.1

- a) 19,20 m/s
- b) 27,17 m/s
- c) 13,58 m/s
- d) 11,04 m/s
- e) 7,81 m/s

Problema 3.10.7. Una corredora de 3 kg cae sin velocidad inicial y se desliza sin rozamiento en un plano vertical por la guía de la figura. El muelle a que está unida tiene una constante recuperadora de 4 N/cm. La longitud natural del muelle es de 60 cm. Encuentra la velocidad de la corredora cuando pasa por B. ¿Dónde se parará?

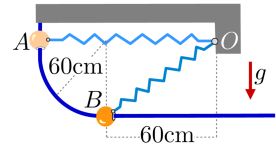


Figura del problema 3.10.7

Solución: $v_B = 7,18$ m/s. Se para en el punto C, $\overline{BC} = 1,72$ m

Problema 3.10.8. Un cuerpo de masa m , de pequeñas dimensiones, se deja caer desde el punto A por el carril de la figura. Si el cuerpo se desliza sin fricción y $h_A = 3R$, donde R es el radio de la circunferencia, encuentra:

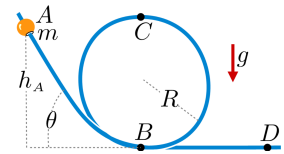


Figura del problema 3.10.8

- a) la fuerza que ejerce el cuerpo sobre el carril en los puntos B y C, y
- b) el valor de la altura del punto A para que la fuerza en el punto C sea nula.

Solución: a) $F_B = m \frac{v_B^2}{R} + mg = 7mg$ y $F_C = m \frac{v_C^2}{R} - mg = mg$; b) $h'_A = \frac{5}{2}R$

Problema 3.10.9. Una bolita de masa 0,1 kg está ensartada en una guía en forma de elipse siendo $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3}$, respectivamente, los semiejes de la elipse: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Además, hay un campo de fuerzas $\vec{F} = (3x - 4y)\hat{i} + (4x + 2y)\hat{j}$. La bolita sale del punto A a una velocidad $\vec{v}_A = 10 \hat{j}$ (v. figura). Calcula:

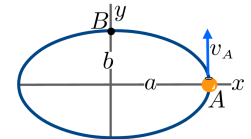


Figura del problema 3.10.9

- a) la velocidad con que la partícula pasa por el punto B y
- b) la velocidad con que vuelve a pasar por el punto A.

Nota 1. Todas las magnitudes están expresadas en el S.I.; **Nota 2.** Ecuación paramétrica de una elipse: $\vec{r}(\lambda) = (a \cos \lambda, b \sin \lambda)$

Solución: a) $v_B = 20,2 \text{ m/s}$; b) $v'_A = 36,5 \text{ m/s}$.

Problema 3.10.10. Un carrito, de masa m , es acelerado sin fricción a través de la fuerza proporcionada por la cuerda (de masa despreciable) atada a la bola, de masa m , que cae deslizándose por el tubo. La polea (pequeña y sin fricción) y el tubo son solidarios a la plataforma por donde se desplaza el carrito y, junto con esta, tienen una masa $2m$ y se deslizan por una guía horizontal. Encuentra la velocidad V de la plataforma en función de la coordenada y de la bola (v. figura) si, estando todo parado, soltamos el carrito cuando la bola está en $y = 0$.

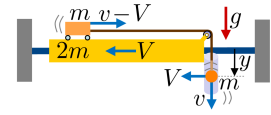


Figura del problema 3.10.10

Nota. Las velocidades de la figura están referidas a un observador en reposo.

Solución: $V = \sqrt{\frac{1}{14}gy}$

Problema 3.10.11. El carrito de masa m es acelerado sin fricción por la fuerza que le proporciona el muelle (de masa despreciable) fijado a la plataforma, de masa $2m$, que se desliza por una guía sin fricción. Halla la velocidad v del carrito cuando el alargamiento del muelle vale $x < L$, si, estando todo parado, soltamos el carrito cuando el alargamiento del muelle es $x = L$.

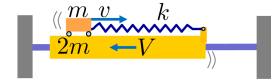


Figura del problema 3.10.11

Nota. Las velocidades de la figura están referidas a un observador en reposo.

Solución: $v = \sqrt{\frac{2k}{3m}(L^2 - x^2)}$

Cuestión 3.12.1. Un cilindro homogéneo de radio R se desplaza en un plano vertical por una superficie horizontal rodando y deslizándose. Si, en un instante dado, la velocidad del centro de masas es v hacia la derecha y la del punto de contacto con la superficie es $\frac{v}{2}$, también hacia la derecha, el módulo de la velocidad angular en este instante es:

- a) $\frac{2v}{3R}$
- b) $\frac{3v}{4R}$
- c) $\frac{v}{2R}$
- d) $\frac{4v}{3R}$
- e) $\frac{3v}{2R}$

Problema 3.13.3. Dos partículas de masas $m_1 = 3 \text{ kg}$ y $m_2 = 6 \text{ kg}$ están unidas por una barra rígida de masa despreciable. Inicialmente, se encuentran en reposo y son sometidas, respectivamente, a la acción de las fuerzas, ambas expresadas en

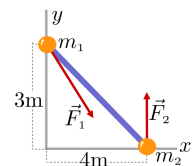


Figura del problema 3.13.3

N , $\vec{F}_2 = 3\hat{j}$ y $\vec{F}_1 = 6\hat{i} - 6\hat{j}$, tal como se muestra en la figura. Determina el CM y la cantidad de movimiento del sistema en función del tiempo.

Solución: $\vec{R}_{CM} = \left(\frac{t^2}{3} + \frac{8}{3}\right)\hat{i} + \left(1 - \frac{t^2}{6}\right)\hat{j}$ (m) y $\vec{P}(t) = 6t\hat{i} - 3t\hat{j}$ (kg m s^{-1})

Problema 3.13.4. El cuadrado de la figura tiene el CM en el centro. Si aplicamos solo dos fuerzas de 2 N, tal como se indica en la figura, ¿girá en sentido horario o en sentido antihorario?

Solución: El cuadrado no gira.

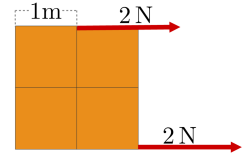


Figura del problema 3.13.4

Problema 3.13.5. Una barra homogénea de 1 kg y 80 cm de longitud se sitúa en un plano vertical entre dos paredes paralelas lisas, separadas 40 cm. La barra se fija a un muelle, de constante recuperadora $k = 50 \text{ N/m}$, como se indica en la figura.

Con la barra situada de modo que el muelle esté relajado (longitud natural), la dejamos caer. Cuando llega al punto en que inicia la subida, determina:

- a) la distancia que ha recorrido la barra;
- b) la fuerza que ejerce el muelle sobre la barra y la aceleración de esta, y
- c) las fuerzas que las paredes ejercen sobre la barra.

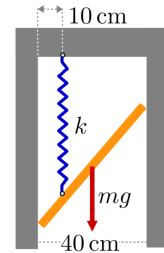


Figura del problema 3.13.5

Solución: a) 39,2 cm; b) 19,62 N (ascendente); 9,81 m/s^2 (ascendente); c) iguales y de sentido contrario, de módulo 2,83 N

→ 4P

4 Problemas y cuestiones

Problema 4.2.1. La pieza de la figura está hecha con dos alambres diferentes. El de la parte horizontal tiene una densidad lineal doble del de la parte semicircular. ¿Qué relación debe existir entre a y r si se quiere que, cuando se cuelgue la pieza del punto P , se mantenga en equilibrio, tal como se ve en la figura?

Solución: $a = \sqrt{2} r$

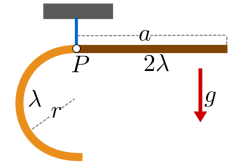


Figura del problema 4.2.1

Cuestión 4.3.1. El pistón de la figura, de superficie S , exento de rozamiento, se halla en equilibrio bajo la acción de la fuerza que ejerce sobre el agua. El gas dentro del recipiente tiene una presión P . Sabiendo que la densidad del agua es ρ , y si P_a es la presión atmosférica, el peso del pistón es:

- a) $(H - h)\rho g S$
- b) $(P - P_a)S + h\rho g S$
- c) $(P - P_a)S + (H - h)\rho g S$
- d) $H\rho g S$
- e) $h\rho g S$

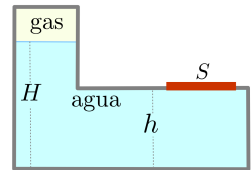


Figura de la cuestión 4.3.1

Cuestión 4.3.2. El cuerpo macizo de la figura está constituido por dos cubos A y B , homogéneos y de 900 kg/m^3 de densidad, soldados entre sí de forma que sus centros de masa estén en la misma vertical. Los volúmenes de A y B son de 1 m^3 y 8 m^3 , respectivamente. El cuerpo está en equilibrio flotando en el agua con el cubo B totalmente sumergido, tal como se puede ver en la figura. El centro de empuje en esta situación de equilibrio se encuentra a una distancia de la superficie libre del agua, que vale:

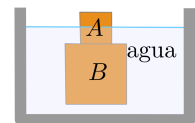


Figura de la cuestión 4.3.2

- a) 1,115 m
- b) 1,087 m
- c) 1,057 m
- d) 1,500 m
- e) 1,322 m

Cuestión 4.3.3. Un cubo de arista a y 600 kg/m^3 de densidad flota en un líquido estando la tercera parte de la arista sumergida en el líquido. Sabemos que, si sobre el cubo añadimos un cilindro de la misma densidad pero de 2 m^3 de volumen, el cubo estará totalmente sumergido con su base superior enrasada con la superficie del líquido. ¿Cuál será longitud de la arista a ?

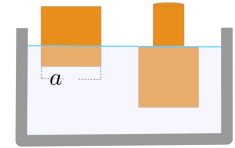


Figura de la cuestión 4.3.3

- a) 3 m
- b) 1,5 m
- c) 1 m
- d) 0,5 m
- e) 2,5 m

Cuestión 4.3.4. En el recipiente de la figura, la presión manométrica del gas 2 es $P_2 = 51300 \text{ Pa}$. Sabiendo que las densidades de los líquidos son $\rho_1 = 3 \text{ g/cm}^3$ y $\rho_2 = 1 \text{ g/cm}^3$, la presión del gas 1 será ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$):

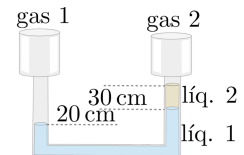


Figura de la cuestión 4.3.4

- a) 60129 Pa
- b) 72240 Pa
- c) -20340 Pa
- d) 54328 Pa
- e) 129354 Pa

Cuestión 4.3.5. El cuerpo de la figura, de $1,5 \text{ m}$ de anchura, está formado por dos cuerpos de densidades diferentes, tal como se indica en la figura. El centro de empuje se halla a una profundidad:

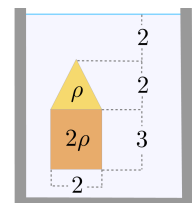


Figura de la cuestión 4.3.5

- a) 4,96 m

- b) 6,05 m
- c) 4,74 m
- d) 5,22 m
- e) 5,47 m

Cuestión 4.3.6. El cuerpo esférico de la figura está constituido por dos semiesferas macizas de densidades una el doble de la otra. Lo atamos a una cuerda y lo sumergimos en un líquido hasta la mitad, tal como se ve en la figura. En esta situación, la distancia entre el centro de empuje y el centro de masas del cuerpo vale:

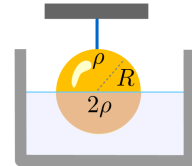


Figura de la cuestión 4.3.6

- a) $R/7$
- b) $R/2$
- c) $R/6$
- d) $R/4$
- e) $R/8$

Problema 4.3.4. Dejamos caer una gota de mercurio de 13 g en un vaso lleno de agua de 20 cm de profundidad. Calcula cuánto tardará la gota en llegar al fondo del vaso:

- a) si no tenemos en cuenta el empuje de Arquímedes y
- b) teniendo en cuenta el empuje de Arquímedes.

Datos: $\rho_{\text{Hg}} = 13 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; $\rho_{\text{agua}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Solución: a) $a = g$, $t = 0,202 \text{ s}$; b) $a = g(1 - \rho_{\text{agua}}/\rho_{\text{Hg}})$, $t = 0,210 \text{ s}$

Problema 4.3.5. La red de alcantarillado de dos poblaciones está unida por una serie de conductos enterrados. Un día, la presión atmosférica en el pueblo A es de $P_A = 1,035 \times 10^5 \text{ Pa}$ y en la población B, de $P_B = 1,03 \times 10^5 \text{ Pa}$. Haz el esquema de la figura e indica en qué pozo la altura del agua será mayor y por qué. Calcula la diferencia de altura del agua del pozo de la población A y del de la población B.

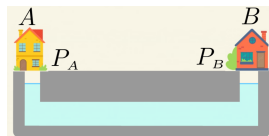


Figura del problema 4.3.5

Solución: 0,051 m

Problema 4.3.6. Cuando un barco como el de la figura flota en el agua, una parte de él queda sumergida. Si denominamos h la altura del agua con respecto al fondo

del barco, ¿en qué caso la altura h será mayor, si el barco está en agua dulce o en agua salada?

El barco de la figura tiene un volumen total de 100 m^3 y una masa de 2000 kg . Calcula qué porcentaje del volumen del barco estará sumergido en el mar. Si el mismo barco se encuentra en agua de río, calcula qué porcentaje del volumen estará ahora bajo el agua.

Datos: $\rho_{\text{mar}} = 1,025 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{\text{río}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Solución: En agua de mar, 1,95%; en agua de río, 2,00%

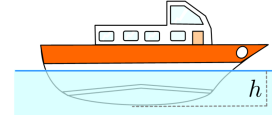
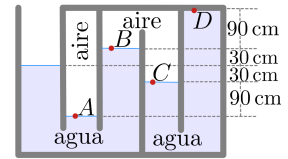


Figura del problema 4.3.6

Problema 4.3.7. Un recipiente contiene agua y aire, como se ve en la figura. ¿Cuál es la presión manométrica, P_m , en A , B , C y D ?

Nota: $P_m = P - P_{\text{at}}$

Solución: $P_{mA} = 11760 \text{ Pa}$, $P_{mB} = P_{mC} = -2940 \text{ Pa}$, $P_{mD} = -17600 \text{ Pa}$



$$P_{\text{at}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Figura del problema 4.3.7

Cuestión 4.5.1. El cilindro de la figura (de masa M) se mantiene en equilibrio debido a la fuerza F de la cuerda (solidaria con el cilindro) y a la fricción entre el cilindro y la pared (de coeficiente μ). Indica cuál de las respuestas es cierta:

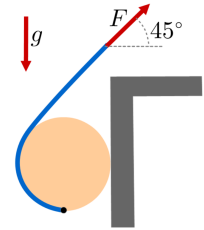


Figura de la cuestión 4.5.1

- a) En equilibrio, se verifica que $F < Mg$.
- b) En equilibrio, se verifica que $F > Mg$.
- c) Solo habrá equilibrio si $\mu > 1$.
- d) Si F es mucho mayor que Mg , la fuerza de fricción y el peso del cilindro tienen el mismo sentido.
- e) Es imposible que haya equilibrio porque sobre el cilindro actúan tres fuerzas coplanarias no concurrentes.

Cuestión 4.5.2. El bloque triangular homogéneo de la figura de peso P tiene una altura h y una base b . El coeficiente de fricción entre el suelo y el bloque es μ . En condiciones de deslizamiento y vuelco inminente, indica cuál de las respuestas es cierta:

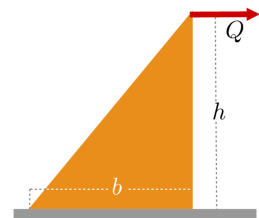


Figura de la cuestión 4.5.2

- a) $\mu = \frac{b}{3h}$
- b) $\mu = \frac{2b}{3h}$
- c) Si $Q = 0$, el bloque no puede estar nunca en equilibrio.

- d) Si $h > b$, el bloque siempre girará antes de deslizarse.
- e) Las afirmaciones anteriores son erróneas.

Cuestión 4.5.3. Se quiere hacer volcar sin deslizarse el cuerpo homogéneo de peso W , aplicando la fuerza F , tal como se muestra. El coeficiente de rozamiento μ entre el bloque y el suelo horizontal ha de ser:

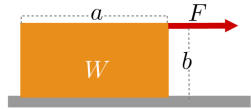


Figura de la cuestión 4.5.3

- a) $\mu < \frac{a}{2b}$
- b) $\mu = \frac{a}{2b}$
- c) $\mu > \frac{a}{2b}$
- d) $\mu = \frac{F}{W}$
- e) Ninguna de las respuestas anteriores.

Cuestión 4.5.4. Indica cuál de las respuestas es cierta:

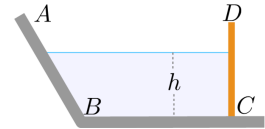


Figura de la cuestión 4.5.4

- a) La fuerza del agua sobre la pared \overline{AB} del depósito de la figura es horizontal y se aplica a una altura $h/3$.
- b) El empuje del agua sobre un cuerpo que flota en equilibrio puede tener una dirección arbitraria, dependiendo de la forma del cuerpo.
- c) Ninguna de las otras respuestas es cierta.
- d) Si la barrera \overline{CD} de la figura se apoya sobre el fondo en C , sin rozamiento, es posible mantenerla en equilibrio mediante una fuerza F adecuada, aplicada a una altura $h/2$.
- e) La fuerza del agua sobre el fondo \overline{BC} del depósito tiene una componente horizontal hacia la izquierda.

Cuestión 4.5.5. El muro de un embalse tiene la sección trapezoidal indicada en la figura. La altura es h y la longitud en la dirección transversal de la figura es ℓ . Si g es la aceleración de la gravedad y ρ es la densidad del agua, el módulo de la fuerza que ejerce el agua sobre el muro es:



Figura de la cuestión 4.5.5

- a) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2 \sin \theta}$
- b) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{3}$

c) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2}$

d) $F = \frac{\rho g h^2 \ell}{2 \cos \theta}$

e) No se puede calcular con los datos proporcionados.

Cuestión 4.5.6. Una bola de 0,3 kg de masa se engancha al punto A de un alambre que tiene forma de semicircunferencia de 50 cm de radio y centro C . El alambre es homogéneo y tiene una masa de 0,2 kg. Cuando colgamos el conjunto de la forma indicada en la figura, el ángulo θ , una vez alcanzada la posición de equilibrio, será:

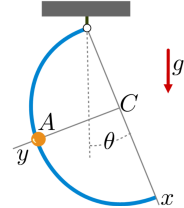


Figura de la cuestión 4.5.6

a) 14,4°

b) 17,6°

c) 40,5°

d) 32,5°

e) 30,3°

Cuestión 4.5.7. Una esfera maciza homogénea de peso W y radio R está suspendida de la pared por medio de un hilo de masa despreciable y longitud $5/3R$, tal como se ve en la figura. El punto A , unión de la esfera con el hilo, está sobre la vertical que pasa por el centro de la esfera. En el contacto entre la pared y la esfera en el punto B no hay fricción. Si T es la tensión del hilo y B es la reacción de la pared, podemos afirmar que:

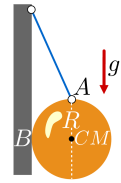


Figura de la cuestión 4.5.7

a) $T = \frac{5}{3}W$

b) $B = \frac{4}{3}W$

c) $B = \frac{3}{4}W$

d) La reacción de la pared en B es nula, debido a que no hay fricción.

e) La esfera no puede estar en equilibrio en la posición que se indica en el enunciado.

Cuestión 4.5.8. Una anilla delgada y homogénea de radio R y peso P , situada sobre el plano inclinado de la figura, se aguenta con un cable \overline{CB} , paralelo al plano inclinado, siendo su tensión T . Si μ es el coeficiente de fricción entre el plano inclinado y la anilla, y esta se encuentra en condiciones de movimiento inminente, indica cuál de las respuestas es cierta:

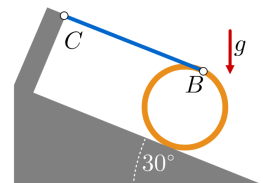


Figura de la cuestión 4.5.8

- a) $\mu = 0,29$
- b) $\mu = 0,45$
- c) $\mu = 0,84$
- d) $\mu = \tan 60^\circ$
- e) $\mu = \tan 30^\circ$

Cuestión 4.5.9. La tensión máxima que soporta el cable de la figura es de 600 N. La barra, articulada en el punto A con la pared, tiene un peso de 800 N y una longitud de 8 m. Para mantenerla en equilibrio en posición horizontal, la distancia máxima de su CM al extremo A ha de ser:

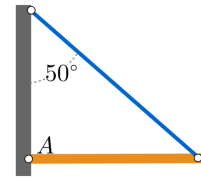


Figura de la cuestión 4.5.9

- a) 4 m
- b) 3,51 m
- c) 4,63 m
- d) 3,25 m
- e) 3,86 m

Cuestión 4.5.10. Sobre un bloque cúbico homogéneo de 3 m de lado y peso P se aplican dos fuerzas horizontales de módulo $F = 160$ N con sus líneas de acción paralelas y desplazadas 0,3 m de la posición del centro de masas del bloque, tal como se ve en la figura. El coeficiente de fricción con el suelo es 0,2. Indica cuál de las respuestas es cierta:

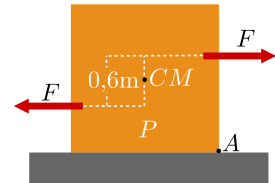


Figura de la cuestión 4.5.10

- a) Para que el bloque esté en equilibrio, el valor mínimo de P ha de ser 192 N.
- b) Para que el bloque esté en equilibrio, el valor mínimo de P ha de ser 64 N.
- c) Estando en equilibrio, la componente normal de la fuerza de contacto con el suelo pasa por el centro de masas del bloque.
- d) Si $P = 80$ N, el bloque está en equilibrio y la componente normal de la fuerza de contacto con el suelo pasa por el punto A .
- e) Si $P = 80$ N, el bloque está en equilibrio y la fuerza de fricción vale 16 N.

