EDICIONS VIRTUALS

Joan Rodríguez Jordana

Ajust d'observacions

El mètode dels mínims quadrats amb aplicacions a la topografia

EDICIONS UPC

Joan Rodríguez Jordana

Ajust d’observacions
El mètode dels mínims quadrats amb aplicacions a la topografia

Primera edició: maig de 1999

Aquesta publicació s'acull a la política de normalització lingüística
i ha comptat amb la col·laboració del Departament de Cultura i
de la Direcció General d'Universitats, de la Generalitat de Catalunya.

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Edicions UPC

Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel. 93 401 68 83 Fax 93 401 58 85
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
e-mail: edupc@sg.upc.es

Producció: CBS – Impressió digital
Pintor Fortuny 151, 08224 Terrassa (Barcelona)

Dipòsit legal: B-27704-99
ISBN: 84-8301-318-5

Introducció

El tractament de les observacions topogràfiques destinades a càlculs altimètrics o de coordenades mitjançant procediments com les triangulacions o els itineraris, ha estat, tradicionalment, objecte d'estudi. Els manuals clàssics de topografia estan dedicats, en gran part, a descriure sistemes, més o menys enginyosos, per analitzar, compensar i corregir els errors en les observacions.

Aquests mètodes, si bé tenen el mèrit de treure conseqüències de l'experiència i articular-les en forma de protocols sistematitzats, no són, en general, rigorosos en l'anàlisi de la transmissió de l'error de les observacions als resultats calculats a partir d'aquestes observacions.

En els nostres dies no hi ha dubte que l'enfocament adequat consisteix a considerar les observacions com variables aleatòries i a aplicar l'anàlisi estadística a la propagació de l'error. Els mètodes basats en el criteri dels mínims quadrats permeten articular una teoria coherent en torn d'aquest problema, i la prevenció que han suscitat en una altra època, a causa que es tradueixen en força operacions matricials, actualment ha desaparegut gràcies als moderns sistemes de càlcul automatitzat.

Aquest manual és el fruit de l'experiència docent en els estudis d'Enginyeria Tècnica en Topografia de l'Escola Universitària Politècnica de Barcelona, on la formació matemàtica té dues vessants. Una de matemàtiques generals, on s'introdueixen els temes imprescindibles d'àlgebra i càlcul, pràcticament comuns a qualsevol enginyeria, i una altra, on s'emmarca l'ajust d'observacions, dedicada a la introducció de conceptes matemàtics propis de la topografia la geodèsia, la cartografia o la fotogrametria. En aquest sentit, el temari està dissenyat d'acord amb la utilitat específica en aquestes matèries.

A causa de l'escassetat de literatura que tracti l'ajust d'observacions per mètodes de mínims quadrats aplicats a la topografia en llengua castellana i, molt menys en llengua catalana, i que les referències més corrents en aquest àmbit no són gaire assequibles, s'han anat elaborant uns apunts, cada any més complets, que han desembocat en el present manual. Està pensat com la continuació natural d'un curs (imprescindible) de fonaments d'estadística per a estudiants de matèries relacionades amb la topografia i, en aquest sentit, pot ser d'utilitat per a estudiants de qualsevol enginyeria que inclogui aquestes matèries en els seus programes.

L'enfocament que s'ha donat és el de la inclusió seqüencial de conceptes seguint la metodologia de la majoria de tractats en la matèria com, per exemple, [LAU83] i [LIN63]. El capítol primer d'observacions directes serveix per fer la connexió entre els mètodes estadístics i el mètode dels mínims quadrats, i per introduir els conceptes d'observació ponderada i de matriu de covariància. En el capítol segon, dedicat a observacions indirectes, s'estudia l'aplicació del mètode dels mínims quadrats a problemes com la compensació d'anivellacions, el càlcul de coordenades mitjançant triangulacions o l'estimació dels paràmetres d'una transformació de semblança. La distinció, aparentment innecessària, entre observacions ponderades i equiprobables és útil per il·lustrar diferents formes d'incloure pesos en les equacions. El capítol tercer està dedicat a l'ajust d'observacions mitjançant equacions de condició i té com a principal aplicació, en l'àmbit de la topografia, la compensació d'itineraris. En aquest cas ja no es fa la distinció entre observacions ponderades i equiprobables.

En tots tres capítols s'ha procurat mantenir l'equilibri entre el rigor formal propi d'un text de matemàtiques i el punt de vista pràctic, enfocat a les aplicacions, d'un text de topografia, ja que aquest manual no pretén ser ni una cosa ni l'altra, però sí recollir certes característiques d'ambdues.