Cuestión 4.5.11. El sistema de la figura está en equilibrio. La tensión del hilo horizontal \overline{BC} (en N) es, si la barra \overline{AC} tiene una masa despreciable con respecto a 100 kg:

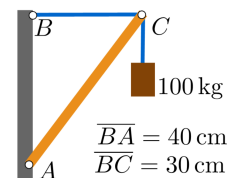


Figura de la cuestión 4.5.11

- a) 735,75
- b) 981,00
- c) 490,50
- d) 1226,25
- e) Ninguna de las anteriores.

Cuestión 4.5.12. Si una viga se apoya simplemente por los extremos A y B , y soporta dos cargas verticales de 1000 N, una aplicada en el punto medio y la otra sobre el apoyo A , es cierto que:

- a) la viga no está en equilibrio porque el momento resultante con respecto a B no es nulo.
- b) la viga no está en equilibrio porque el momento resultante con respecto a A no es nulo.
- c) la reacción en A es triple que en B .
- d) la reacción en A es el doble que en B .
- e) la reacción en B es de 1000 N.

Cuestión 4.5.13. Una compuerta articulada en el punto A sin fricción, de anchura a , separa dos líquidos de densidades ρ y $\rho/2$. ¿Cuál debe ser la relación entre las alturas H_1 y H_2 de los líquidos para que la compuerta no se mueva?

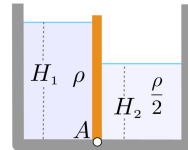


Figura de la cuestión 4.5.13

- a) $\frac{H_2}{H_1} = 2$
- b) $\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{2}$
- c) $\frac{H_2}{H_1} = \sqrt[3]{2}$
- d) $\frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{2}$
- e) $\frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Cuestión 4.5.14. La compuerta, de masa m cuadrada y articulada sin fricción, se aguanta en equilibrio, inclinada un ángulo θ debido al fluido de densidad ρ . En esta situación, $\tan \theta$ es:

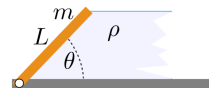


Figura de la cuestión 4.5.14

- a) $\frac{3m}{2\rho L^3}$

- b) $\frac{3m}{\rho L^3}$
- c) $\frac{m}{\rho L^3}$
- d) $\frac{2m}{3\rho L^3}$
- e) $\frac{m}{3\rho L^3}$

Cuestión 4.5.15. Cuál ha de ser la tensión mínima de la cuerda para que la compuerta de la figura, de peso despreciable, anchura L , y articulada sin fricción por la arista inferior, aguante el líquido de densidad ρ del depósito abierto por la parte superior, tal como se indica en la figura.

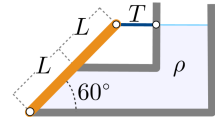


Figura de la cuestión 4.5.15

- a) $T = \frac{3}{4}\rho g L^3$
- b) $T = \rho g L^3$
- c) $T = \frac{1}{2}\rho g L^3$
- d) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho g L^3$
- e) $T = \frac{1}{3}\rho g L^3$

Cuestión 4.5.16. La escalera homogénea de la figura está apoyada por el punto A en la pared lisa y por el B en el suelo rugoso. Se sabe que se desliza cuándo $\theta \leq 30^\circ$. El coeficiente de fricción con el suelo vale:

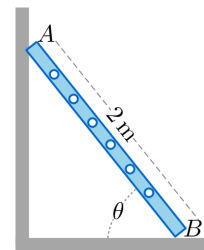


Figura de la cuestión 4.5.16

- a) $\mu = 0,766$
- b) $\mu = 0,866$
- c) $\mu = 0,666$
- d) $\mu = 0,566$
- e) $\mu = 0,966$

Cuestión 4.5.17. Dado el sistema de la figura, determina el coeficiente de fricción μ que hace que el cuerpo 2 esté en condiciones de movimiento inminente de bajada, si $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$. La cuerda tiene una masa despreciable y el eje de la polea no presenta fricción.

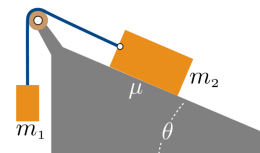


Figura de la cuestión 4.5.17

- a) 1,23

- b) 1,46
- c) 0,32
- d) 2,46
- e) 0,73

Problema 4.5.3. El bloque homogéneo de masa m , de dimensiones $a \times b \times b$, está en equilibrio, en la posición que se indica en la figura, pues está medio sumergido en un líquido, de densidad ρ , y atado a una cuerda por el centro de la arista inferior. Encuentra la masa m del bloque.

Datos: $a = 4 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ y $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Solución: $m = 12000 \text{ kg}$

Problema 4.5.4. Una barra pesada, uniforme, de longitud $2a$ y peso W , se apoya tal como se indica en la figura, en una semiesfera vacía, lisa, de radio r . Halla el ángulo ϕ de equilibrio y las reacciones en A y C .

Solución: $\cos \phi = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r^2}}{8r}$; $C = \frac{Wa}{2r}$, $A = W \tan \phi$

Problema 4.5.5. Una barra homogénea de 5 m y peso P está colocada entre dos paredes verticales, separadas 4 m. La pared A es lisa y el coeficiente de fricción estática entre la barra y la pared B es 0,9. Un objeto de peso $3P$ se puede fijar sobre diferentes puntos a la barra. ¿A qué distancia x de la pared B se puede fijar el objeto sin que se pierda el equilibrio?

Solución: $x > 3,78 \text{ m}$

Problema 4.5.6. El extremo de un canal de agua está formado por una compuerta de peso despreciable \widehat{ABC} , articulada sin fricción en B y de 1,2 m de anchura. Calcula la relación h/b para la cual la reacción en A es cero.

Solución: $\frac{h}{b} = \sqrt{3}$

Problema 4.5.7. Un bloque A uniforme de 1 kg de masa está situado sobre un plano horizontal rugoso, de coeficiente $\mu = 0,2$. Este bloque está atado a una cuerda horizontal a una altura h . La cuerda pasa por dos poleas C y D , sin masa ni fricción.

- a) Si $h = 0,3 \text{ m}$, determina el mínimo valor de la masa del cuerpo B que hace que el cuerpo A pierda el equilibrio.

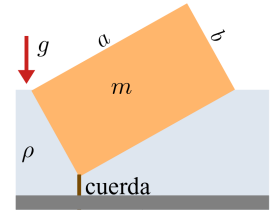


Figura del problema 4.5.3

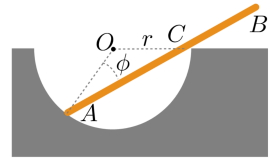


Figura del problema 4.5.4

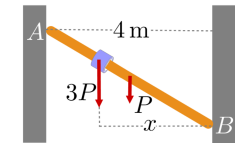


Figura del problema 4.5.5

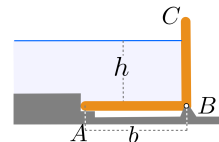


Figura del problema 4.5.6

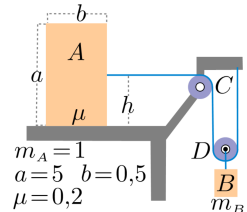


Figura del problema 4.5.7. Todas las unidades están expresadas en el S.I.

b) Haz lo mismo que en el apartado a, si $h = 4$ m.

Solución: a) $m_B = 0,400$ kg; b) $m_B = 0,125$ kg

Problema 4.5.8. Un armario de 60 kg está montado sobre unas ruedas que se pueden bloquear para evitar que rueden. El coeficiente de fricción con el suelo es 0,3. Si $h = 80$ cm, determina, en lo posible, el módulo de la fuerza P necesaria para mover el armario hacia la derecha:

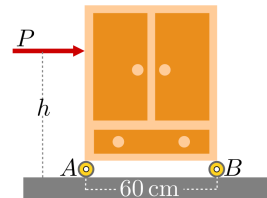


Figura del problema 4.5.8

- a) Si todas las ruedas están bloqueadas.
- b) Si las ruedas B están bloqueadas y las A pueden girar libremente.
- c) Si las ruedas A están bloqueadas y las B pueden girar libremente.

Nota: Comprueba en todos los casos que el armario no vuelque.

Solución: a) $P = 176,4$ N; b) $P = 147,0$ N; c) $P = 63,0$ N

Problema 4.5.9. Determina la tensión del cable \overline{AB} que aguanta un palo \overline{BD} sin deslizarse. El palo tiene una masa de 18 kg. Supón que no hay fricción.

Solución: $T = 46,4$ N

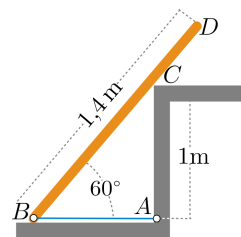


Figura del problema 4.5.9

Problema 4.5.10. La barra de la figura está sujeta al suelo mediante el cable \overline{AH} . La masa de la barra es de 1 kg y está formada por dos tramos homogéneos de densidad diferente (\overline{BC} tiene densidad lineal doble que \overline{AB}). Del extremo C cuelga un cuerpo de 5 kg. El sistema está equilibrado y el soporte en B no es liso. Determina:

- a) La tensión del cable.
- b) La fuerza de fricción entre la barra y el suelo en B .
- c) ¿Habría equilibrio si el coeficiente de fricción en B fuera de 0,5?

Solución: a) $T = 40,3$ N; b) $F = 64,3$ N; c) No

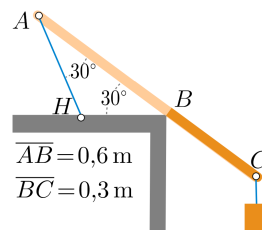


Figura del problema 4.5.10

Problema 4.5.11. Un disco de radio R y masa M está sobre una superficie horizontal, apoyado contra un escalón de altura $h = R/2$. Se quiere hacer subir el disco por el escalón mediante una fuerza de módulo F aplicada a su eje (v. figura). Determina el valor mínimo de F para que el disco suba por el escalón, así como el módulo y la dirección de la fuerza que el escalón ejerce sobre el disco.

Solución: $F = Mg\sqrt{3}$, $N = 2Mg$, ángulo de N con la horizontal: 30°

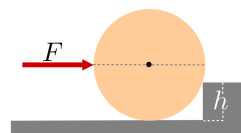


Figura del problema 4.5.11

Problema 4.5.12. Una placa rectangular uniforme \overline{AB} , de 1600 kg, separa dos depósitos que contienen agua. La placa está articulada en la parte inferior, tiene una anchura de 3 m y se halla en equilibrio por la acción del cable \overline{BC} . Determina la tensión de este cable.

Solución: $T = 12512 \text{ N}$

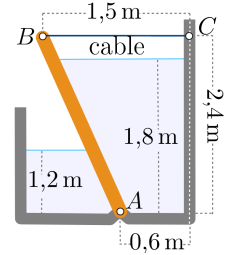


Figura del problema 4.5.12

Problema 4.5.13. Una compuerta de altura $\overline{AB} = 1,2 \text{ m}$, peso de 5000 N, anchura de $L = 3 \text{ m}$ y articulada sin fricción en el punto A separa un recipiente en dos partes. En la primera parte, hasta una altura $H_1 = 0,6 \text{ m}$, hay un fluido de densidad $\rho_1 = 1,3 \text{ g/cm}^3$. En la segunda, hasta una altura $H_2 = 1,5 \text{ m}$, hay un fluido de densidad $\rho_2 = 1,8 \text{ g/cm}^3$. Para mantener la compuerta en equilibrio, se hace intervenir un muelle de constante recuperadora $k = 3 \times 10^5 \text{ N/m}$. Determina:

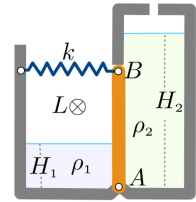


Figura del problema 4.5.13

- la fuerza que cada fluido ejerce sobre la compuerta y...
- sus respectivos puntos de aplicación,
- la fuerza que la articulación ejerce en el punto A de la compuerta y
- la fuerza que, para mantener el equilibrio de la compuerta, hace el muelle y el alargamiento o acortamiento que experimenta.

Solución: Con los ejes $\begin{matrix} y \\ | \\ A-x \end{matrix}$:

- $\vec{F}_1 = (6,887; 0) \times 10^3 \text{ N}$, $\vec{F}_2 = (-57,212; 0) \times 10^3 \text{ N}$
- $\vec{r}_{F_1} = (0; 0,20) \text{ m}$, $\vec{r}_{F_2} = (0; 0,467) \text{ m}$
- $\vec{A} = (29,201; 5) \times 10^3 \text{ N}$ d) $\vec{F}_k = (21,117; 0) \times 10^3 \text{ N}$, $\Delta \ell = -0,070 \text{ m}$

Problema 4.5.14. El depósito de la figura tiene 3 m de anchura. ¿Qué altura de mercurio h dará lugar a un momento con respecto a C sobre la compuerta \overline{CB} por la acción de los dos líquidos, de valor $2 \times 10^5 \text{ N m}$, en sentido horario?

Datos: Densidad del mercurio: $13,6 \text{ g/cm}^3$. Distancia $\overline{CB} = 2,5 \text{ m}$

Solución: $h = 0,23 \text{ m}$

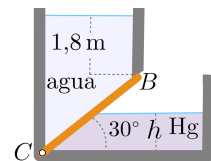


Figura del problema 4.5.14

Cuestión 4.7.1. Una partícula de 20 kg de masa recibe la acción de una fuerza conservativa de energía potencial $U(x) = 5(x - 2)^2 + 25$ (x en m y U en J). ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

- la posición de equilibrio de la partícula es $x = -2 \text{ m}$.
- La energía potencial en la posición de equilibrio es 25 J.

- c) La posición de equilibrio de la partícula es inestable.
- d) Si dejamos la partícula sin velocidad en la posición $x = 0$, se desplazará en el sentido negativo del eje x .
- e) La energía mecánica de la partícula puede ser negativa para determinados valores de x .

Cuestión 4.7.2. Dado un sistema conservativo con un grado de libertad, de energía potencial $U(x)$, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

- a) Para tener un equilibrio estable en $x = x_A$, hace falta que en esta posición $U(x_A) = 0$.
- b) La posición $x = x_A$ no puede ser de equilibrio estable si $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_A} = 0$.
- c) Para que una posición $x = x_A$ sea de equilibrio indiferente, es condición necesaria y suficiente que $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_A} = 0$.
- d) En una posición de equilibrio inestable, la energía mecánica es máxima.
- e) Ninguna de las cuatro afirmaciones anteriores es cierta.

Cuestión 4.7.3. La barra articulada sin fricción de la figura es homogénea y pesa $P = 200$ N. El muelle tiene constante elástica k y longitud natural $\ell_N = 0,5$ m. ¿Cuál ha de ser el valor de k para que $\theta = \frac{\pi}{4}$ sea una posición de equilibrio?

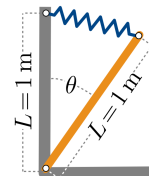


Figura de la cuestión 4.7.3

- a) 144,2 N/m
- b) 288,4 N/m
- c) 576,8 N/m
- d) 96,3 N/m
- e) 192,3 N/m

Problema 4.7.4. La figura representa la sección vertical de una puerta de ventilación, homogénea y de 60 kg de masa, articulada, sin fricción, en O . La puerta está controlada por un cable accionado por el resorte que pasa por la pequeña polea sin fricción, situada en A . La constante recuperadora del resorte es 160 N/m y su deformación es nula cuando $\theta = 0$. Determina el ángulo θ de equilibrio y analiza el tipo de equilibrio.

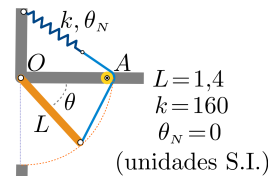


Figura del problema 4.7.4

Solución: $\theta = 0,9202$ rad = $52,72^\circ$, estable

Problema 4.7.5. En el mecanismo que se indica en la figura, exento de fricción, A es una articulación y C puede deslizarse por la pared. Encuentra la posición y de equilibrio y la tensión T del muelle \overline{AC} . La longitud en reposo del muelle es h y k es su constante recuperadora.

Solución: $y = h + \frac{P}{2k}$; $T = \frac{P}{2}$

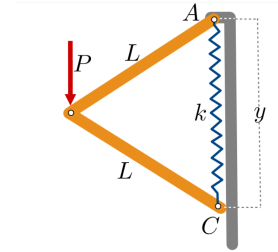


Figura del problema 4.7.5

Problema 4.7.6. Dado el potencial $U(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 10$ (unidades S.I.), el punto $x = 1$ ¿es de equilibrio estable, inestable o indiferente?

Solución: Estable

Problema 4.7.7. Se usan dos barras \overline{AB} y \overline{BC} , de 0,6 m, para sostener un peso de 500 N.

Determina el valor de la constante recuperadora k para ambos muelles sabiendo que hay equilibrio para $\theta = 30^\circ$. Supón despreciables los pesos de las barras y las fricciones. Los muelles tienen su longitud natural para $\theta = 0$. Demuestra que el equilibrio es estable. Entre C y el suelo no hay rozamiento. El extremo superior del muelle vertical puede deslizarse horizontalmente, por eso mantiene siempre la posición vertical.

Solución: $k = 1029,6 \text{ N m}^{-1}$

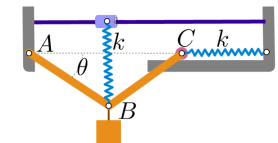


Figura del problema 4.7.7

Problema 4.7.8. El dibujo representa una ventana homogénea AB de peso 100 N, que puede girar, sin fricción, alrededor de A y que se aguanta por la acción de un hilo que, atado a B , pasa por una polea C sin fricción y está fijado a un muelle horizontal de constante recuperadora $k = 100 \text{ N/m}$. El muelle tiene su longitud natural si $\theta = 30^\circ$. Si $\overline{AB} = \overline{AC} = 1,20 \text{ m}$, encuentra el ángulo θ de equilibrio del sistema.

Solución: $\theta = 180^\circ$ y 4 mm . $\theta = 52,7^\circ$

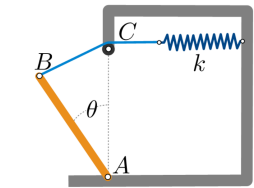


Figura del problema 4.7.8

Problema 4.7.9. Cuatro barras, de masa despreciable, articuladas sin fricción, forman un rombo \overline{ABCD} sostenido por A y sometido a la acción de las fuerzas dadas P y Q , tal como se ve en la figura. Determina la configuración de equilibrio del sistema, definida por el ángulo θ .

Solución: $P = Q \tan \theta$

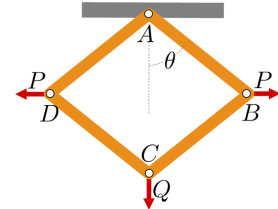


Figura del problema 4.7.9

Problema 4.7.10. En el sistema de la figura, sin fricción y siendo la barra \overline{AC} de peso despreciable, encuentra el ángulo θ de equilibrio.

Datos: $a = 50 \text{ cm}$, $k = 100 \text{ N/m}$, longitud natural del muelle = 50 cm , $P = 10 \text{ N}$.

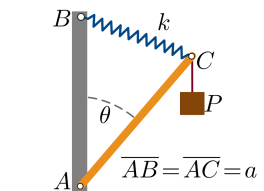


Figura del problema 4.7.10

Solución: $\theta = 77,4^\circ$ y $\theta = 180^\circ$

Problema 4.7.11. Determina la posición de equilibrio del sistema. Las barras tienen un peso despreciable, \overline{AD} es la longitud natural del muelle y no hay fricción.

Solución: $\sin \theta = 0$ y, si $\frac{P}{4ka} \leq 1$; $\cos \theta = \frac{P}{4ka}$

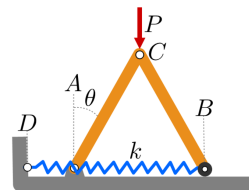


Figura del problema 4.7.11

Problema 4.7.12. Se aplica una carga vertical W al mecanismo de la figura. La constante recuperadora del muelle es k ; su longitud natural se corresponde a cuando \overline{AB} y \overline{BC} están horizontales. Suponiendo que las barras no pesan y que no hay fricción, encuentra la expresión que relaciona θ , W , a y k , cuando el mecanismo está en equilibrio.

Solución: $(1 - \cos \theta) \tan \theta = \frac{W}{4ka}$

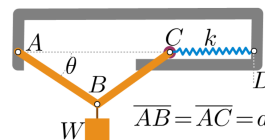


Figura del problema 4.7.12

Problema 4.7.13. Una bolita, de masa m , se puede mover sin fricción por la guía. Está sometida a la gravedad y, a través de una cuerda inextensible y de masa despreciable que pasa por la pequeña polea O (exenta de fricción), a la acción de un muelle de masa despreciable y constante recuperadora k . El muelle está relajado cuando el extremo de la cuerda que coge la bolita lo desenganchamos y lo llevamos al punto O .

a) Halla la posición (x, y) de equilibrio en función de m , g , k y L .

b) Determina el tipo de equilibrio.

Solución: a) $x_{eq} = \frac{L}{2} \left(\frac{mg}{kL} + 1 \right)$; b) estable

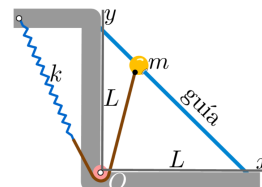


Figura del problema 4.7.13

Problema 4.7.14. La barra uniforme \overline{AB} de la figura, de 150 N de peso y $L = 0,9$ m de longitud, puede deslizarse por una guía vertical sin fricción. El muelle de constante $k = 250$ N/m, unido al punto B de la barra, tiene su longitud natural cuando $\theta = 0$. Despreciando las fuerzas de fricción con el suelo, determina:

a) las posiciones de equilibrio.

b) el tipo de equilibrio.

c) la reacción en A para las diferentes posiciones de equilibrio.

d) ¿Cuál sería el trabajo que haría el muelle si el sistema se desplazara desde la posición $\theta = 10^\circ$ hasta $\theta = 30^\circ$?

Solución: a) $\theta_1 = 0^\circ$ y $\theta_2 = 48,2^\circ$; b) θ_1 inestable y θ_2 estable; c) $A_1 = 150$ N, $A_2 = 75$ N; d) $W_{muelle} = -1,79$ J

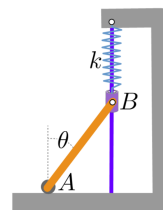


Figura del problema 4.7.14

Problema 4.7.15. El sistema de la figura está en equilibrio. Las barras tienen un peso despreciable y está exento de fricción. Expresa la relación entre P y F en función del ángulo θ .

Solución: $\frac{P}{F} = 2 \tan \theta$

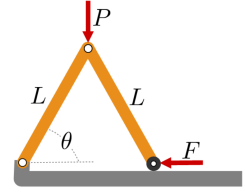


Figura del problema 4.7.15

Problema 4.7.16. Un tentempié es un muñeco con simetría de revolución y con la base semiesférica, de forma que después de golpearlo siempre vuelve a la posición vertical inicial. ¿Qué condición debe cumplir el centro de masas del conjunto?

Solución: el CM debe estar por debajo de la base de la semiesfera.



Figura del problema 4.7.16

Problema 4.7.17. El sistema de la figura está formado por dos muelles de constantes $k = 100 \text{ N/m}$ y una barra homogénea de 30 kg de masa y 2 m de longitud. El extremo A de la barra se puede mover sin rozamiento en la dirección horizontal x y el otro extremo B sobre una pared vertical, también exenta de fricción. Ambos muelles presentan la misma longitud natural, que corresponde a la posición vertical de la barra. Calcula:

- Los valores de x correspondientes a las dos posiciones de equilibrio que presenta el sistema.
- El trabajo del muelle de la derecha (W_{MD}) cuando la barra se desplaza, en el sentido negativo del eje x , entre estas dos posiciones.
- El trabajo de la fuerza gravitatoria (W_G) en este desplazamiento.

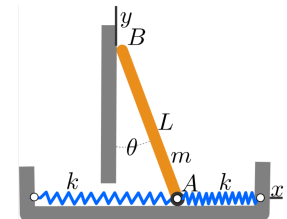


Figura del problema 4.7.17

Solución: a) 0 y $1,8598 \text{ m}$; b) $172,92 \text{ J}$; c) $-186,03 \text{ J}$

Problema 4.7.18. Un carro de masa M (ruedas de masa despreciable), con una sobrecarga M_1 y M_2 , se sitúa en un plano inclinado y se fija por un extremo a un muelle (constante k y longitud natural ℓ_n) y, por el otro, a una cuerda (siempre tensa) que pasa a través de una polea (masa despreciable y sin fricción), de la cual cuelga una masa m .

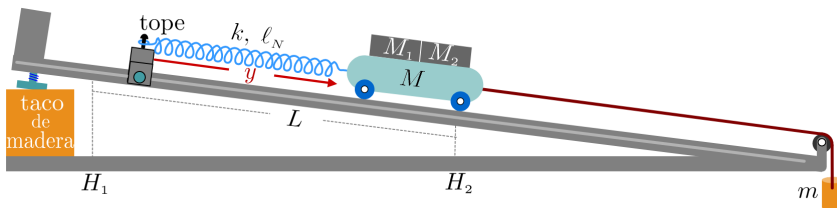


Figura del problema 4.7.18

- a) Escribe la expresión de la energía mecánica del sistema en función de la coordenada y (la energía puede tener una constante aditiva, independiente de y).
- b) Halla la posición de equilibrio y_0 .
- c) Imponiendo la conservación de la energía, encuentra la ecuación de movimiento.
- d) Escribe la ecuación de movimiento en función de la coordenada x , para la cual la posición de equilibrio es $x = 0$.
- e) ¿Cómo se mueve el carro si lo soltamos desde 5 cm por debajo de la posición de equilibrio? ¿Y si lo hacemos 5 cm por encima?
- f) ¿Cuál es la distancia máxima (con respecto la posición de equilibrio) desde la cual podemos soltar el carro sin que la cuerda se arrugue?

Datos: $M = 0,487 \text{ kg}$; $M_1 = 0,494 \text{ kg}$, $M_2 = 0,289 \text{ kg}$; $L = 60 \text{ cm}$, $H_1 = 8,13 \text{ cm}$, $H_2 = 1,22 \text{ cm}$, $m = 105 \text{ g}$, $k = 3,63 \text{ N/m}$ y $\ell_n = 9,5 \text{ cm}$

Solución:

- a) $E = \frac{1}{2}(M + M_1 + M_2 + m)\dot{y}^2 - (M + M_1 + M_2)gy \sin \alpha - mgy + \frac{1}{2}k(y - \ell_n)^2$
 $\sin \alpha = 0,115$
- b) $y_0 = \frac{((M+M_1+M_2) \sin \alpha + m)g + k\ell_n}{k}$.
- c) $(M + M_1 + M_2 + m) \ddot{y} = ((M + M_1 + M_2) \sin \alpha + m)g - k(y - \ell_n)$
- d) $(M + M_1 + M_2 + m) \ddot{x} = -k x$
- e) $x(t) = 0,05 \cos \omega t$; $x(t) = -0,05 \cos \omega t$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+M_1+M_2+m}}$
- f) distancia $d = A < \frac{g}{\omega^2}$

Problema 4.7.19. $U(x)$ es la función energía potencial de una fuerza en función de la coordenada cartesiana x .

- a) En el gráfico adjunto, indica esquemáticamente el módulo, la dirección y el sentido de las fuerzas en diferentes puntos de la curva.

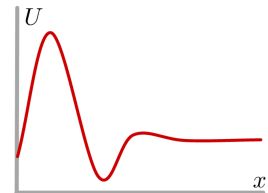


Figura del problema 4.7.19

Indica, haciendo uso del gráfico:

- b) ¿Dónde será máxima la fuerza, donde será cero, donde será atractiva y repulsiva?
- c) ¿Qué puntos de equilibrio hay y cómo son estos puntos?

Si suponemos que esta curva representa el potencial de interacción entre dos átomos:

d) ¿Para qué energía quedarán ligados los dos átomos?

Problema 4.7.20. Una varilla homogénea de masa m y longitud $R\sqrt{3}$ se apoya sin fricción en el interior de una cavidad esférica de radio R . Se fija en un extremo de la varilla una masa $m/2$. ¿Cuál es el ángulo α de equilibrio? ¿De qué tipo de equilibrio se trata?

Solución: $\alpha = 30^\circ$, estable.

Problema 4.7.21. Determina las posiciones de equilibrio de la barra homogénea de longitud $L = 1$ m y peso 10 N sobre la cual actúa un muelle de constante recuperadora $k = 10$ N/m. ℓ_N es la longitud natural del muelle, siendo lisos los contactos con la pared y el suelo.

Solución: $x = 0$ y $x = 0,866$ m

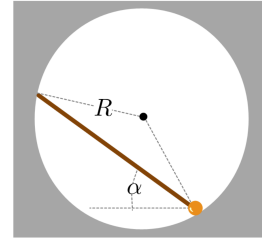


Figura del problema 4.7.20

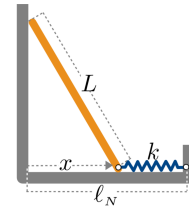


Figura del problema 4.7.21



→ 5P

5 Problemas y cuestiones

Cuestión 5.2.1. Sobre la cinemática del sólido rígido en general, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es la cierta?

- a) Si un sólido hace un movimiento de traslación pura, ningún punto del sólido puede describir un movimiento curvilíneo.
- b) Dos puntos de un mismo sólido pueden tener velocidades angulares diferentes.
- c) La condición cinemática de la rigidez solo es aplicable a movimientos planos.
- d) La velocidad relativa de dos puntos de un sólido en movimiento no puede ser nunca nula.
- e) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

Cuestión 5.2.2. En la figura, se muestra un disco de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie plana. La velocidad del centro O del disco es constante y vale v_0 . ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

- a) La velocidad angular del disco es $\omega = \frac{v_0}{R}$.
- b) La velocidad del punto A del disco es cero.
- c) La velocidad del punto B es $v_B = \sqrt{2}v_0$.
- d) La aceleración del punto A del disco es cero.
- e) A pesar de que en el punto de contacto A puede haber fricción, esta no trabaja.

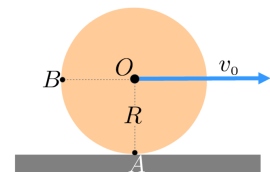


Figura de la cuestión 5.2.2

Cuestión 5.2.3. Sabemos que los puntos A y B de un sólido rígido (v. figura) que efectúa un movimiento en el plano (x, y) tienen, en un instante determinado, las posiciones y velocidades siguientes (en m y m/s):

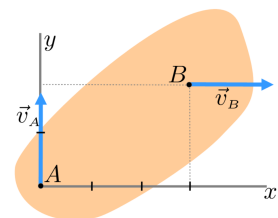


Figura de la cuestión 5.2.3

$$\vec{r}_A = (0; 0) ; \vec{v}_A = (0; 3) ; \vec{r}_B = (3; 2) ; \vec{v}_B = (v_B; 0)$$

Con relación a la velocidad angular ω del sólido (en rad/s) y v_B (en m/s), cuál de las respuestas siguientes es cierta:

- a) $v_B = 3$ y $\omega = 2$
- b) $v_B = 2$ y $\omega = 2$
- c) $v_B = 2$ y $\omega = 1$
- d) $v_B = \sqrt{13}$ y $\omega = 1$
- e) Sin conocer previamente v_B , no se puede deducir nada.

Cuestión 5.2.4. Un disco de masa m baja rodando sin deslizar por un plano inclinado una distancia d . Si el ángulo del plano con la horizontal es α y el coeficiente de rozamiento disco-plano es μ , la energía disipada por el rozamiento vale:

- a) 0
- b) $d\mu mg \cos \alpha$
- c) $d\mu mg \sin \alpha$
- d) $d\mu mg \tan \alpha$
- e) $d\mu mg$

Cuestión 5.2.5. Un triángulo equilátero de masa total m está formado por tres varillas homogéneas de longitud b y está dispuesto según se muestra en la figura. Su momento de inercia con respecto al eje z es:

- a) $\frac{3mb^2}{7}$
- b) $\frac{mb^2}{3}$
- c) $\frac{mb^2}{2}$
- d) $\frac{3mb^2}{4}$
- e) $\frac{mb^2}{4}$

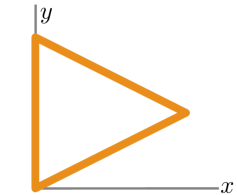


Figura de la cuestión 5.2.5

Cuestión 5.2.6. Un anillo de radio r y masa m baja rodando sin deslizar por un plano inclinado un ángulo α . En un instante dado, su centro de masa tiene una velocidad v . En ese instante, el módulo del momento angular del anillo con respecto al punto O (v. figura) es:

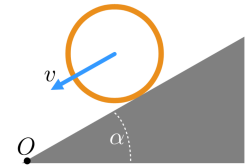


Figura de la cuestión 5.2.6

- a) mvr
- b) $\frac{3mvr}{2}$
- c) $2mvr$
- d) $\frac{mvr}{2}$
- e) $mvr \sin \alpha$

Cuestión 5.2.7. Una bailarina que quiera aumentar su velocidad de rotación debe acercar los brazos al cuerpo porque así:

- a) aumenta el momento angular.
- b) reduce el esfuerzo.
- c) aumenta la cantidad de movimiento.
- d) reduce el momento de inercia.
- e) aumenta la resistencia física.

Cuestión 5.2.8. Cuatro partículas, $m_1 = m_3 = 3 \text{ kg}$ y $m_2 = m_4 = 4 \text{ kg}$, están en los vértices de un cuadrado, unidas por varillas de masa despreciable. La longitud del lado del cuadrado es $L = 2 \text{ m}$. El momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de las partículas y que pasa por m_4 vale:

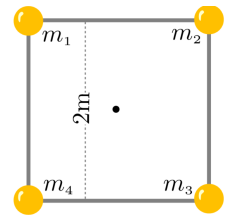


Figura de la cuestión 5.2.8

- a) 88 kg m^2
- b) 40 kg m^2
- c) 56 kg m^2
- d) $20,5 \text{ kg m}^2$
- e) $19,8 \text{ kg m}^2$

Cuestión 5.2.9. Una barra de longitud L está en reposo, en posición horizontal, a una altura H con respecto a una mesa (v. figura). Se suelta y cae manteniendo su orientación. Cuando ha bajado una distancia H , uno de sus extremos topa con uno de los extremos de la mesa y la barra empieza a girar, de forma que su extremo queda fijado a la mesa y permite que gire sin fricción. La velocidad angular con la cual la barra inicia la rotación es:

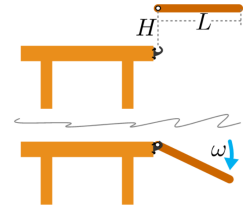


Figura de la cuestión 5.2.9

- a) $\frac{\sqrt{2gH}}{3L}$
- b) $\frac{\sqrt{gH}}{L}$
- c) $\frac{3\sqrt{2gH}}{2L}$
- d) $\frac{\sqrt{2gH}}{L}$
- e) $\frac{3\sqrt{gH}}{2L}$

Cuestión 5.2.10. Un levantador de pesas levanta la pesa m_2 para cambiarla, mientras mantiene la m_1 tocando al suelo. Cuando forma un ángulo de 30° , le cae de las manos. ¿Cuánto vale la aceleración angular α del conjunto en ese instante?

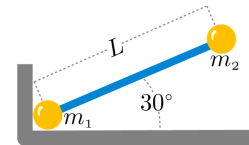


Figura de la cuestión 5.2.10.

Datos: Las pesas se pueden considerar puntuales, la masa de la barra es despreciable y $L = 2$ m.

- a) 2,5 rad/s²
- b) 9,8 rad/s²
- c) 4,2 rad/s²
- d) 19,2 rad/s²
- e) 4,9 rad/s²

Cuestión 5.2.11.Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- a) Si dos cuerpos tienen las mismas dimensiones y la misma masa, su momento de inercia con respecto al mismo eje es igual.
- b) El teorema de Steiner demuestra que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el CM es menor que con respecto a cualquier otro eje paralelo a este.
- c) Como la masa, el momento de inercia es una cantidad característica del cuerpo.

- d) El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje depende de la velocidad angular del cuerpo.
- e) Dos cuerpos de masa diferente tienen siempre un momento de inercia diferente con respecto al mismo eje.

Cuestión 5.2.12. El bloque cúbico y homogéneo de la figura se desliza sin fricción a una velocidad v por el suelo horizontal hasta que encuentra un tope al cual queda enganchado, pero que no le impide girar libremente. La velocidad angular del bloque, justo después del choque con el tope, es:

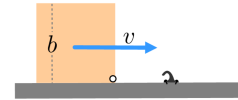


Figura de la cuestión 5.2.12

- a) $\frac{v}{2b}$
- b) $\frac{5v}{7b}$
- c) $\frac{9v}{7b}$
- d) $\frac{v}{b}$
- e) $\frac{3v}{4b}$

Cuestión 5.2.13. Un disco de radio $R = 25$ cm gira alrededor del eje de simetría, fijo y sin fricción, con una velocidad angular de $\omega_0 = 37$ rad/s. El momento de inercia con respecto al eje vale $I = 0,5$ kg m². Para pararlo, aplicamos una fuerza $F = 2$ N a la pastilla de freno de coeficiente de fricción $\mu = 1,5$. El tiempo que tarda el disco en pararse es:

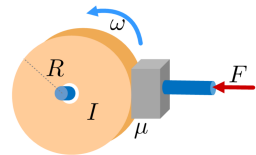


Figura de la cuestión 5.2.13

- a) 34,7 s
- b) 54,7 s
- c) 14,7 s
- d) 44,7 s
- e) 24,7 s

Cuestión 5.2.14. Una barra homogénea, de longitud $h = 0,8$ m y masa $m = 0,40$ kg, puede girar sin fricción alrededor del punto fijo A . Un objeto puntual de masa $m_b = 0,05$ kg y velocidad $v_b = 10$ m/s impacta horizontalmente y queda incrustado en el extremo superior de la barra. El módulo de la velocidad del extremo inferior de la barra justo después del impacto será:

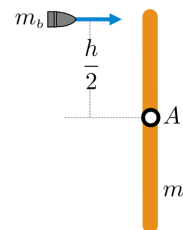


Figura de la cuestión 5.2.14

- a) 1,73 m/s
- b) 3,73 m/s
- c) 5,73 m/s
- d) 4,73 m/s
- e) 2,73 m/s

Cuestión 5.2.15. ¿Cuánto vale el momento de inercia de la polea con respecto al eje normal al plano de la figura que pasa por el punto A ? La polea está formada por una anilla, de radio R y masa m , y una barra, de longitud R y masa m .

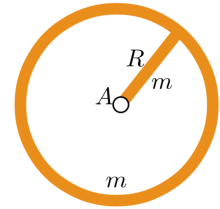


Figura de la cuestión 5.2.15

- a) $\frac{13}{12} mR^2$
- b) $\frac{4}{3} mR^2$
- c) $\frac{5}{6} mR^2$
- d) $\frac{7}{12} mR^2$
- e) mR^2

Cuestión 5.2.16. El momento de inercia con respecto al eje, indicado en la figura, de un cilindro macizo de radio R y densidad ρ , con un agujero longitudinal cilíndrico de radio $R/2$, vale:

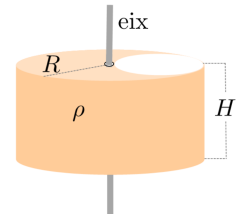


Figura de la cuestión 5.2.16

- a) $\frac{13}{50} \rho \pi H R^4$
- b) $\frac{13}{21} \rho \pi H R^4$
- c) $\frac{13}{21} \rho \pi H R^3$
- d) $\frac{13}{32} \rho \pi R^4$
- e) $\frac{13}{32} \rho \pi H R^4$

Problema 5.2.4. Una pequeña esfera de masa m y de velocidad 20 m/s horizontal impacta y se queda adherida en el extremo de una pieza rígida, que reposa colgada verticalmente de la articulación sin fricción A , formada por una barra y un disco, ambos homogéneos de masa m (v. figura). ¿Cuánto vale la velocidad angular del conjunto justo después del impacto?

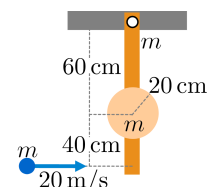


Figura del problema 5.2.4

Solución

El momento de inercia con respecto al punto A después del impacto I_A es:

$$I_A = \frac{1}{12}m1^2 + m0,5^2 + \frac{1}{2}m0,2^2 + m0,6^2 + m1^2 = 1,713333m$$

Utilizando la conservación del momento angular con respecto al punto A antes y después del impacto:

$$m \cdot 20 \cdot 1 = I_A \omega$$

de donde obtenemos:

$$\omega = 11,6732 \text{ rad/s}$$



Problema 5.2.5. Determina la ecuación de movimiento de una anilla de radio R que rueda sin deslizarse por un plano inclinado.