En l'aspecte matemàtic, la finalitat principal és la d'explicar el significat analític (de mínim local condicionat o no), probabilístic (de màxima versemblança) i estadístic (d'estimació paramètrica) del criteri dels mínims quadrats, així com la utilitat de l'anàlisi estadística per a l'estudi de la propagació de l'error. D'altra banda, des del punt de vista formal, s'ha posat especial interès que l'exposició sigui clara i les idees que s'introdueixen siguin fàcilment identificables en forma de definicions o enunciats de proposicions, a banda dels comentaris en forma d'observacions. Quant a les demostracions, només es fan aquelles que són senzilles i no suposen conceptes matemàtics allunyats de l'àmbit dels temes tractats. En altres casos se substitueixen per justificacions més o menys intuïtives o s'obvien perquè es tracta d'enunciats prou coneguts de l'estadística o perquè, en algun punt anterior del llibre, s'ha demostrat un resultat anàleg.

En l'aspecte pràctic, s'ha posat especial èmfasi en la utilitat dels conceptes matemàtics introduïts, i en el fet que cada una de les possibles aplicacions estigui il·lustrada amb exemples. En un material docent de les característiques d'aquest manual, per tal de no perdre credibilitat en les aplicacions concretes, és important que, tant com sigui possible, les dades provinguin de casos reals. Per això, en general estan tretes de llibres i, en aquests casos, es dóna la referència. Els càlculs i algunes representacions gràfiques que surten en aquests exemples, encara que siguin acadèmics, serien impossibles de fer sense la utilització d'algun assistent informàtic. S'ha escollit MAPLE V perquè, a més del seu alt nivell de prestacions, és el programa per al qual la UPC té llicència de Campus i, per tant, està disponible en la majoria de sales de càlcul a què tenen accés els estudiants d'aquesta Universitat. S'han mantingut les sentències del llenguatge MAPLE, evidenciant-les mitjançant un canvi de format de lletra, per incentivar els estudiants que utilitzin aquests tipus de programes, sense els quals difícilment podrien practicar amb els exercicis proposats.

Índex

1 Observacions directes

1.1 Introducció

Sigui μ el valor d'una magnitud física desconeguda que volem mesurar. Per exemple, una distància. Suposem que fem n mesures $u_1, u_2, ..., u_n$ d'aquesta quantitat. Evidentment, si no es vol una bona precisió i s'arrodoneixen les mesures a una unitat gran, com per exemple el metre, els n valors resultaran iguals. Però si busquem una bona precisió i arrodonim al mil·límetre obtindrem, en general, n valors diferents.

Això és degut a que tota observació està sotmesa a error. Encara que s'hagin eliminat els errors sistemàtics deguts, per exemple, a la temperatura ambient o a les característiques de l'aparell utilitzat, sempre hi ha multitud de factors imponderables que contribueixen a l'existència de fluctuacions estadístiques en el resultat de la mesura i que fan que dues mesures diferents de la mateixa magnitud, fetes per la mateixa persona en les mateixes circumstàncies, donin resultats diferents.

Hem de distingir, doncs, entre la magnitud *observable*, el *vertader valor* de la qual, μ, és intrínsecament desconegut, i les *observacions* u_i, que són conegudes però que només són aproximacions puntuals del vertader valor μ que volem mesurar.

1.2 Mesures directes d'igual precisió

Siguin n mesures *independents* $u_1, u_2, ..., u_n$ d'una certa magnitud física μ. Des del punt de vista estadístic, si totes les mesures tenen igual precisió, es pot considerar una variable aleatòria U normal de mitjana μ i desviació tipus σ, $U \sim N(\mu, \sigma)$, consistent en el conjunt de les infinites mesures possibles de la magnitud de *vertader valor* μ, de la qual el conjunt d'observacions $u_1, u_2, ..., u_n$ és una mostra de grandària n. Però també es poden considerar realitzacions de n variables aleatòries independents $U_1, U_2, ..., U_n$ normals, totes amb mitjana μ i desviació típica σ, $U_i \sim N(\mu, \sigma)$, $i = 1, 2, ..., n$, amb funció de densitat

$$f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.1}$$

respectivament. Es tracta d'establir un criteri per estimar el paràmetre μ a partir de la mostra $u_1, u_2, ..., u_n$. Com que les n variables $U_1, U_2, ..., U_n$ són independents, la funció de densitat conjunta del vector aleatori normal (U_1, U_2, ..., U_n) és el producte de funcions de densitat

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} f(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\mu)^2} \tag{1.2}$$

Aquesta funció també rep el nom de *funció de versemblança* de la mostra i depèn dels dos paràmetres μ i σ.