Problema 5.2.6. En las Olimpiadas de Barcelona (1992), se desplazó una gran cantidad de gente de todo el mundo a esta ciudad. Si imaginamos la Tierra como una esfera homogénea de masa $M = 6 \times 10^{24}$ kg y acudieron un total de un millón de personas, con una media de 80 kg masa:

a) demuestra que la relación entre los períodos antes (T) y durante las Olimpiadas (T_{Ac}) es $\frac{T_{Ac}}{T} = 1 + \frac{5m}{3M}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - 1)$, donde m es la masa del conjunto de personas desplazadas y θ es la latitud.

b) calcula numéricamente esta relación para el caso de las Olimpiadas de Barcelona.

Solución: b) $\frac{T_{Ac}}{T} \simeq 1$

Problema 5.2.7. Una esfera maciza homogénea de masa m rueda sin deslizarse por un plano horizontal acelerada por una fuerza F paralela al plano y aplicada en el CM . Calcula:

- a) la aceleración de la esfera.
- b) la fuerza de fricción seca con el plano.

Solución: a) $\frac{5F}{7m}$; b) $-\frac{2F}{7}$

Problema 5.2.8. En el juego de bolos, una bola se puede asimilar a una esfera uniforme de 7 kg y 300 mm de diámetro. Lanzamos una bola con una velocidad inicial $v_0 = 6$ m/s y una velocidad angular inicial $\omega_0 = 0$. Si el coeficiente de fricción dinámico bola-pista es de $\mu = 0,1$, determina:

- a) el tiempo t_f que tarda la bola en empezar a rodar sin deslizarse.
- b) la velocidad v_f y la velocidad angular ω_f en el instante t_f .

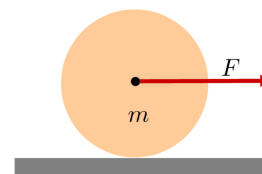


Figura del problema 5.2.7

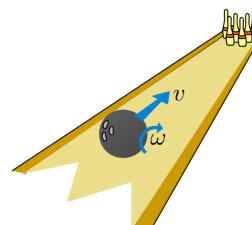


Figura del problema 5.2.8

Solución: a) $t_f = 1,747$ s; b) $v_f = 4,286$ m/s; $\omega_f = 28,57$ rad/s

Problema 5.2.9. Un volante montado sobre un eje se pone en rotación mediante un cuerpo de masa m . El momento de inercia total con respecto al eje del volante vale I y M_f es el valor del momento de las fuerzas de resistencia de los cojinetes del eje.

- a) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular de la rueda?
 b) ¿Cuál es la velocidad angular cuando el cuerpo ha bajado una distancia h ?

Solución: a) $\alpha = \frac{mRg - M_f}{I + mR^2}$; b) $\omega = \sqrt{2 \frac{mRg - M_f}{I + mR^2} \frac{h}{R}}$.

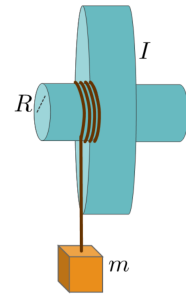


Figura del problema 5.2.9

Problema 5.2.10. Una barra uniforme de 60 cm de longitud y 15 N de peso cuelga de un pasador sin fricción. Una bala de 22,7 g impacta a una velocidad de 540 m/s y queda incrustada. Determina la velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.

Solución: $\omega = 29,3$ rad/s

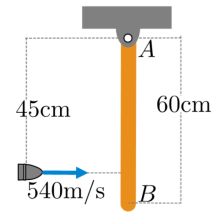


Figura del problema 5.2.10

Problema 5.2.11. Un cilindro homogéneo de radio $R = 0,4$ m está libre sobre el extremo de la cabina de la plataforma de un camión inicialmente en reposo. El camión se pone en marcha con una aceleración constante $a = 0,7$ m/s².

Si hay bastante fricción entre la plataforma y el cilindro para que este ruede sin deslizarse, determina cuánto tiempo tarda en caer del camión si la longitud de la plataforma es $L = 4,5$ m.

Solución: 4,19 s

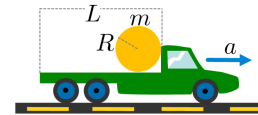


Figura del problema 5.2.11

Cuestión 5.3.1. La barra homogénea de la figura puede girar libremente alrededor de la articulación fija del extremo izquierdo. Si parte del reposo en posición horizontal, ¿cuál será el módulo de su velocidad angular cuando llegue a la posición vertical?

- a) $\sqrt{\frac{3g}{b}}$
 b) $\sqrt{\frac{2g}{b}}$
 c) $\sqrt{\frac{3g}{2b}}$
 d) $\sqrt{\frac{3g}{5b}}$

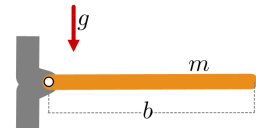


Figura de la cuestión 5.3.1

e) $\sqrt{\frac{5g}{3b}}$

Cuestión 5.3.2. Un cilindro vacío y uno macizo, del mismo radio y masa, están situados en lo alto de un plano inclinado. Se sueltan en el mismo instante y los dos ruedan sin deslizarse. Es cierto que:

- a) los dos llegan a la base del plano simultáneamente, puesto que tienen la misma masa, el mismo radio y bajan desde la misma altura.
- b) en cada instante, los dos tienen la misma energía cinética.
- c) como debe haber fricción para que rueden sin deslizarse, no se puede conservar la energía mecánica en ninguno de los dos cilindros.
- d) en la base del plano, los dos tienen la misma energía cinética.
- e) como el peso se aplica en el CM , el momento angular de cada cilindro se conserva mientras bajan rodando sin deslizarse por el plano.

Cuestión 5.3.3. Un aro rueda sin deslizarse. Cuánto vale el cociente entre su energía cinética de rotación y su energía cinética de traslación, $\frac{E_{rot}}{E_{trans}}$?

- a) 1
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- d) 2
- e) $\sqrt{2}$

Cuestión 5.3.4. Indica cuál de las afirmaciones es cierta:

- a) La variación de la energía cinética de un sólido rígido es igual al trabajo de las fuerzas externas.
- b) La energía cinética de un sólido rígido que se mueve en un plano se puede expresar como $E_c = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$.
- c) La variación de la energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo de las fuerzas internas.
- d) La energía cinética de un sistema de partículas, de masa total m , se puede expresar como $E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$.

- e) La variación de la energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo de las fuerzas externas.

Cuestión 5.3.5. La energía cinética de una carretilla de cuatro ruedas, de masa $M + 4m$, siendo m la masa de cada rueda, de radio R y momento de inercia con respecto a su eje $\frac{1}{8}mR^2$, que se mueve rectilíneamente sobre un plano a velocidad v , sin que ninguna rueda se deslice, es:

- a) $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{8}m)v^2$
- b) $\frac{1}{2}(3M + 7m)v^2$
- c) $\frac{1}{3}(2M + 3m)v^2$
- d) $\frac{1}{4}(2M + 9m)v^2$
- e) $\frac{1}{4}(M + \frac{1}{8}m)v^2$

Cuestión 5.3.6. La barra rígida de la figura cuelga de la articulación A , exenta de fricción. Una bala impacta y queda incrustada en B . La magnitud que se conserva durante el impacto es:

- a) El momento angular con respecto al punto B .
- b) La energía mecánica.
- c) La cantidad de movimiento.
- d) El momento angular con respecto al punto A .
- e) La componente horizontal de la cantidad de movimiento.

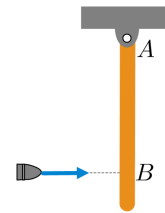


Figura de la cuestión 5.3.6

Problema 5.3.6. Un cilindro de masa M está unido mediante una cuerda inextensible y sin peso, a un cuerpo de masa m . La polea puede considerarse sin masa y sin fricción en el eje. El ángulo del plano inclinado es 45° . El cilindro rueda sin deslizarse por el plano inclinado.

Datos: $M = 20$ kg, $m = 5$ kg, $R = 0,3$ m

Calcula:

- a) La aceleración con que se mueve el sistema.
- b) La tensión de la cuerda.

Solución: a) $a = 2,56$ m/s²; b) $T = 61,85$ N

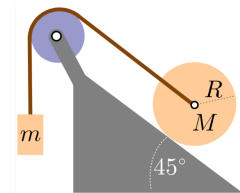


Figura del problema 5.3.6

Problema 5.3.7. Una polea, de eje fijo sin fricción, homogénea, de masa M y momento de inercia I con respecto al eje, tiene dos cuerdas de masa despreciable e inextensibles, enrolladas sin deslizar: la primera, en el radio r_1 con el otro extremo fijado a un bloque de masa m_1 , y la segunda, en el radio r_2 con el otro extremo fijado a un bloque de masa m_2 .

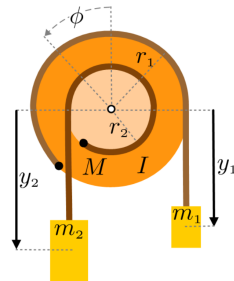


Figura del problema 5.3.7

- Escribe la energía mecánica del sistema en función de y_1 , y_2 , \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , ϕ y $\dot{\phi}$.
- Encuentra las relaciones de ligadura entre \dot{y}_1 , \dot{y}_2 y $\dot{\phi}$.
- Encuentra la energía del sistema en función de y_1 , y_2 , ϕ y $\dot{\phi}$ y la ecuación de movimiento para ϕ .

Con los datos numéricos: $r_1 = 40$ cm, $r_2 = 30$ cm, $m_1 = 15$ kg, $m_2 = 40$ kg y $I = 4,6$ kgm²:

- Encuentra la aceleración angular de la polea y la aceleración lineal de los bloques. Indica, para cada bloque, si la traslación es ascendente o descendente.
- Partiendo del reposo al mismo nivel, $y_{10} = y_{20}$, cuál será la distancia entre los bloques, pasados 0,8 s.

Solución

a) La energía mecánica del sistema en función de y_1 , y_2 , \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , ϕ y $\dot{\phi}$ es:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

b) Las ligaduras son $\dot{y}_1 = -r_1 \dot{\phi}$ y $\dot{y}_2 = r_2 \dot{\phi}$

c) La energía mecánica del sistema en función de y_1 , y_2 , ϕ y $\dot{\phi}$ es:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I) \dot{\phi}^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$

Aplicando la conservación de la energía, tenemos:

$$\dot{E} = 0 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I) \dot{\phi} \ddot{\phi} + m_1 g r_1 \dot{\phi} - m_2 g r_2 \dot{\phi}$$

de donde, despejando $\ddot{\phi}$, encontramos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\phi} = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I} g$$

d) $\ddot{\phi} = 5,55283$ rad/s²; $\ddot{y}_1 = -r_1 \ddot{\phi} = -2,22113$ m/s²; por consiguiente, sube.

$\ddot{y}_2 = r_2 \ddot{\phi} = 1,66585$ m/s²; por consiguiente, baja.

e) Con los datos iniciales en $t = 0$, $y_1(0) = y_{10}$, $y_2(0) = y_{20}$ y $\dot{y}_1(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 0$, y teniendo en cuenta que las aceleraciones son constantes, tenemos:

$$y_1 = y_{10} + \frac{1}{2} \ddot{y}_1 t^2$$

$$y_2 = y_{20} + \frac{1}{2} \ddot{y}_2 t^2$$

de donde obtenemos:

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2} (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) t^2$$

sustituyendo las aceleraciones y $t = 0,8$ s:

$$|y_2 - y_1| = 1,24383 \text{ m}$$

■

Problema 5.3.8. Calcula la velocidad final del CM de una esfera homogénea que se deja caer rodando sin deslizar por un plano inclinado hasta un desnivel h . Realiza el cálculo...

a) aplicando las ecuaciones de movimiento del sólido rígido:

b) aplicando la conservación de la energía.

Solución: $v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

Problema 5.3.9. Un disco homogéneo de 20 cm de radio y 5 kg de masa puede girar sin fricción en un plano vertical alrededor de su eje fijo. Una cuerda de masa despreciable está enrollada a su alrededor y de ella cuelga una masa de 2 kg que soltamos. La cuerda no desliza. Calcula la aceleración angular del disco y la aceleración de caída de la masa de 2 kg.

Solución: $\alpha = 21,8 \text{ rad/s}^2$; $a = 4,36 \text{ m/s}^2$

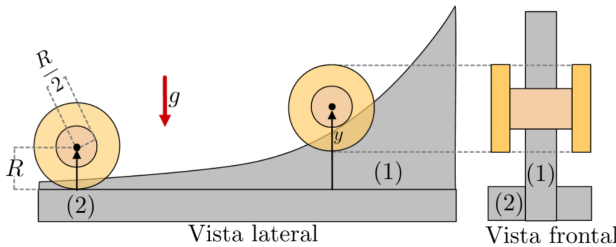


Figura del problema 5.3.10

Problema 5.3.10. Soltamos rodando (sin deslizarse) con una velocidad angular inicial ω_1 el rodillo de la figura, homogéneo, de masa m y momento de inercia $I_{(CM)} = \frac{1}{3}mR^2$, por la guía (1) desde una altura $y = 3R$. En todo momento, rueda sin deslizarse y no hay ninguna fricción disipativa. ¿Qué velocidad del CM , v_2 , y velocidad angular, ω_2 , tendrá el rodillo después de entrar en contacto con el plano horizontal (2)?

Nota: Expresa los resultados en función de ω_1 , R y de la gravedad g .

Solución: $v_2 = \sqrt{3gR + \frac{7}{16}R^2\omega_1^2}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{R} + \frac{7}{16}\omega_1^2}$

Problema 5.3.11. Una pequeña pelota de masa $m = 100\text{ g}$ rebota elástica y horizontalmente con el extremo inferior B de una barra de masa $M = 6\text{ kg}$ y longitud $L = 50\text{ cm}$, articulada sin fricción en el extremo superior A . La barra está inicialmente en reposo. Si la velocidad de la pelota justo antes del choque es de 30 m/s y sale en dirección horizontal, determina:

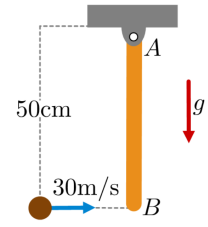


Figura del problema 5.3.11

- a) el módulo de la velocidad de la pelota y la velocidad angular de la barra justo después de rebotar;
- b) el ángulo máximo, con respecto a la vertical, a que llega la barra (el ángulo inicial es cero), y
- c) el módulo de la velocidad del centro de masas de la barra cuando vuelve a pasar por la posición inicial.

Solución: a) $27,143\text{ m/s}$; $5,714\text{ rad/s}$; b) $63,56^\circ$; c) $1,43\text{ m/s}$

Problema 5.3.12. Una rueda de Maxwell es un artilugio como el que se ve en la figura. La cuerda tiene masa despreciable; el eje tiene un radio r ; el momento de inercia de la rueda+eje es I y su masa, m . Si, partiendo del reposo, baja una altura h , ¿cuánto valen las velocidades finales de rotación y traslación?

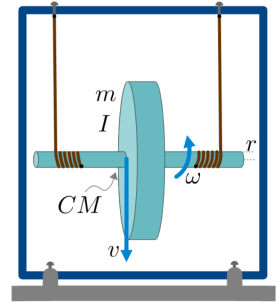


Figura del problema 5.3.12

Solución: $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+I/r^2}}$ y $\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{mr^2I}}$

Problema 5.3.13. Halla la ecuación de movimiento de la barra homogénea de masa m y longitud L cuando oscila alrededor de un eje que pasa a una distancia d de su centro de masas.

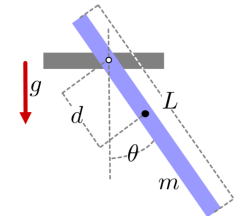


Figura del problema 5.3.13

Solución: $\ddot{\theta} + \frac{gd}{\frac{1}{12}L^2+d^2} \sin \theta = 0$

→ 6P

6 Problemas y cuestiones

Cuestión 6.2.1. Una partícula de masa m se deja caer desde una altura h sobre un platillo de una balanza donde queda adherida (v. figura). El platillo tiene masa m y la balanza equivale a un muelle de constante k . El período de las oscilaciones posteriores será:

- a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- b) $T = \pi\sqrt{\frac{8m}{k}}$
- c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mh}{kg}}$
- d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g} + \frac{2m}{k}}$
- e) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k} + \frac{h}{g}}$

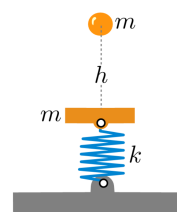


Figura de la cuestión 6.2.1

Cuestión 6.2.2. Los tres sistemas de la figura constan de muelles de la misma constante elástica, de masa despreciable, unidos a un mismo cuerpo de masa m . No hay rozamiento en ningún contacto. En todos los casos, el cuerpo de masa m puede realizar un movimiento armónico simple. Si designamos por T_1 , T_2 y T_3 los períodos de oscilación en cada caso, se cumplirá:

- a) $T_1 > T_2 = T_3$
- b) $T_1 = T_2 < T_3$
- c) $T_1 = T_2 = T_3$
- d) $T_1 < T_2 = T_3$
- e) Deberíamos conocer el valor de la constante elástica para ordenar los períodos.

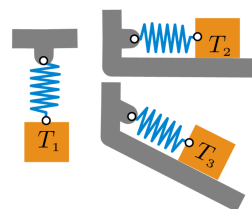


Figura de la cuestión 6.2.2

Cuestión 6.2.3. Una masa colgada de un muelle oscila tal como se indica en la gráfica, que representa la elongación en función del tiempo. En el instante t_1 la masa tiene:

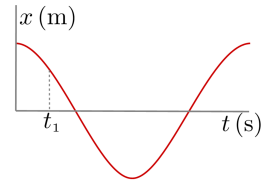


Figura de la cuestión 6.2.3

- a) velocidad \dot{x} positiva y aceleración \ddot{x} positiva.
- b) velocidad \dot{x} positiva y aceleración \ddot{x} negativa.
- c) velocidad \dot{x} negativa y aceleración \ddot{x} positiva.
- d) velocidad \dot{x} negativa y aceleración \ddot{x} negativa.
- e) velocidad \dot{x} positiva y aceleración \ddot{x} nula.

Cuestión 6.2.4. La masa $M = 10 \text{ kg}$ de la figura oscila sobre una plataforma horizontal sin fricción, unida a dos muelles de constantes $k_1 = 100 \text{ N/m}$ y $k_2 = 50 \text{ N/m}$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

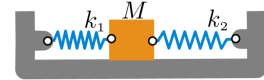


Figura de la cuestión 6.2.4

- a) El período de oscilación es 2,81 s.
- b) El período de oscilación es 3,44 s.
- c) El período de oscilación es 1,86 s.
- d) Si inclinamos la plataforma girándola 30° con respecto de la horizontal y en sentido horario, el período de oscilación será el mismo que cuando está en posición horizontal.
- e) Ninguna de las otras cuatro respuestas es correcta.

Cuestión 6.2.5. Un péndulo simple oscila de forma que:

- a) A mayor longitud, el período es más grande.
- b) A menor longitud, el período es más grande.
- c) A mayor longitud, el período es más pequeño.
- d) El período no depende de la masa, salvo que esta sea pequeña, de forma que aumenta con ella.
- e) Todas las respuestas anteriores son falsas.

Problema 6.2.1. Una esfera homogénea de radio r y masa m rueda sin deslizarse en un plano vertical por la superficie interior de un semicilindro fijo de radio $R > r$. Halla la energía mecánica y el período de las pequeñas oscilaciones en función de R , r y g .

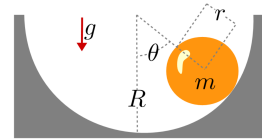


Figura del problema 6.2.1

Solución

Se trata de un sistema conservativo de un grado de libertad:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mg(R - r) \cos \theta$$

con $I = \frac{2}{5}mr^2$ y $v = \omega r = (R - r)\dot{\theta}$. Obtenemos:

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{7}{10}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R - r) \cos \theta$$

La ecuación de movimiento la podemos extraer de E :

$$\dot{E} = 0 = \frac{7}{5}m(R - r)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R - r) \sin \theta \dot{\theta}$$

que, para pequeñas oscilaciones, podemos escribir:

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)}\theta = 0$$

Comparando con la expresión canónica del MAS:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}}$$

que corresponde a un período:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}$$

■

Problema 6.2.2. Un cuerpo presenta un movimiento armónico simple de 5,2 cm de amplitud. Se sabe que, cuando la elongación es de 3,4 cm, la velocidad es de 49,8 cm/s. Se pregunta por la fase del movimiento. ¿Hay suficiente información? ¿Y para el cálculo del período? Encuentra todos los datos que puedas a partir de la información que tienes.

Solución: $T = 0,50$ s; $\theta = 0,7121$ rad ($x = A \sin \theta$)

Problema 6.2.3. Un cuerpo de 2 kg de masa está en reposo sobre un plano horizontal liso y está sujeto a dos resortes horizontales de constantes recuperadoras $k_1 = 100$ N/m y $k_2 = 200$ N/m. La longitud de cada uno de los dos resortes no deformados es de 40 cm. Se estiran los extremos libres de los resortes y se sujetan a dos paredes fijas, separadas 120 cm. Determina la posición de equilibrio del cuerpo. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación en torno a la posición de equilibrio?

Solución: 66,7 cm; $f = 1,95$ Hz

Problema 6.2.4. Una partícula que se mueve con movimiento armónico simple tiene una velocidad de 16 cm/s y de 12 cm/s cuando pasa a 3 cm y 4 cm del centro de vibración, respectivamente. Calcula su amplitud y período.

Solución: $A = 5$ cm; $T = 1,57$ s

Problema 6.2.5. Una masa puntual realiza un movimiento armónico simple. Cuando la elongación es +10 cm moviéndose hacia el punto de equilibrio, su energía cinética vale 10^{-5} J y su energía potencial también vale 10^{-5} J. Si la masa es de 2 g, halla la amplitud, el período y la fase del movimiento.

Solución: $A = 14,1$ cm; $T = 6,28$ s; $\theta = 3\pi/4$ rad ($x = A \sin \theta$)

Problema 6.2.6. Una boya cilíndrica de 4 m de altura, 2 m de radio y 40000 kg de masa flota verticalmente en el agua. Si hace pequeñas oscilaciones verticales, encuentra el período de oscilación.

Solución: $T = 3,58$ s

Problema 6.2.7. Dos cilindros idénticos de masa M y sección S están dispuestos como indica la figura y están sumergidos parcialmente en agua. Despreciando la masa de la polea, las fricciones y la inercia del agua, determina el período de oscilación del sistema de pesos cuando son separados ligeramente de su posición de equilibrio.

Solución: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{Sg\rho}}$

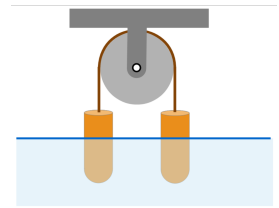


Figura del problema 6.2.7

Problema 6.2.8. En un tubo en U de sección constante, colocado de forma que ambas ramas están verticales, se introduce un líquido que ocupa una longitud L de él. Inicialmente, se desequilibra y, en consecuencia, empieza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Suponiendo que el líquido sea incompresible y que no haya fricciones, demuestra que el líquido oscilará con movimiento armónico y halla el período correspondiente.

Solución: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$

Problema 6.2.9. Un cuerpo de 100 g cuelga de un largo resorte. Si lo estiramos haciéndolo bajar 10 cm por debajo de su posición de equilibrio y lo soltamos, vibra con un período de 2 s.

- a) ¿Con qué velocidad pasa por su posición de equilibrio?
- b) ¿Qué aceleración tiene cuando está 5 cm por encima de esta posición?

c) En el movimiento ascendente, ¿cuánto tiempo necesita para desplazarse desde un punto situado 5 cm por debajo de su posición de equilibrio a otro punto situado 5 cm por encima?

d) ¿Cuánto se acortará el resorte al sacar el cuerpo?

Solución: a) sentido \uparrow y módulo $v = 31,4 \text{ cm/s}$; b) sentido \downarrow y módulo $a = 49,3 \text{ cm/s}^2$; c) $t = 0,33 \text{ s}$; d) $\Delta\ell = 99,3 \text{ cm}$

Problema 6.2.10. Un cuerpo de 12 kg de masa cuelga de un resorte. Se sabe que, si lo estiramos hasta que la longitud aumenta 10 cm y lo soltamos, se inicia un movimiento de oscilación de 1,45 s de período. Se pide:

a) Al realizar oscilaciones, ¿cuánto tiempo tarda, moviéndose hacia abajo, en desplazarse desde un punto situado 3 cm por encima de su posición de equilibrio hasta otro que está 6 cm por debajo de esta posición?

b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo al pasar por esta última posición?

c) ¿Cuánto se acortará el resorte si, estando en reposo, sacamos el cuerpo de 12 kg?

Solución: a) $t = 0,22 \text{ s}$; b) $v = -0,347 \text{ m/s}$; c) $\Delta\ell = 0,52 \text{ m}$

Problema 6.2.11. Dos resortes, de constantes recuperadoras $k_1 = 1200 \text{ N/m}$ y $k_2 = 600 \text{ N/m}$, se unen en serie. El extremo libre de k_1 cuelga de un punto y del extremo libre de k_2 se cuelga un cuerpo de $m = 10 \text{ kg}$. Halla:

a) El período de las oscilaciones libres que puede realizar el cuerpo.

b) Cálculalo también suponiendo que los resortes están conectados en paralelo.

Solución: a) $T = 0,99 \text{ s}$; b) $T = 0,47 \text{ s}$

Problema 6.2.12. Por la garganta de una polea, cuya masa se puede considerar concentrada en su periferia, pasa un hilo inextensible y de masa despreciable. De uno de sus extremos cuelga una masa M y el otro está fijado a un muelle vertical cuyo extremo está fijado en el suelo (v. figura). Si la masa de la polea es $m = 800 \text{ g}$, la del cuerpo que cuelga es $M = 200 \text{ g}$ y el muelle, de masa despreciable, tiene una constante $k = 16 \text{ N/m}$, calcula el período de las pequeñas oscilaciones del sistema.

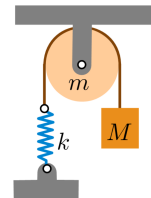


Figura del problema 6.2.12

Solución: 1,57 s

Problema 6.2.13. Al colgar una masa M de un muelle (que suponemos sin masa y no deformado al principio), se alarga 2,5 m. En esta posición le damos un empujón hacia arriba, de forma que sale con una velocidad $v = 2$ m/s. Halla la trayectoria de la masa M .

Solución: $y = 1,01 \sin(1,98t)$ (S.I.)

Problema 6.2.14. Un cuerpo de 1 kg unido al extremo de un muelle empieza su movimiento cuando está en la posición $x = 1$ m, con una velocidad inicial $v = 2$ m/s. Si el período (T) del movimiento es π s, calcula la elongación máxima del muelle (A) y halla la trayectoria. Calcula la velocidad y la aceleración máximas y para qué posiciones se producen.

Solución: (S.I.) $A = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{2} \sin(2t + \pi/4)$; $v_{\max} = \pm 2\sqrt{2}$ ($x = 0$); $a_{\max} = \pm 4\sqrt{2}$, ($x = \pm\sqrt{2}$)

Problema 6.2.15. Un modelo sencillo utilizado actualmente para describir las proteínas presentes en nuestro cuerpo consta de bolas, que constituirían los aminoácidos (de unos 10^{-24} kg de masa), unidas por muelles de constante elástica $k = 5 \times 10^{-20}$ N/m. Calcula la frecuencia de vibración de los aminoácidos utilizando este modelo.

Solución: $f = 71$ Hz

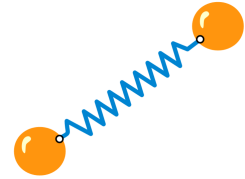


Figura del problema 6.2.15

Problema 6.2.16. Construimos un péndulo a partir de dos varillas uniformes idénticas a y b , cada una de longitud L y masa m , unidas en ángulo recto en forma de **T**, uniendo el centro de la varilla a con el extremo de b . Colgamos el péndulo por el extremo libre de la varilla b , haciéndolo oscilar en un plano vertical.

- Calcula el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
- Halla las expresiones de la energía cinética y potencial en función del ángulo del eje del péndulo con respecto a la vertical.
- Halla la ecuación de movimiento.
- Halla el período de las pequeñas oscilaciones.

Solución: a) $I = \frac{17}{12}mL^2$; b) $E_c = \frac{17}{24}mL^2\dot{\theta}^2$, $U = \frac{3mgL}{2}(1 - \cos\theta)$; c) $\ddot{\theta} + \frac{18}{17}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$; d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{17L}{18g}}$

Problema 6.2.17. El movimiento de un oscilador armónico simple viene descrito por la ecuación $x(t) = 4 \sin(0,2t + 0,3)$, con x en m y t en s.

- a) Calcula la amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial del movimiento.
- b) Determina la velocidad y la aceleración en función del tiempo, así como las condiciones iniciales.
- c) ¿Cuál es el desfase entre la elongación y la velocidad? ¿Y entre la elongación y la aceleración?
- d) Calcula la posición, la velocidad y la aceleración en $t = 5$ s.

Solución: a) $A = 4$ m; $\varphi_0 = 0,3$ rad; $f_0 = 0,032$ s⁻¹; b) $v(t) = 0,8 \cos(0,2t + 0,3)$; $a(t) = -0,16 \sin(0,2t + 0,3)$ (unidades S.I.); $x(0) = 1,18$ m; $v(0) = 0,76$ m/s; c) $\pi/2$; π ; d) $x(5) = 3,85$ m; $v(5) = 0,21$ m/s; $a(5) = -0,154$ m/s²

Problema 6.2.18. Una partícula de 1 kg realiza un movimiento armónico simple de amplitud 0,5 m. En el instante $t = 0$, pasa por la posición de equilibrio con una velocidad de $\dot{x}(0) = +2$ m/s.

- a) Calcula la frecuencia y el período.
- b) Determina la elongación y la velocidad en función del tiempo.
- c) Calcula la fuerza y las energías cinética y potencial cuando la partícula está a 0,2 m de su posición de equilibrio.

Solución: a) $f_0 = 0,637$ Hz; $T_0 = 1,57$ s; b) $x = 0,5 \sin(4t)$; $v = 2 \cos(4t)$; c) $F = 3,2$ N; $E_c = 1,68$ J; $U = 0,32$ J

Problema 6.2.19. En el mecanismo de la figura, la constante recuperadora del muelle vale $k = 100$ N/m; la masa de la polea, cilíndrica y homogénea, es $M = 4$ kg, y el radio es $R = 30$ cm. La masa del bloque es $m = 1$ kg. La cuerda no se desliza en ningún momento y no hay fricción en el eje. Encuentra la ecuación de movimiento y el período.

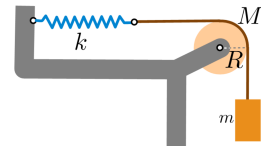


Figura del problema 6.2.19

Solución: $\ddot{x} + 33,33 x = 0$ (unidades S.I.); 1,088 s

Problema 6.2.20. La polea, los muelles (de constantes $3k$ y k) y la cuerda, inextensible, tienen masa despreciable. La barra, de masa m , se desplaza poco verticalmente con respecto a la posición de equilibrio horizontal. El período de las oscilaciones vale:

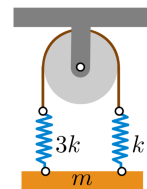


Figura del problema 6.2.20

Solución: $2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$

Cuestión 6.3.1. La amplitud de la vibración de un oscilador amortiguado disminuye de 75 mm a 70 mm en un ciclo. La masa oscilante es de 1,2 kg y el tiempo que

tarda en ir del centro al extremo de la oscilación es 0,5 s. La constante de amortiguación de la fuerza de rozamiento viscoso es:

- a) $82,8 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$
- b) $165,6 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$
- c) $34,5 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$
- d) $331,2 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$
- e) $69,0 \times 10^{-3} \text{ N s/m}$

Cuestión 6.3.2. La masa M de 100 g puede oscilar horizontalmente con respecto a su posición de equilibrio, sin fricción con el suelo, bajo la acción de cuatro muelles de constantes recuperadoras $k_1 = 10 \text{ N/m}$, $k_2 = 20 \text{ N/m}$, $k_3 = 10 \text{ N/m}$ y $k_4 = 15 \text{ N/m}$, y dos dispositivos de amortiguación de constantes $b_1 = 1/2 \text{ N s/m}$ y $b_2 = 1 \text{ N s/m}$. Podemos afirmar que:

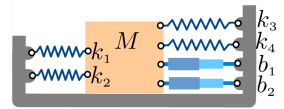


Figura de la cuestión 6.3.2

- a) En el S.I., la ecuación de movimiento es $\ddot{x} + 15\dot{x} + \frac{380}{3}x = 0$
- b) En el S.I., la ecuación de movimiento es $\ddot{x} + \frac{10}{3}\dot{x} + 550x = 0$
- c) En el S.I., la ecuación de movimiento es $\ddot{x} + \frac{10}{3}\dot{x} + \frac{600}{19}x = 0$
- d) La constante de amortiguación equivalente valdrá $1/3 \text{ N s/m}$.
- e) El período de las oscilaciones será de 0,283 s.

Cuestión 6.3.3. Un sistema que puede oscilar presenta amortiguación crítica. En este caso:

- a) la pulsación es pequeña.
- b) todas las oscilaciones tienen la misma duración.
- c) el movimiento es aperiódico.
- d) la elongación es función exponencial positiva del tiempo.
- e) Ninguna de las respuestas anteriores es válida.

Problema 6.3.2. Un oscilador amortiguado tiene una masa de 50 g y un período de oscilación de 2 s. Su amplitud disminuye un 5 % cada ciclo. Suponiendo la ecuación de movimiento en la forma $m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0$, halla b y k .

Solución: $b = 2,56 \text{ g/s}$; $k = 0,49 \text{ N/m}$

Problema 6.3.3. Una partícula de 0,5 g ejecuta un movimiento oscilatorio, siendo la amortiguación proporcional a la velocidad. La frecuencia de vibración es de 0,5 Hz y la amplitud se reduce a la mitad después de 10 s. Calcula:

- a) El factor de amortiguación.
- b) Si el movimiento fuera provocado por un muelle, la constante recuperadora k de este.
- c) La frecuencia que tendría si no existiera la amortiguación.

Solución: a) $\gamma = 0,069 \text{ s}^{-1}$; b) $k = 4,94 \times 10^{-3} \text{ N/m}$; c) $f = 0,5 \text{ Hz}$

Problema 6.3.4. De un muelle suspendido verticalmente, se cuelga una masa m , con la cual el alargamiento es de 9,8 cm. Se tira de la masa hacia abajo y se suelta, con lo cual se producen oscilaciones. Se pregunta el valor que debe tomar el coeficiente b de amortiguación para que:

- a) Las oscilaciones acaben después de 100 s (considera que han acabado cuando la amplitud se ha reducido a la milésima parte del valor inicial).
- b) El período de las oscilaciones sea el doble del período natural.
- c) La masa vuelva aperiódicamente a la posición de equilibrio.

Solución: En el S.I., a) $b = 0,138 \text{ m}$; b) $b = 17,3 \text{ m}$; c) $b \geq 20 \text{ m}$;

Problema 6.3.5. Un sólido cuelga de un resorte capaz de oscilar verticalmente. Sin amortiguación, el período vale 2 s y, cuando se conecta la amortiguación, tiene un período de 2,7 s.

- a) Determina la ecuación de la elongación suponiendo que, en el instante inicial, esta vale 10 cm y la velocidad es nula.
- b) Se pide el factor a por el cual se debe multiplicar la constante de amortiguación para que se logre el valor crítico.

Solución: a) $x(t) = 13,5 e^{-2,11t} \sin(2,33t + 0,83)$; b) $a = 1,49$

Problema 6.3.6. Un péndulo simple, de 10 g de masa, tiene un período de 2 s y una amplitud de 2° . Debido a la fricción con el aire, actúa sobre el péndulo una fuerza de fricción, $-bv$, proporcional a la velocidad. Calcula la constante de amortiguación b sabiendo que la amplitud se reduce a $1,3^\circ$ después de diez oscilaciones completas.

Solución: $b = 4,31 \times 10^{-4} \text{ N s m}^{-1}$

Problema 6.3.7. Un péndulo está formado por un hilo de 1 m de longitud y masa despreciable, del cual cuelga una esfera maciza de 1 cm de radio y 8 g de masa. El péndulo se mueve sumergido en un líquido de 1 g/cm^3 de densidad. La esfera está sometida a su peso, al empuje de Arquímedes, a la tensión del hilo y a una fuerza de fricción viscosa $-bv$, donde $b = 1,6 \times 10^{-4} \text{ N s/m}$. Halla:

- El período de las pequeñas oscilaciones suponiendo que $b = 0$.
- El período de las pequeñas oscilaciones con el valor de b del enunciado.
- El tiempo que debe transcurrir para que la amplitud del movimiento pase de $\pi/36 \text{ rad}$ a $\pi/72 \text{ rad}$.
- El valor de b para que la amortiguación sea crítica.

Solución: a) $T_0 = 2,91 \text{ s}$; b) $T = 2,91 \text{ s}$; c) $\Delta t = 69,31 \text{ s}$; d) $b = 0,034 \text{ N s m}^{-1}$

Problema 6.3.8. Una masa está sometida a una fuerza elástica $\vec{F} = -k\vec{x}$ y a una fuerza viscosa $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ con $b = 5 \text{ N s m}^{-1}$. La elongación viene dada por $x(t) = 0,8 e^{-2,5t} \sin(\pi t - 0,3)$, con x en m y t en s.

- Calcula la masa y la constante recuperadora elástica.
- Calcula la posición y la velocidad cuando $t = 1,2 \text{ s}$.
- Determina los instantes en que la masa pasa por su posición de equilibrio con velocidad positiva y negativa.
- Determina los instantes en que la masa se encuentra en los extremos con x positiva y negativa.

Solución: a) $m = 1 \text{ kg}$; $k = 16,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; b) $x(1,2 \text{ s}) = 1,28 \text{ cm}$; $v(1,2 \text{ s}) = -0,0862 \text{ m s}^{-1}$; c) $t = \frac{0,3}{\pi} \pm N$; d) $t = \frac{1}{\pi}(\arctan \frac{\pi}{2,5} + 0,3) \pm N = 0,81538 \pm N$

Problema 6.3.9. Una partícula de 2 kg está sometida a una fuerza elástica de constante $k = 10 \text{ N m}^{-1}$. Si introducimos el sistema oscilante en un medio viscoso, el período aumenta en un 10 %.

- Determina las expresiones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo, tomando el origen de tiempo cuando $x > 0$ y $v = 0$ y sabiendo que la elongación en este instante es de 5 m.
- Calcula el valor de la amplitud después de un ciclo y su relación con la amplitud inicial.
- ¿Cuál debería ser el valor de la constante de amortiguamiento para que no oscilara?

Solución: a)

$$x(t) = 5,5 e^{-0,935t} \sin(2,03t + 1,14)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 11,2 e^{-0,935t} \cos(2,03t + 1,14) - 5,14 e^{-0,935t} \sin(2,03t + 1,14)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -17,9 e^{-0,935t} \sin(2,03t + 1,14) - 20,9 e^{-0,935t} \cos(2,03t + 1,14)$$

b) $A(T) = 0,304 \text{ m}; 0,055; \text{ c) } b \geq 4\sqrt{5} \text{ kg s}^{-1}$

Cuestión 6.4.1. La ecuación de movimiento de un oscilador forzado es $\ddot{x} = -\frac{7}{4}\dot{x} - 9x + \sin 4t$. Es cierto que, en régimen estacionario:

- a) El sistema está en resonancia de velocidad.
- b) La amplitud de la elongación decrece exponencialmente.
- c) La elongación tiene la forma $x = A_p \sin(4t - \frac{3\pi}{4})$.
- d) La velocidad tiene la forma $\dot{x} = v_0 \sin(4t + \frac{\pi}{2})$.
- e) La elongación tiene la forma $x = A_p \cos(3t + \frac{\pi}{4})$.

Cuestión 6.4.2. Al cabo de cinco oscilaciones, la amplitud de un oscilador es un factor e^{-1} más pequeña. Si ω_0 es su pulsación natural, la pulsación de resonancia de amplitud será:

- a) $\Omega_{RA} = 0,999\omega_0$
- b) $\Omega_{RA} = 0,5\omega_0$
- c) $\Omega_{RA} = 1,125\omega_0$
- d) $\Omega_{RA} = 0,2\omega_0$
- e) $\Omega_{RA} = \frac{1}{3}\omega_0$

Cuestión 6.4.3. Para un oscilador forzado, con una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, de constante b , una vez alcanzado el régimen estacionario, es cierto que:

- a) en resonancia de elongación, la impedancia mecánica es b .
- b) en resonancia de velocidad, la potencia media disipada por la fuerza de fricción en un ciclo es mínima.

- c) en resonancia de elongación, la diferencia de fase entre la fuerza armónica aplicada y la elongación es nula.
- d) en resonancia de velocidad, la diferencia de fase entre la fuerza armónica aplicada y la elongación es $\frac{\pi}{2}$ rad.
- e) la frecuencia de resonancia de velocidad es más pequeña que la de resonancia de elongación.

Cuestión 6.4.4. Una partícula de masa 0,2 kg recibe una fuerza elástica de constante k y una amortiguadora proporcional a la velocidad de constante 4 N s/m. Se aplica a la partícula una fuerza $F = F_0 \cos \omega_1 t$ y, una vez alcanzado el régimen estacionario, la partícula oscila con una elongación $x = 0,6 \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$ (todo en unidades S.I.). Podemos afirmar que:

- a) si aumentamos la frecuencia de la fuerza F , la amplitud de la elongación x de la partícula aumentará.
- b) la impedancia mecánica vale 4 N s/m.
- c) faltan datos para calcular la impedancia mecánica.
- d) si aumentamos la frecuencia de la fuerza F , la amplitud de la velocidad de la partícula aumentará.
- e) la velocidad máxima de la partícula ha de ser 0,6 m/s.

Cuestión 6.4.5. Una partícula de 2 kg de masa realiza oscilaciones forzadas en un medio viscoso bajo la acción de una fuerza externa armónica $F = 5 \cos(3t)$ (todas las unidades en el S.I.). En régimen estacionario, podemos afirmar lo siguiente:

- a) La elongación podría ser $x = A \cos(3t + \frac{\pi}{4})$.
- b) La aceleración de la partícula podría ser $a = 2,5 \cos(3t)$.
- c) La velocidad podría ser $v = v_0 \cos(2t)$.
- d) Si la aceleración fuera $a = -0,2 \cos(3t - \frac{\pi}{2})$, la partícula estaría en resonancia de velocidad.
- e) Si la velocidad fuera $v = 0,5 \sin(3t)$, la partícula estaría en resonancia de velocidad.

Cuestión 6.4.6. Si a un oscilador armónico amortiguado se le aplica una fuerza $F(t)$ armónica y la amplitud de las oscilaciones que hace es máxima, la frecuencia de la fuerza es:

- a) algo más grande que la propia de vibración del sistema sin amortiguación.
- b) más grande que la frecuencia de vibración del sistema sin $F(t)$, estando amortiguado.
- c) más pequeña que la frecuencia de vibración del sistema sin $F(t)$, estando amortiguado.
- d) igual a la frecuencia con que oscilaría el sistema cuando está amortiguado y sin fuerza aplicada.
- e) igual a la de vibración libre del sistema.

Cuestión 6.4.7.Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- a) En un sistema de masa-muelle-amortiguador excitado con una fuerza armónica, las pulsaciones de resonancia de amplitud y de velocidad coinciden si la fuerza viscosa es despreciable.
- b) La impedancia mecánica de un sistema de masa-muelle-amortiguador es igual al coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza viscosa y la velocidad.
- c) La potencia media disipada por las oscilaciones armónicas forzadas es máxima cuando hay resonancia de amplitud.
- d) El período de las oscilaciones armónicas amortiguadas depende de la amplitud.
- e) Ninguna de las cuatro afirmaciones anteriores es cierta.

Cuestión 6.4.8. En el movimiento amortiguado, siendo x la elongación y $F_f = -b\dot{x}$ la fuerza de fricción, cuál de las respuestas siguientes es cierta:

- a) Si es oscilatorio, el período es más pequeño que el que tendría el sistema sin amortiguación.
- b) Si el factor de amortiguación γ fuera igual a la pulsación que tendría el sistema sin amortiguación, el movimiento no sería oscilatorio.
- c) Si es oscilatorio, cuanto más pequeño es el factor de amortiguación γ , más rápidamente disminuye la amplitud.

- d) Ninguna de las otras cuatro afirmaciones es cierta.
- e) Si el sistema fuera subamortiguado y, además, aplicáramos una fuerza armónica externa de forma que estuviera en resonancia de elongación, en estas condiciones también oscilaría con la misma pulsación que la del movimiento subamortiguado.

Cuestión 6.4.9. Una masa de 1 kg unida a un amortiguador y a un muelle de constantes 2 N s/m y 5 N/m, respectivamente, entra en resonancia por el efecto de un agente externo que le aplica una fuerza $F_0 \sin(\Omega t)$. Podemos afirmar que:

- a) si $\Omega = 2$ rad/s, el sistema está en resonancia de amplitud.
- b) si $\Omega < 1$ rad/s, el sistema no oscila.
- c) la impedancia mecánica del sistema es 2 N s/m si la resonancia es de amplitud.
- d) la elongación está desfasada $\frac{\pi}{3}$ rad con respecto a la fuerza aplicada por el agente externo si la resonancia es de amplitud.
- e) la elongación está en fase con la fuerza aplicada por el agente externo si la resonancia es de amplitud.

Problema 6.4.1. Una masa de 1 kg está sujeta a una estructura mediante un muelle elástico. Se la somete a una fuerza $F = F_0 \sin(\Omega t)$, con $F_0 = 2,5$ N y Ω variable. Se observa la relación de la tabla entre Ω y la amplitud A_p de la masa. Haz una estimación de la constante recuperadora k del muelle y la constante b de amortiguación.

Ω (s ⁻¹)	14	20	26	32	36	40
A_p (cm)	0,31	0,42	0,78	1,10	0,85	0,41

Tabla del problema 6.4.1

Solución: $k = 1089$ N m⁻¹; $b = 6,9$ N s m⁻¹

Problema 6.4.2. Una masa de 3 g está sometida a una fuerza restauradora de 1 N/m y a una amortiguadora de 0,1 N s/m. Si se le aplica una fuerza $F = 0,1 \cos(10\pi t)$ (unidades S.I.), calcula la amplitud y la diferencia de fase entre la fuerza y la velocidad. Calcula la impedancia mecánica y halla la frecuencia de resonancia de velocidad.

Solución: $A_p = 2,70$ cm; $\theta = 32,0^\circ$; $Z = 0,12$ N s m⁻¹; $f_{RV} = 2,91$ Hz

Problema 6.4.3. Una partícula de 10 g está sometida a la acción de una fuerza recuperadora de 0,05 N/m y una fuerza amortiguadora de 0,03 N s/m. Si sobre esta partícula actúa una fuerza periódica de 50 rad/s de pulsación y de 0,001 N de amplitud, halla, en el régimen estacionario:

- a) la impedancia mecánica.
- b) la velocidad máxima.
- c) la frecuencia de resonancia de velocidad.
- d) la amplitud de velocidad en este caso.

Solución: a) $Z = 0,5 \text{ N s m}^{-1}$; b) $v_{\text{máx}} = 0,20 \text{ cm s}^{-1}$; c) $f_{RV} = 0,36 \text{ Hz}$; d) $v_{\text{máx}} = 3,33 \text{ cm s}^{-1}$

Problema 6.4.4. Del extremo de un muelle cuelga un cuerpo de masa 5 kg. Se separa de su posición de equilibrio y se observa que hace un MAS vertical que tarda 0,4 s en ir de un extremo al otro de la oscilación. La energía mecánica de la partícula es de 100 J.

- a) Calcula el tiempo que tarda el cuerpo en ir de la posición 0,5 m por encima del centro de oscilación a 0,2 m por debajo del centro, en el movimiento descendente.

Si hacemos oscilar el sistema anterior en un medio viscoso, la frecuencia pasa a ser el 90 % de la que tenía en el MAS.

- b) Calcula el factor de reducción de la amplitud en un intervalo de 0,5 s.

Aplicamos al sistema una fuerza armónica de la misma frecuencia que la de la oscilación amortiguada. Se observa que, en estado estacionario, el sistema alcanza una velocidad máxima de $1,5 \text{ m s}^{-1}$.

- c) ¿Qué vale la amplitud de la fuerza aplicada?

Solución: a) $t = 0,117 \text{ s}$; b) $\frac{A}{A_0} = 0,181$; c) $F_0 = 52,8 \text{ N}$

Problema 6.4.5. Una masa de 3 kg experimenta un movimiento armónico simple en la dirección del eje x de amplitud 10 cm y período 3 s. Por $t = 2,5 \text{ s}$, la masa pasa por la posición de equilibrio, $x = 0$, con velocidad positiva.

- a) Determina la elongación y la velocidad en $t = 0$.

En un instante en que la masa pasa por la posición de equilibrio, desplazándose en el sentido positivo del eje x , se pone en marcha un dispositivo amortiguador que proporciona una fuerza de fricción viscosa proporcional a la velocidad, de coefi-

cienta 10 N s/m.

b) Tomando como nuevo origen de tiempo ($t = 0$) el momento en que se pone en marcha el amortiguador, escribe la expresión de la trayectoria y determina todos los parámetros que intervienen.

c) Calcula la energía cinética del sistema al finalizar el primer ciclo de oscilación.

Finalmente, se aplica sobre la masa una fuerza periódica $F = 5 \cos(\Omega t)$ (unidades S.I.) también en la dirección del eje x .

d) ¿Cuál sería la amplitud de las oscilaciones forzadas si el sistema estuviera en resonancia de velocidad?

Solución: a) $x_0 = 0,087 \text{ m}$, $v_0 = 0,105 \text{ m/s}$

b) $x = 0,165 e^{-1,67t} \cos(1,27t + 3\pi/2)$; c) $E_c = 4,4 \times 10^{-9} \text{ J}$; d) $A = 0,239 \text{ m}$

Problema 6.4.6. Este cuerpo de masa $m = 3 \text{ kg}$ situado sobre un plano horizontal sin fricción está unido a dos muelles de constantes $k_1 = 7 \text{ N/m}$ y k_2 , y a un amortiguador de constante $b = 10 \text{ N s/m}$. Se aplica al cuerpo una fuerza armónica $F = 4 \sin(2t)$, en unidades S.I.

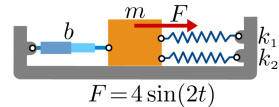


Figura del problema 6.4.6

a) Determina el valor de k_2 para que, en el movimiento oscilatorio del cuerpo, la diferencia de fases entre la fuerza armónica y la elongación sea $\frac{\pi}{2}$ rad.

Eliminamos el muelle de constante k_2 .

b) Escribe la ecuación de la elongación en función del tiempo y determina todos los parámetros que intervienen.

c) ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el cuerpo en su oscilación?

Cuando el cuerpo se halla en el extremo derecho de la oscilación, eliminamos la fuerza armónica.

d) ¿Qué tipo de movimiento amortiguado realizará el cuerpo?

e) Determina la ecuación que da la posición del cuerpo en función del tiempo y calcula todos los parámetros que intervienen.

Solución: a) $k_2 = 5 \text{ N/m}$; b) $x = 0,194 \sin(2t - 1,82)$; c) $v_{\max} = 0,388 \text{ m s}^{-1}$; d) el sistema está sobreamortiguado; e) $x = 0,340 e^{-t} - 0,146 e^{-2,33t}$

Problema 6.4.7. Un tubo en forma de U, con una sección de 1,8 cm de diámetro, contiene 120 g de etanol ($\rho = 787,4 \text{ kg/m}^3$). En una de las ramas, se provoca un pequeño desplazamiento del líquido.

a) Si no hubiera fricción del líquido con las paredes del tubo, encuentra la pulsación natural de sus oscilaciones.

De hecho, cuando se observan estas oscilaciones, se comprueba que su amplitud disminuye un 3,5 % en cada período.

b) ¿Cuál es el período de las oscilaciones amortiguadas?

c) ¿Con qué frecuencia se debería soplar el líquido del tubo para que el movimiento oscilante tuviera la máxima amplitud?

Solución: a) $5,72 \text{ rad s}^{-1}$; b) $1,1 \text{ s}$; c) $0,91 \text{ Hz}$

Problema 6.4.8. Un disco D de masa m_D , al cual se ha añadido una masa m_1 , está sujeto a un muelle (de constante recuperadora k y masa equivalente m_u) y, a través de una cuerda y una polea P_2 , a una segunda masa m_2 . El disco provoca una fricción aerodinámica de coeficiente b . El sistema puede ser forzado a oscilar mediante un motor que mueve armónicamente el muelle con una pulsación Ω . Las poleas P_1 y P_2 tienen masa despreciable.

Con el motor parado, desplazamos verticalmente la masa m_2 y soltamos:

a) Halla la ecuación de movimiento utilizando la coordenada y .

Ponemos en marcha el motor de forma que $y_m = y_{m0} + R \sin(\Omega t + \theta_0)$.

b) Halla la nueva ecuación de movimiento.

c) Escribe la ecuación de movimiento de forma canónica (denomina x la nueva coordenada) e identifica todos los parámetros.

d) Grafica la amplitud de las oscilaciones forzadas estacionarias en función de la pulsación del motor.

Datos: $m = m_1 + m_D + m_2 + m_u = 0,80 \text{ kg}$; $k = 9,7 \text{ N/m}$; $R = 4 \text{ cm}$; $b = 1,5 \text{ N s/m}$

Solución: unidades S.I.

a) $m\ddot{y} + b\dot{y} + k(y - y_m - \ell_{eq}) = 0$, con $y_{eq} - y_m - \ell_{eq} = 0$

b) $m\ddot{y} + b\dot{y} + k(y - y_{m0} - \ell_{eq}) - kR \sin(\Omega t + \theta_0) = 0$

c) $\ddot{x} + 2 \underbrace{\left(\frac{b}{2m}\right)}_{\gamma} \dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\left(\frac{kR}{m}\right)}_B \sin(\Omega t + \theta_0)$

d) $A_p(\Omega) = \frac{0,48}{\sqrt{3,52\Omega^2 + (\Omega^2 - 12,13)^2}}$

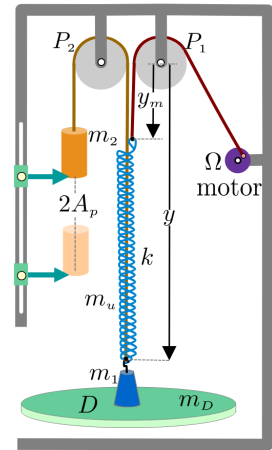


Figura del problema 6.4.8

Problema 6.4.9. Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve en un plano horizontal en la dirección del eje x , bajo la acción de una fuerza recuperadora de constante 18 N/m y en presencia de una fuerza de fricción viscosa de coeficiente 16 N s/m.

Mediante un motor, se aplica una fuerza armónica $F = F_0 \sin \Omega t$ sobre el cuerpo, también en la dirección del eje x . En condiciones estacionarias, la expresión de la trayectoria del cuerpo es $x = 0,01 \sin(\Omega t - \pi/2)$ (x en m y t en s).

- Calcula la pulsación Ω , la impedancia mecánica y la amplitud de la fuerza.
- Expresa la velocidad del cuerpo en función del tiempo y calcula el desfase entre esta y la fuerza.

Se desconecta el motor:

- ¿Qué tipo de movimiento hace el cuerpo? Razona y justifica numéricamente la respuesta.

Solución: a) 3 rad/s; 16 kg/s; 0,48 N; b) $0,03 \sin 3t$; 0

Problema 6.4.10. Considera el sistema de la figura. Cuando está en equilibrio, $\ell = \ell_{eq}$. La polea gira en torno a un eje fijo que pasa por O respecto al cual el momento de inercia vale I . Presenta una fricción de tipo viscoso que la afecta con un momento con respecto al eje $M_{\beta(O)} = -\beta \dot{\phi}$, donde $\dot{\phi}$ es la velocidad angular y una β constante.

Suponemos que, en todo momento, la cuerda se mantiene tensa y no se desliza. Con el motor parado, $L = \text{cte.}$, desplazamos verticalmente la masa m y la soltamos:

- Escribe la ecuación de movimiento utilizando la coordenada y .

Ponemos en marcha el motor de forma que L deja de ser constante y se puede expresar $L = \overline{CO}_{mot} + r \sin(\Omega t + \theta_0)$ por el hecho de que $\overline{CO}_{mot} \gg r$ (C es el punto de contacto cuerda-polea, que en esta aproximación se mantiene en reposo).

- Encuentra la nueva ecuación de movimiento.
- Escribe la ecuación de movimiento de forma canónica (denomina x la nueva coordenada) e identifica todos los parámetros.
- Grafica la amplitud de las oscilaciones forzadas estacionarias en función de la pulsación Ω del motor.

Datos:

$$R = 14 \text{ mm}; I = 6,0 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2; r = 20 \text{ mm}$$

$$m = 107 \text{ g}; k = 3,50 \text{ N/m}; \beta = 1,81 \times 10^{-4} \text{ N m s}$$

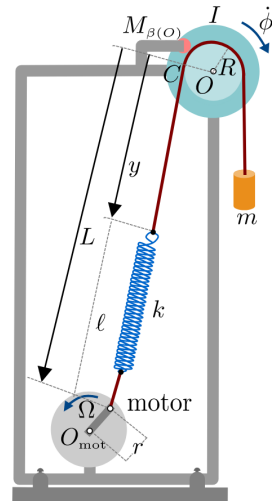


Figura del problema 6.4.10

Solución (unidades S.I.):

$$a) \left(\frac{I}{R^2} + m\right) \ddot{y} + \frac{\beta}{R^2} \dot{y} + k(y + \ell_{\text{eq}} - L) = 0$$

$$b) \left(\frac{I}{R^2} + m\right) \ddot{y} + \frac{\beta}{R^2} \dot{y} + k(y + \ell_{\text{eq}} - \overline{CO}_{\text{mot}}) - kr \sin(\Omega t + \theta_0) = 0$$

$$c) \ddot{x} + 2 \underbrace{\left(\frac{\beta}{2R^2 \left(\frac{I}{R^2} + m\right)}\right)}_{\gamma} \dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{\frac{I}{R^2} + m}\right)}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\left(\frac{kr}{\frac{I}{R^2} + m}\right)}_B \sin(\Omega t + \theta_0);$$

$$x = y + \ell_{\text{eq}} - \overline{CO}_{\text{mot}}$$

$$d) A_p(\Omega) = \frac{0,169}{\sqrt{5,00\Omega^2 + (\Omega^2 - 8,47)^2}}$$

Problema 6.4.11. Una boya lastrada por su parte inferior, de masa total $m = 20$ kg, se mantiene en equilibrio en $y = 0$, donde y es una coordenada vertical, en un líquido de densidad $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$. Para evitar oscilaciones excesivas, se ha diseñado de forma que presente un amortiguamiento $-80 \dot{y}$ (unidades S.I.). La parte cilíndrica de la boya, de radio $R = 0,25$ m, siempre toca el nivel del agua. Determina:

- a) la ecuación diferencial de movimiento para la coordenada y ;
- b) el período de las oscilaciones, y
- c) la posición en función del tiempo, $y(t)$, si le damos un empujón cuando está en equilibrio de forma que la velocidad inicial es $\dot{y}_0 = -10$ m/s.

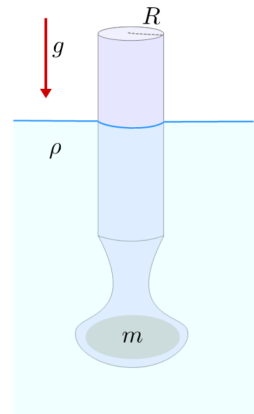


Figura del problema 6.4.11

Debido a un suave y persistente oleaje, recibe una fuerza de excitación vertical $F = 100 \sin(10t)$ (unidades S.I.). Determina:

- d) la posición en función del tiempo, $y(t)$, para el movimiento estacionario.

Solución: a) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 96,3y = 0$; b) $T = 0,654$ s; c) $y(t) = 1,041 e^{-2t} \sin(9,60 t + \pi)$; d) $y(t) = 0,1244 \sin(10t - 1,66)$

Problema 6.4.12. Una partícula de 2 kg, unida a un muelle de constante recuperadora de 18 N/m y a un amortiguador con parámetro de amortiguamiento $\gamma = 3 \text{s}^{-1}$, hace un movimiento rectilíneo en la dirección x , siendo $x = 0$ su punto de equilibrio.

- a) Escribe la ecuación de movimiento.

En el instante inicial, la partícula se halla en la posición $x = 0,3$ m, con una velocidad $\dot{x} = -0,2$ m/s.

- b) Escribe la expresión de su trayectoria.



Aplicamos a la partícula una fuerza armónica en la dirección x , para que oscile con una amplitud constante de 0,1 m, y tarda 0,25 s en ir de un extremo al otro de la oscilación:

c) ¿Cuál debe ser el valor de la amplitud de esta fuerza?

d) ¿Qué velocidad máxima alcanzará la partícula en estas condiciones?

Solución: a) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$; b) $x(t) = (0,3 + 0,7t) e^{-3t}$; c) $F_0 = 33,383$ N; d) 1,257 m/s



→ 7P

7 Problemas y cuestiones

Problema 7.2.3. La fotografía de un pulso ondulatorio en una cuerda en el instante $t = 0$ indica que la forma de este es (unidades S.I.)

$$y(x, 0) = \frac{18 \times 10^{-3}}{8 + x^2}$$

Si la elongación de la cuerda en el punto $x = 5,20$ m y en el instante $t = 0,40$ s es de 2,25 mm, ¿a qué velocidad se propaga esta onda? Si la densidad lineal de la cuerda es 0,280 kg/m, ¿a qué tensión está sometida?

Solución: 13,0 m/s; 47,3 N

Problema 7.2.4. Si A , B , C , k , ω y ϕ son constantes, ¿cuál de las funciones siguientes representan ondas? ¿Cuál es la velocidad de propagación en los casos afirmativos?

a) $y(x, t) = A \cos^2(kx - \omega t + \phi)$ **b)** $y(x, t) = A \cos kx \cos \omega t$

c) $y(x, t) = \frac{A}{(Bx + Ct)^2 + 1}$ **d)** $y(x, t) = \frac{A}{(Bx^2 - Ct^2) + 1}$

Solución: Son ondas las funciones **a**, **b** y **c**. Las velocidades son: para **a** y **b**, $v = \frac{\omega}{k}$; para **c**, $v = \frac{C}{B}$.

Problema 7.2.5. Responde las cuestiones encadenadas siguientes.

a) Escribe una onda armónica que se propague hacia las x decrecientes, de 8,0 mm de amplitud, 230 Hz de frecuencia y 145 m/s de velocidad.

b) ¿Qué distancia hay entre dos puntos que, en un instante dado, están desfasados $\pi/3$ rad?

c) ¿Cuál es la diferencia de fase de la elongación en el mismo punto entre dos instantes de tiempo separados $1,5 \times 10^{-3}$ s?

Solución: a) $y = 8,0 \times 10^{-3} \sin(9,966x + 1445t)$; b) 0,1051 m; c) 2,168 rad

Problema 7.2.6. Dos puntos x_1 y x_2 de una cuerda, separados 1,20 m, por la cual pasa una onda armónica vibran, respectivamente (en unidades S.I.):

$$y_1 = 0,020 \sin \pi \left(3t - \frac{1}{2} \right) \quad , \quad y_2 = 0,020 \sin \pi (3t - 1)$$

Calcula la velocidad a la cual se propaga la onda, la longitud de onda y la función de onda.

Solución: 7,20 m/s; 4,80 m; $y(x, t) = 0,020 \sin 3\pi(t - x/7,20 - 1/6)$

Problema 7.2.7. Considera la onda $y(x, t) = 4 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240} \right) \right]$, donde y y x se expresan en cm y t en s. Calcula:

- a) la diferencia de fase, en un instante dado, entre dos partículas del medio separadas 210 cm.
- b) la diferencia de fase entre dos posiciones y el mismo instante sabiendo que la partícula del medio emplea 1,0 s en ir de una de estas posiciones a la otra.
- c) Si una partícula determinada, en un momento dado, presenta una elongación de 3,0 cm, ¿cuál será su elongación 2,0 s más tarde?

Solución: a) $7/4\pi$ rad; b) $\pi/3$ rad; c) $-3,79$ cm

Problema 7.2.8. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda indefinida con una velocidad de 4,0 m/s. En todo instante de tiempo, la distancia mínima entre dos puntos que están en fase es de 20 cm. Se sabe que, en el origen, $x = 0$ y en el instante inicial, $t = 0$, la elongación es máxima de valor 20 cm. Halla:

- a) la amplitud, la longitud de onda y el período.
- b) la elongación y la velocidad de un punto $x = 0,25$ m, una vez transcurridos $t = 5/16$ s.
- c) la distancia mínima entre dos puntos con diferencia de fase de $\pi/3$ rad.
- d) la diferencia de fase entre dos puntos separados $\Delta x = 5$ cm

Solución: a) 20 cm; 0,20 m; 0,05 s; b) 20 cm; 0 m/s; c) 3,33 cm; d) $\pi/2$ rad

Problema 7.2.9. Una onda armónica plana avanza a una velocidad de propagación de 32 m/s. La amplitud vale 2,3 cm y la frecuencia, 60 Hz. Suponiendo que en el origen $x = 0$ y en el instante inicial $t = 0$ la elongación es máxima, ¿cuánto valen

la elongación, la velocidad y la aceleración en un punto $x = 15,3$ m, una vez han transcurrido $t = 2,60$ s?

Solución: $-0,88$ cm, $-8,01$ m/s; 1251 m/s²

Problema 7.3.2. Una cuerda larga, de densidad lineal $0,10$ kg/m y sometida a 25 N de tensión, se hace vibrar a la frecuencia de 20 Hz y provoca que se propague una onda armónica de amplitud 1 cm.

- a) Calcula la velocidad a la cual se propaga la onda y su longitud de onda.
- b) Escribe una función de onda para esta onda sabiendo que, en el instante inicial $t = 0$, la elongación de la cuerda en el origen $x = 0$ es $0,50$ cm.
- c) En $t = 4$ s, ¿qué elongación, velocidad y aceleración transversal tiene el punto de la cuerda situado a $x = 90$ cm?

Solución: a) $15,81$ m/s; $0,7905$ m; b) $y = 1 \times 10^{-2} \sin(\omega t - kx + \pi/6)$; $125,66$ rad/s; $7,948$ rad/m; c) $-0,3383$ cm; $118,3$ cm/s; $53,42$ m/s²

Problema 7.3.3. Utilizando el análisis dimensional, averigua cómo pueden ser las expresiones que proporcionan las velocidades v de la propagación de estas dos ondas:

- a) las ondas para una cuerda muy larga, de densidad lineal μ y sometida a una tensión F ;
- b) las ondas en la superficie del agua, sobre un estanque o el mar, causadas por el peso del líquido, cuando la amplitud vertical de las ondas es mucho más pequeña que la profundidad h del agua. Las magnitudes de las cuales pueden depender estas ondas superficiales son la densidad del agua ρ , la aceleración g de la gravedad y la profundidad h .

Solución: a) $v = k\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; b) $v = k\sqrt{gh}$, donde k es una constante sin dimensiones (un estudio físico detallado muestra que, en ambos casos, vale 1).

Problema 7.3.4. Se cuelga del techo una cadena larga y pesada, de longitud L y masa m . Se da una sacudida con la mano a uno de los dos extremos y se provoca un pulso ondulatorio que sube arriba, llega al techo, se refleja y baja hasta el otro extremo. Calcula cuánto tiempo tardará el pulso en subir y bajar.

Solución: $\Delta t = 4\sqrt{\frac{L}{g}}$

Problema 7.3.5. La velocidad de las ondas sonoras en el aire viene dada por (7.29):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde $\gamma = 1,40$, $R = 8,314 \text{ J/molK}$ y M , la masa molar del aire, vale $0,0290 \text{ kg/mol}$. Haciendo las aproximaciones necesarias, encuentra una expresión simple de la velocidad del sonido en función de la temperatura t_C del aire en grados Celsius, $^{\circ}\text{C}$, para temperaturas próximas a los 0°C .

Solución: En m/s, $v(t_C) = 331 + 0,606t_C$, si t_C en $^{\circ}\text{C}$.

Problema 7.3.6. Cuando un tubo de acero de 200 m de longitud es golpeado en un extremo, una persona situada en el otro extremo percibe dos sonidos, como resultado de dos ondas longitudinales, una que se propaga por el tubo y la otra por el aire, a $T = 20^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre ambos sonidos?

Solución: $0,549 \text{ s}$

Problema 7.4.1. Con algún programa de matemáticas, comprueba gráficamente que las dos funciones periódicas siguientes son equivalentes a los desarrollos en las series de Fourier indicados:

a) Valor absoluto del $\sin(\omega t)$: $f(t) = |\sin \omega t|$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

b) Sierra triangular positiva: $f(t) = t$, $2\pi n < t < 2\pi(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$

$$f(t) = \pi - 2 \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \dots \right)$$



→ 8P

8 Problemas y cuestiones

Problema 8.1.3. Hacemos vibrar un alambre tensado de forma que se generan ondas transversales de 120 Hz de frecuencia y 2,30 mm de amplitud. La densidad del alambre es 0,010 kg/m y está sometido a una tensión de 100 N.

- a) ¿Cuánto valen la pulsación y el número de onda?
- b) ¿Cuánta energía por unidad de longitud tiene el alambre? ¿Cuál es la mínima potencia que debemos suministrar para que la amplitud de las ondas se mantenga constante?

Solución: a) 754,0 rad/s, 7,540 rad/m; b) 0,01504 J/m, 1,504 W

Problema 8.2.2. Por una barra de acero de 4 cm de diámetro, se propagan ondas longitudinales de amplitud $1,0 \times 10^{-5}$ m y frecuencia 30 Hz. Calcula:

- a) La función de onda que se propaga a lo largo de la barra.
- b) La energía de la barra por unidad de volumen.
- c) La potencia media y la intensidad que se propagan a través de la barra.

Solución: a) $s = 1,0 \times 10^{-5} \sin(0,03722x - 188,5t)$ (unidades S.I.); b) 0,0139 J/m³; c) 88,2 mW; 70,2 W/m²

Problema 8.3.2. Responde las cuestiones encadenadas siguientes:

- a) ¿Cuál es la intensidad y el nivel de intensidad de una onda sonora en el aire que tiene una amplitud de presión acústica de 0,20 Pa? ¿Qué porcentaje representa esta amplitud con respecto a la presión atmosférica?
- b) ¿A qué amplitud de la onda sonora de desplazamiento se corresponde si la frecuencia del sonido es de 440 Hz?

Nota: Supón que la impedancia acústica del aire es de 418 rayl.

Solución: a) $4,6 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$; 76,6 dB; $2,0 \times 10^{-4} \%$; b) $1,73 \times 10^{-7} \text{ m}$

Problema 8.3.3. Una onda sonora plana en el aire, de 100 Hz de frecuencia, tiene una amplitud de $7,7 \times 10^{-6} \text{ m}$. Si la presión del aire es de $1 \text{ atm} = 1033 \text{ hPa}$ y la temperatura es de 15°C , determina:

- a) la impedancia acústica del aire.
- b) la intensidad y el nivel de intensidad de la onda sonora.
- c) la amplitud de la onda de presión acústica correspondiente.

Solución: a) 425 rayl; b) $4,97 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$; 97,0 dB; c) 2,06 Pa

Problema 8.3.4. Sabiendo que las impedancias acústicas del aire y del agua son 418 rayl y $1,45 \times 10^6 \text{ rayl}$, respectivamente:

- a) ¿Cuál es la razón de las amplitudes de las presiones acústicas de dos ondas de la misma frecuencia, una en el agua y la otra en el aire, que tienen la misma intensidad?
- b) Si las amplitudes de las presiones acústicas de ambas ondas fueran iguales, ¿cuál sería la razón de sus intensidades?

Solución: a) 58,9; b) $2,88 \times 10^{-4}$

Problema 8.3.5. El sonido de una explosión de 0,25 s de duración deja de ser percibido a partir de los 80 km del punto donde se ha producido. La intensidad umbral para este sonido es $8 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Suponiendo que el sonido se propaga como una onda esférica sin pérdidas de energía, determina:

- a) la energía acústica involucrada en el sonido de la explosión.
- b) la distancia a la cual el nivel de intensidad es de 50 dB.
- c) ¿Cuántas explosiones juntas y simultáneas serían necesarias para que el nivel de intensidad, a la distancia del apartado b, fuera de 70 dB?

Solución: a) 0,161 J; b) 253 m; c) 100

Problema 8.3.6. La intensidad de una onda plana se ha reducido en un 30 % después de atravesar 12 cm de un material absorbente.

- a) ¿Cuánto vale el coeficiente de absorción del material para este tipo de onda?
- b) ¿Qué distancia había atravesado la onda en el instante en que la intensidad era el 90 % de la inicial?

Solución: a) $2,97 \text{ m}^{-1}$; b) $3,55 \text{ cm}$

Problema 8.3.7. Dos cables, de densidades diferentes, se sueldan uno a continuación del otro y se someten a una tensión determinada. Se propaga una onda por el primer cable y, al llegar a la soldadura, una parte se refleja y la otra se transmite. Sabiendo que la amplitud de la onda reflejada es la mitad que la de la onda transmitida y que la velocidad de las ondas del primer cable es el doble de la de las del segundo:

- a) ¿Qué relación existe entre las amplitudes de las tres ondas?
- b) ¿Qué porcentaje de la potencia incidente se transmite? ¿Qué porcentaje se refleja?

Solución: a) $a_R = \frac{A_R}{A_I} = \frac{1}{3}$; $a_T = \frac{A_T}{A_I} = \frac{2}{3}$; b) $p_R = \frac{P_R}{P_I} = \frac{1}{9}$; $p_T = \frac{P_T}{P_I} = \frac{8}{9}$

Problema 8.3.8. Una onda armónica longitudinal atraviesa una interfaz acero \rightarrow cobre. La onda incidente tiene un período de $1,0 \times 10^{-3} \text{ s}$ y una longitud de onda de $5,05 \text{ m}$, siendo su amplitud $2,0 \times 10^{-6} \text{ m}$. Si se observa que la onda transmitida tiene una longitud de onda de $3,71 \text{ m}$, calcula:

- a) la velocidad de propagación de las ondas en cada medio.
- b) los coeficientes de transmisión y reflexión acero \rightarrow cobre.
- c) la proporción de energía que se refleja y transmite.
- d) la amplitud de la onda reflejada.

Datos: Las densidades del acero y el cobre empleados son $\rho_{\text{acero}} = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{cu}} = 8960 \text{ kg/m}^3$, respectivamente. Los módulos de Young los encontrarás en la tabla 7.1.

Solución: a) $v_{\text{acero}} = 5050 \text{ m/s}$; $v_{\text{cu}} = 3710 \text{ m/s}$; b) 1,088; 0,0878; c) 0,771 %; 99,23 %; d) $1,76 \times 10^{-7} \text{ m}$

Problema 8.3.9. En un sistema de ecografía de un hospital, el transductor —la parte que emite los ultrasonidos— es de aluminio.

- a) Considerando que los ultrasonidos salen del aluminio, pasan por el aire y llegan al cuerpo, ¿qué porcentaje de la potencia de los ultrasonidos entra en el cuerpo?
- b) Si ahora interponemos glicerina, en lugar de aire, entre el transductor de aluminio y el cuerpo, ¿cuánto vale ahora el porcentaje de la potencia de los ultrasonidos que entra en el cuerpo?

Datos: Toma la impedancia acústica del cuerpo como la del agua, $1,45 \times 10^6$ rayl; para las impedancias del aire y del aluminio, toma 418 rayl y $13,7 \times 10^6$ rayl, y para la glicerina, $2,46 \times 10^6$ rayl.

Solución: a) $1,41 \times 10^{-5}$ %; b) 48,2 %

Problema 8.3.10. Consideramos dos cables, de secciones S_1 y S_2 y densidades lineales μ_1 y μ_2 , soldados en un punto y sometidos a una tensión F . Las expresiones para las amplitudes y potencias transmitidas y reflejadas de las ondas transversales se rigen por las mismas expresiones que en el caso longitudinal, con la impedancia correspondiente: $Z_i = \rho_i v_i = \frac{\mu_i}{S_i} \sqrt{\frac{F}{\mu_i}} = \sqrt{F} \frac{\sqrt{\mu_i}}{S_i}$.

Aplica estos conocimientos al caso siguiente:

Dos cables, uno de cobre y el otro de acero, de 1 mm de radio cada uno, se unen para formar un cable más largo. La tensión del conjunto es de 50 N. Una onda de 10 Hz se propaga desde el cobre hacia el acero con una amplitud de 2,0 mm.

- a) Calcula la longitud de onda de la onda en cada cable.
- b) Calcula los coeficientes de transmisión y de reflexión.

Datos: Densidad del cobre: $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg/m}^3$; densidad del acero: $\rho_{\text{Ac}} = 7800 \text{ kg/m}^3$

Solución: a) 4,23 m; 4,52 m; b) 1,033; 0,033

Problema 8.4.3. Una onda armónica de 1 cm de amplitud se superpone a otra onda de 2 cm de amplitud, desfasada con respecto a la primera en $-\pi/3$ rad. ¿Cuáles son la amplitud y el desfase de la onda resultante con respecto a la primera?

Solución: 2,646 cm; $-0,7137$ rad

Problema 8.4.4. En los puntos $S_1 = (0,3)$ y $S_2 = (4,0)$ (unidades S.I.), hay dos fuentes coherentes de ondas sonoras esféricas de 100 Hz. Las amplitudes a una distancia de 1 m de las fuentes son 1×10^{-3} Pa y 3×10^{-3} Pa, respectivamente. El sonido se propaga a 340 m/s.

- a) Si las fuentes emiten en fase, ¿cuánto valdrá la amplitud de la presión acústica en el origen (0,0)?
- b) ¿Cuánto se debería avanzar la segunda fuente con respecto a la primera para que, en el origen (0,0), hubiera una interferencia constructiva?

Solución: a) $0,190 \times 10^{-3}$ Pa; b) 1,85 rad

Problema 8.4.5. Como se muestra en la figura, el sonido de un diapasón de 440 Hz entra en un tubo por A , se bifurca en dos ondas que van por dos caminos, el ABD y el ACD , y después se vuelven a juntar en el punto D , donde interfieren. La longitud del camino ABD es 250 cm, mientras que la longitud máxima inicial del camino ACD es también 250 cm, pero se va reduciendo lentamente —mientras suena el diapasón— hasta los 75 cm.

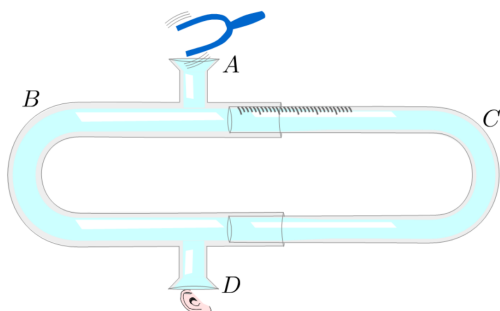


Figura del problema 8.4.5

Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, ¿por cuántos mínimos y máximos pasa la intensidad del sonido resultante durante la reducción de la longitud ACD ?

Solución: Máximos, 2: $ACD = 173$ cm; 95 cm; mínimos, 2: $ACD = 211$ cm; 134 cm

Problema 8.4.6. Dos altavoces alineados con una persona emiten coherentemente ondas planas sonoras de la misma frecuencia 440 Hz. La velocidad del sonido es de 340 m/s.

- a) Si emiten en fase, ¿a qué distancia uno del otro deben estar los altavoces para que la persona no oiga nada?
- b) Si siguen emitiendo coherentemente, pero ahora la fase del altavoz más próximo está avanzada $\pi/3$ rad con respecto al otro, en cuánto cambian las distancias anteriores?

Solución: a) 0,39 m; 1,16 m; 1,93 m...; b) Todas 0,13 cm menos.

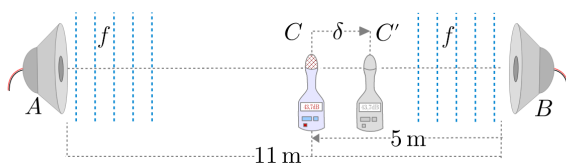


Figura del problema 8.4.7

Problema 8.4.7. En un laboratorio, en el cual la velocidad del sonido es de 340 m/s, dos altavoces A y B , que emiten ondas sonoras planas de 791 Hz, están encarados y separados 11 m, tal como se ve en la figura. Un sonómetro C está situado sobre la recta que los une, a 5 m de B . El altavoz A proporciona una intensidad de $0,75 \text{ W/m}^2$ y B , de $0,25 \text{ W/m}^2$.

- a) Si los dos altavoces emiten sin coherencia, ¿cuánto vale el nivel de intensidad β_0 registrado por el sonómetro C ?
- b) Si los altavoces emiten coherentemente y en fase, ¿qué diferencia de fase habrá entre el sonido de A y B al llegar al sonómetro C ?
- c) ¿Qué distancia mínima δ_1 tendríamos que desplazar el sonómetro C hacia B para que experimentara un máximo de intensidad? Y qué δ_2 para experimentar un mínimo?
- d) ¿Qué nivel de intensidad medirá el sonómetro en el máximo y en el mínimo?

Solución: a) 120 dB; b) 2,051 rad; c) $\delta_1 = 14,5 \text{ cm}$; $\delta_2 = 3,7 \text{ cm}$; d) 122,7 dB; 111,3 dB

Problema 8.4.8. , en $y = \pm d/2$, como se ve en la figura. Por medio de un amplificador de audiofrecuencia, emiten en fase sonidos de frecuencia f .

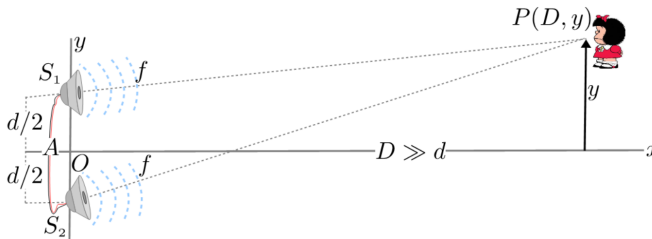


Figura del problema 8.4.8

Un observador se desliza desde $y = 0$ por una recta paralela al eje y , situada a una gran distancia D de este eje. Si $d \ll D$ y $y \ll D$:

- a) Demuestra que el observador percibirá los primeros máximos de intensidad sonora a las distancias:

$$y_{\text{const}} = n \frac{D}{d} \frac{v}{f} \quad \text{amb} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

siendo v la velocidad del sonido.

- b) Con $d = 2 \text{ m}$ y $D = 80 \text{ m}$, y suponiendo $v = 340 \text{ m/s}$, ¿para qué frecuencia la distancia entre dos máximos consecutivos de intensidad es de 3,0 m?

Solución: 4,53 kHz

Problema 8.4.9. En los puntos $A = (0; 4; 0)$ y $B = (8; 0; 0)$ (unidades S.I.) del aire libre hay dos focos sonoros puntuales de 1 mW y 2 mW de potencia, respectivamente, que pueden emitir en fase ondas esféricas. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, averigua:

- a) la diferencia de fase con que llegan las dos ondas en su origen si la frecuencia de ambos focos es 200 Hz.
- b) las frecuencias comprendidas entre 200 Hz y 1500 Hz con que tendrían que emitir simultáneamente los dos focos para que hubiera una interferencia destructiva en su origen.
- c) ¿Cuáles son las intensidades con que llegan las dos ondas —por separado— al origen?
- d) Si los focos emiten con una frecuencia para la cual hay interferencia destructiva en el origen, ¿cuánto vale la intensidad del sonido? ¿Y si emiten dando lugar a una interferencia constructiva?

Solución: a) 14,784 rad; b) 212,5 Hz; 255,0 Hz, ..., 1,445 kHz; 1,488 kHz; c) $4,97 \mu\text{W}/\text{m}^2$; $2,49 \mu\text{W}/\text{m}^2$; d) $0,427 \mu\text{W}/\text{m}^2$; $14,50 \mu\text{W}/\text{m}^2$

Problema 8.5.4. La frecuencia fundamental de una determinada cuerda de un violín, de longitud L , es 196 Hz. Si el violinista quiere obtener una frecuencia fundamental de 440 Hz, qué longitud ha de tener la cuerda?

Solución: $0,445L$

Problema 8.5.5. La primera y la última cuerdas de un piano están afinadas a 33 Hz y 4186 Hz, con longitudes de 198 cm y 5,1 cm, respectivamente. Si ambas cuerdas están sometidas a la misma tensión, ¿cuánto vale el cociente entre las densidades lineales efectivas de ambas cuerdas?

Solución: 10,68

Problema 8.5.6. En la figura, se muestra una varilla F que efectúa vibraciones sinusoidales de 100 Hz que excitan la cuerda horizontal AB de longitud 120 cm, tensionada por la masa M , de peso 2,25 N, que se mantiene prácticamente inmóvil. Se obtiene así un sistema de ondas estacionarias que presentan un nodo en la proximidad inmediata de la extremidad A de la varilla y otro nodo en el punto B que está en contacto con la polea. Entre estos dos nodos, se encuentran cuatro vientres. La amplitud de las vibraciones de los vientres es de 10 mm.

Determina:

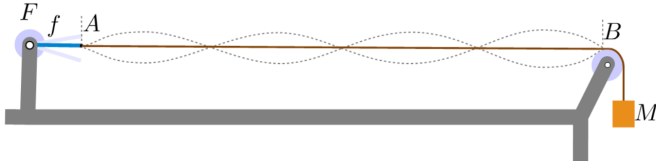


Figura del problema 8.5.6

- la longitud de onda de las vibraciones y su velocidad de propagación.
- la velocidad máxima de un punto de la cuerda que corresponde a un vientre.
- la amplitud de las vibraciones del punto de la cuerda situado a 35 cm de la extremidad A.
- ¿Cuál tendría que ser el peso de una nueva masa M' suspendida de la cuerda si se quisieran obtener tres vientres en lugar de cuatro?

Solución: a) 0,60 m; 60 m/s; b) 6,28 m/s; c) 5 mm; d) 4 N

Problema 8.5.7. Una onda estacionaria en una cuerda elástica de 6,00 m de longitud viene descrita por la función (unidades S.I.):

$$y(x, t) = 2,0 \times 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(\pi t)$$

- Representa esquemáticamente la onda estacionaria, indicando las posiciones de los nodos y de los vientres. ¿En qué armónico vibra la cuerda?
- Calcula la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.
- Escribe las funciones de las ondas armónicas que generan esta onda estacionaria.
- ¿En qué instantes estará la cuerda completamente recta?
- ¿En qué puntos de la cuerda y para qué instantes la velocidad transversal será máxima? ¿Qué valor tendrá esta velocidad?
- ¿Cuándo será cero la velocidad transversal de la cuerda?
- ¿En qué porcentaje se tendría que aumentar la tensión para que se formaran ondas estacionarias con un vientre menos?

Solución: a) 3, armónico; b) $v = 2,00$ m/s; c) $y_+(x, t) = 1,0 \times 10^{-2} \sin(x/2 - \pi t)$; $y_-(x, t) = 1,0 \times 10^{-2} \sin(x/2 + \pi t)$; d) $t = n + 1/2$ s, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; e) En los vientres, $x_v = 1, 3, 5$ m, para $t = n + 1/2$ s; $v = 6,28$ m/s; f) $t = n$ s; g) 125 %

Problema 8.5.8. Dos cuerdas idénticas, fijadas por los extremos, de 100 g de masa y 1 m de longitud, están sometidas a tensiones de 200 N y 205 N, respectivamente.

a) Si las dos cuerdas vibran en el tercer armónico, calcula la frecuencia de los latidos resultantes de la superposición de los sonidos generados por cada cuerda.

A continuación, se hace vibrar únicamente la cuerda de tensión 200 N con el armónico fundamental. Si la amplitud en un punto situado a 20 cm de un extremo es de 1,0 cm, determina:

b) la velocidad máxima del movimiento transversal de este punto de la cuerda.

c) la elongación en este punto en el instante $t = 0$, sabiendo que en este instante la elongación en el centro de la cuerda es máxima.

Solución: a) 0,833 latidos/s; b) $\dot{y} = 1,41$ m/s; c) $y = 1,00$ cm

Problema 8.5.9. El extremo A de una cuerda horizontal está fijado en la pared y el B pasa por una puela sin fricción y se le cuelga un cuerpo de masa M .

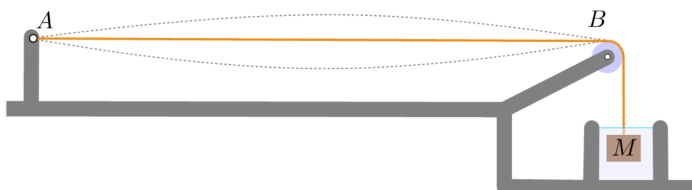


Figura del problema 8.5.9

La frecuencia del sonido fundamental emitido por la cuerda es 392 Hz. Si el cuerpo se sumerge totalmente en agua (v. figura), la frecuencia baja a 343 Hz. Calcula la densidad del cuerpo.

Solución: 4270 g/cm³

Problema 8.5.10. Una cuerda de 28,28 cm de longitud y 0,050 kg/m de densidad lineal se une a una segunda cuerda de densidad lineal la mitad que la de la primera.

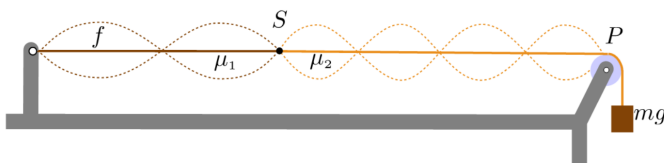


Figura del problema 8.5.10

Uno de los extremos se fija a una pared y el otro se hace pasar por una puela y se le cuelga un peso de 100 N. La longitud de esta segunda cuerda, entre la unión S

y la polea P , es de 100 cm. Queremos que a lo largo de ambas cuerdas se formen ondas estacionarias, de forma que en el punto de unión S haya un nodo, tal como se muestra en la figura.

¿Cuál es la frecuencia más baja que podemos aplicar a las cuerdas? En este caso, ¿cuántos vientres habrá a lo largo de las dos cuerdas?

Solución: 158,1 Hz; 7 vientres.

Problema 8.5.11. Una cuerda de 1,40 m de longitud y 2,00 g de masa se une a otra, de 1,00 m de longitud y 4,98 g de masa. El conjunto se hace vibrar a 120 Hz.

a) ¿A qué tensión máxima se debería someter para que se formaran ondas estacionarias estando la soldadura en un nodo? ¿Cuántos vientres habrá en cada cuerda en este caso?

b) ¿Qué otras tensiones inferiores también satisfacen esta condición?

Solución: a) 17,9 N; 3 y 4 vientres; b) 4,48 N; 1,99 N...

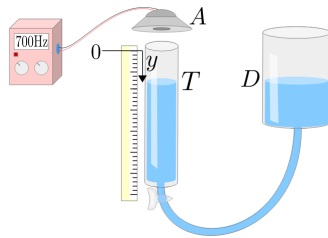


Figura del problema 8.5.12

Problema 8.5.12. Queremos medir la velocidad del sonido en el aire. Por eso, como se muestra en la figura, disponemos de un altavoz A , que emite sonido armónico del cual podemos controlar la frecuencia entre 400 y 1200 Hz, y de un tubo T de 1 m de longitud lleno de agua hasta una altura, que podemos modificar subiendo o bajando un depósito D .

La longitud de aire del tubo, y , la medimos con una regla paralela al tubo. Con el altavoz funcionando a 700 Hz, vamos bajando el nivel del agua y observamos que, cuando $y_1 = 20,3$ cm, hay resonancia. Si continuamos bajando, la posición siguiente del nivel para el cual hay resonancia es $y_2 = 44,6$ cm.

a) ¿Cuánto vale la velocidad del sonido en el aire del interior del tubo?

b) Con una frecuencia de 1000 Hz y con el agua llenando totalmente el tubo, vamos bajando el nivel hasta llegar a la primera posición de resonancia $y_1 = 10,0$ cm. Halla todas las demás posiciones para las cuales resonará el tubo.

c) Si, después, se deja el tubo con una columna de aire fija, $y = 50$ cm, ¿a qué frecuencias resonará?

Solución: a) $v = 340,2$ m/s; b) $y_2 = 27,0$ cm; $y_3 = 44,0$ cm; $y_4 = 61,0$ cm; $y_5 = 78,0$ cm; $y_6 = 95,0$ cm; c) 510 Hz; 851 Hz; 1191 Hz

Problema 8.5.13. Disponemos de un tubo cilíndrico abierto por los dos extremos que excitamos con ondas sonoras de frecuencia variable. Se observan dos frecuencias de resonancia consecutivas: 360 Hz y 540 Hz.

a) Si cerramos uno de los dos extremos y lo excitamos de nuevo: ¿cuales son las tres primeras frecuencias a las cuales resonará ahora?

b) Si el tubo tiene 0,950 m, ¿cuál es la temperatura del aire interior?

Solución: a) 90 Hz, 270 Hz; 450 Hz; b) 18,2° C

Problema 8.6.2. Un día en que la temperatura es de 35°C, el conductor de un tren exprés, que circula a 110 km/h, ve más adelante un tren de cercanías que va por la misma vía. Para determinar la velocidad a la cual va el de cercanías, hace sonar su silbato de 1000 Hz y escucha el eco de 1060 Hz de frecuencia.

a) ¿A qué velocidad se propaga el sonido?

b) Suponiendo que no hace viento, ¿a qué velocidad se desplaza el tren de cercanías?

Solución: a) 352 m/s; b) 73,3 km/h

Problema 8.6.3. En un día que no hace viento y la velocidad del sonido es de 340 m/s, una sirena que emite un sonido de 1000 Hz se mueve alejándose de un observador en reposo y dirigiéndose hacia un acantilado a una velocidad de 36,0 km/h.

¿Cuánto vale la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas sonoras —la directa y la reflejada por el acantilado— que llegarán al observador? ¿A qué velocidad tendría que ir la sirena para que se pudieran oír latidos de 8,0 Hz?

Solución: 58,9 Hz; 4,90 km/h

Problema 8.6.4. Un detector de movimiento de un objeto podría consistir en una fuente de ondas armónicas de frecuencia f_o y un detector de frecuencia de los latidos f_b que se obtienen al superponer las ondas directas de la fuente con las ondas reflejadas por el objeto. Si el objeto no se desplaza con respecto a la fuente, $f_b = 0$. Si se acerca a la fuente o se aleja a una velocidad v , mucho más pequeña que la



velocidad c de las ondas en el medio, demuestra que la frecuencia de los latidos es $f_b = 2f_0 \frac{v}{c}$.

Problema 8.6.5. Un avión supersónico que se desplaza horizontalmente a Mach = 1,50,¹ pasa por la vertical de un observador que se encuentra al aire libre un día en que la velocidad media del sonido es 335 m/s. Si este observador ha debido esperar 3,20 s para oír el avión desde que lo ve pasar por encima, ¿a qué altura está volando el avión?

Solución: 1438 m

¹ Mach = M es la relación entre la velocidad de un objeto, v , y la velocidad de las ondas en el medio c : $M = \frac{v}{c}$





Soluciones a las cuestiones

Capítulo 1

1.7.1: c, 1.7.2: e.

Capítulo 2

2.1.1: b, 2.1.2: a, 2.1.3: e.

2.2.1: d, 2.2.2: c, 2.2.3: e, 2.2.4: c.

2.3.1: e.

2.4.1: e, 2.4.2: a, 2.4.3: a, 2.4.4: e, 2.4.5: b, 2.4.6: b, 2.4.7: d, 2.4.8: c, 2.4.9: c.

2.5.1: d, 2.5.2: b, 2.5.3: a, 2.5.4: d, 2.5.5: c.

Capítulo 3

3.2.1: c, 3.2.2: b, 3.2.3: a, 3.2.4: c, 3.2.5: a, 3.2.6: b, 3.2.7: c, 3.2.8: e, 3.2.9: e, 3.2.10: c.

3.3.1: d.

3.4.1: b, 3.4.2: d, 3.4.3: c.

Capítulo 4

4.3.1: c, 4.3.2: b, 4.3.3: c, 4.3.4: a, 4.3.5: a, 4.3.6: d.

4.5.1: a, 4.5.2: a, 4.5.3: c, 4.5.4: c, 4.5.5: a, 4.5.6: c, 4.5.7: e, 4.5.8: a, 4.5.9: e,
4.5.10: b, 4.5.11: a, 4.5.12: c, 4.5.13: c, 4.5.14: b, 4.5.15: e, 4.5.16: b, 4.5.17: e.

4.7.1: b, 4.7.2: e, 4.7.3: b.

Capítulo 5

5.2.1: e, 5.2.2: d, 5.2.3: c, 5.2.4: a, 5.2.5: c, 5.2.6: c, 5.2.7: d, 5.2.8: c, 5.2.9: c,
5.2.10: c, 5.2.11: b, 5.2.12: e, 5.2.13: e, 5.2.14: e, 5.2.15: b, 5.2.16: e.

5.3.1: a, 5.3.2: d, 5.3.3: a, 5.3.4: a, 5.3.5: d, 5.3.6: d.

Capítulo 6

6.2.1: b, 6.2.2: c, 6.2.3: d, 6.2.4: d, 6.2.5: a.

6.3.1: a, 6.3.2: e, 6.3.3: c.

6.4.1: c, 6.4.2: b, 6.4.3: d, 6.4.4: b, 6.4.5: d, 6.4.6: c, 6.4.7: a, 6.4.8: b, 6.4.9: d.





Tablas

Relaciones trigonométricas

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin(0) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin(\pi) = 0,$
$\cos(0) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos(\pi) = -1$

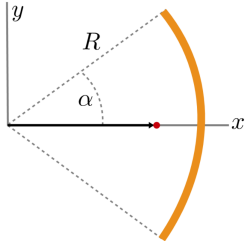
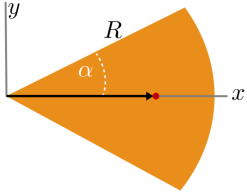
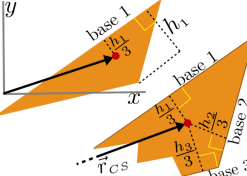
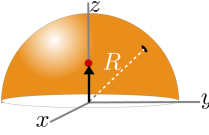
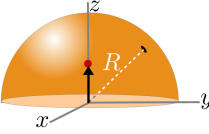
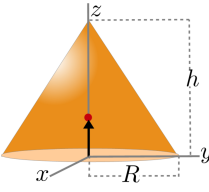
Derivadas

Función: $F(x)$	Derivada: $\frac{dF(x)}{dx}$
$a f(x) + g(x)$	$a \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
$f(x)g(x)$	$\frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$
$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)g(x)^{-1}$	$\frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$
$f(x)^n$	$n f(x)^{n-1} \frac{df(x)}{dx}$
$f(g(x))$	$\frac{df(g)}{dg}(x) \frac{dg(x)}{dx}$
$f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x)$ es la función inversa de f ; por ejemplo, $y = \arcsin x$ es inversa de $x = \sin y$	$\left. \frac{1}{\frac{df(y)}{dy}} \right _{y=f^{-1}(x)}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_{(a)} x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Integrales




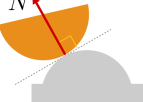

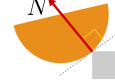

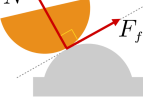

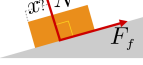


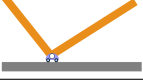
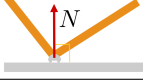
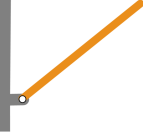
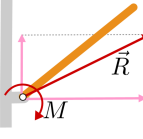
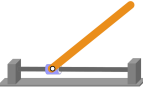
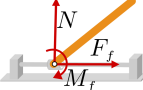
Función: $F(x)$	Integral: $\int F(x) dx$
$a f(x) + g(x)$	$a \int f(x) dx + \int g(x) dx$
x^n con $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$
$\ln x$	$-x + x \ln x$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b} \ln \frac{x-a}{x-b}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

Centros de masa

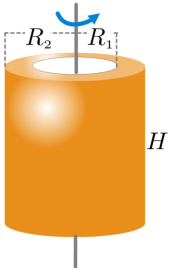
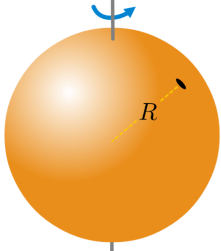
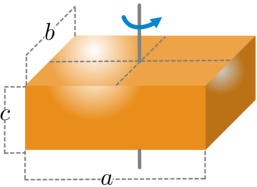
Arco de circunferencia		$L = 2R\alpha$ $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right)$
Sector de círculo		$S = R^2\alpha$ $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, 0 \right)$
Triángulo arbitrario		$S = \frac{1}{2}bh$ <p>La distancia de una base i al CS es $\frac{1}{3}$ de la correspondiente altura h_i</p>
Caparazón semiesférico (sin la tapa inferior)		$S = 2\pi R^2$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{R}{2} \right)$
Semiesfera (maciza)		$V = \frac{2\pi R^3}{3}$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{3R}{8} \right)$
Cono (macizo)		$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{h}{4} \right)$

\vec{r}_{CM} de cuerpos homogéneos simples con respecto a los sistemas de referencia indicados

Reacciones de los soportes

<p>Cable o cuerda tensa. La fuerza que hace el cable va en la dirección del cable. El sentido siempre es del lado del cable o la fuerza se anula (cable no tenso).</p>		
<p>Contacto regular liso. Reacción N normal al plano tangente a la superficie regular en el punto de contacto.</p>		
<p>Contacto regular/singular liso. Reacción N normal al plano tangente a la superficie regular en el punto de contacto.</p>		
<p>Contactos rugosos. A la reacción normal N, hay que añadir una fuerza de fricción F_f. En caso de que los cuerpos no se muevan, $F_f \leq \mu N$, donde μ es el coeficiente de fricción. Al máximo valor de F_f, se llega cuando hay inminencia de movimiento.</p>		
<p>Contactos extensos. Reacción N normal a la superficie de contacto. No tiene por qué pasar por el centro de masa.</p>		
<p>Contactos extensos (vuelco inminente). Reacción N normal a la superficie del soporte aplicada en el punto donde se concentra el contacto.</p>		
<p>Carretes (sin fricción). Es el mismo caso que los contactos lisos.</p>		
<p>Articulación. Reacción \vec{R}, en general desconocida, que en 2D son dos componentes. Si hay fricción (entre las superficies en contacto en la zona de la articulación) o no hay articulación sino empotramiento, hay que añadir un par de momento M. Su valor máximo dependerá de la naturaleza del contacto.</p>		
<p>Guías. Reacción normal a la guía. Si el contacto es rugoso, debemos añadir la fricción F_f y puede que también un par de fricción M_f.</p>		

Momentos de inercia

Cilindro		<p>grosso: $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ disco: $H = 0$ macizo: $R_1 = 0$ delgado: $R_1 = R_2$</p>
Esfera		<p>maciza: $I = \frac{2}{5}mR^2$ vacía: $I = \frac{2}{3}mR^2$</p>
Ortoedro		<p>ortopedro / rectángulo: $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ barra: $a = 0$ i $c = 0$</p>

I de cuerpos homogéneos simples con respecto a los ejes indicados

Constantes

Nombre de la constante:	Valor:
Número π	3,1415926536
Número $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2,718281285
Constante de Coulomb, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8,987551788 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$
Carga elemental, e	$1,602177 \times 10^{-19} \text{C}$
Número de Avogadro, N_A	$6,022137 \times 10^{23}$
Constante de Boltzman, k	$1,380658 \times 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Constante de los gases ideales, $R = N_A k$	$8,31451 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$
Constante de gravitación, G	$6,6726 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
Masa del electrón, m_e	$9,109390 \times 10^{-31} \text{kg}$
Masa del protón, m_p	$1,672622 \times 10^{-27} \text{kg}$
Masa del neutrón, m_n	$1,674929 \times 10^{-27} \text{kg}$
Velocidad de la luz, c	$2,99792458 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g	Valor estándar: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. En Barcelona: $9,804 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Radio de la Tierra, R_T	6370 km
Masa de la Tierra, M_T	$5,98 \times 10^{24} \text{kg}$