1.2.1 Mínims quadrats i màxima versemblança

Un criteri estadístic d'estimació paramètrica és l'anomenat *criteri de màxima versemblança*, que consisteix, donada una mostra u_1, u_2, ..., u_n de n mesures independents, a prendre, com a estimadors dels paràmetres, aquells valors que facin màxima la funció de versemblança.

En el nostre cas és immediat que, per a qualsevol valor σ de la desviació tipus, el màxim de la funció de versemblança correspondrà a aquell valor del paràmetre μ que faci mínim el sumatori de l'exponent:

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i - \mu)^2 \tag{1.3}$$

Veiem, doncs, com el criteri de màxima versemblança per a l'estimació de μ coincideix amb l'anomenat *criteri dels mínims quadrats*, que consisteix, donada una mostra u_1, u_2, ..., u_n de n mesures independents, a prendre, com a estimador del paràmetre μ, aquell valor m que faci mínima la suma dels quadrats de les desviacions respecte de les observacions. Aquest criteri ens indica, com veurem en la següent proposició, el camí per trobar l'estimador corresponent.

Proposició 1

L'estimador mínimoquadràtic d'una magnitud μ, de la qual es disposa d'una mostra u_1, u_2, ..., u_n de n mesures directes independents i d'igual precisió, és la mitjana mostral:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} \tag{1.4}$$

Demostració

Considerem la suma dels quadrats de les desviacions de les observacions u_i respecte d'un cert estimador e com una funció de e:

$$f(e) = \sum_{i=1}^{n}(u_i - e)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2e\sum_{i=1}^{n} u_i + ne^2$$

Anul·lant la derivada respecte de e,

$$f'(e) = -2\sum_{i=1}^{n} u_i + 2ne = 0 \Rightarrow e = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} = m$$

És immediat que la derivada segona $f''(e) = 2n$ és positiva i que, per tant, es tracta d'un mínim.

Observació

Hem vist que l'estimació d'una magnitud física, a partir d'una mostra d'observacions directes, pel criteri dels mínims quadrats, ha conduït a una operació comuna en l'estadística inductiva: estimar una mitjana poblacional μ per una mitjana mostral m. I per l'estadística sabem que aquest estimador és no esbiaixat i consistent, com estableix la proposició següent:

Proposició 2

L'esperança matemàtica de la mitjana mostral és la mitjana poblacional

$$E(m) = \mu \tag{1.5}$$

i la seva variància és la poblacional dividida per la grandària de la mostra

$$VAR(m) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1.6}$$

1.2.2 Error en l'estimació per mínims quadrats

Definició 1 *Errors absoluts i residus*

Anomenarem *errors absoluts* les diferències entre la magnitud μ i les seves observacions u_i:

$$\varepsilon_i = \mu - u_i$$

Evidentment, atès que el vertader valor μ de la magnitud que volem calcular es manté sempre desconegut, les correccions als errors absoluts no es podran calcular mai. Per això definim les *correccions aparents* o *residus* v_i com les diferències entre l'estimador m i les observacions:

$$v_i = m - u_i \tag{1.7}$$

Es tracta, doncs, de les correccions que cal fer a les observacions perquè donin el valor estimat m del vertader valor μ:

$$u_i + v_i = m$$

Observació

De la seva definició es dedueix que la suma dels residus és nul·la:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \tag{1.8}$$

Efectivament,

$$\sum_{i=1}^{n}(m-u_i) = nm - \sum_{i=1}^{n} u_i = 0$$

Aquest resultat és intuïtivament immediat, ja que si la distribució de les observacions u_i està centrada a m, en fer la correcció $v_i = m - u_i$ la distribució corresponent estarà centrada a l'origen. Dit d'una altra manera, la mitjana de les correccions és zero. D'altra banda, això ens indica que el sistema de n residus té n - 1 graus de llibertat, ja que estan sotmesos a la lligadura (1.8).

Per tenir una mesura de la desviació de les observacions respecte de l'estimador m, podem utilitzar la suma dels valors absoluts $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$ o bé la suma dels quadrats $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$.

Definició 2 *Error estadístic associat a una operació de mesura*

Es defineix l'*error estadístic* associat a una mesura u_i de la quantitat μ com la desviació tipus σ de la variable aleatòria U que representa les mesures del seu valor. Aquesta magnitud també és desconeguda i l'estimarem per la desviació tipus mostral corregida

$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \tag{1.9}$$

.

Observació

Com que, en aquest context, farem servir habitualment la desviació tipus mostral corregida S_{n-1} en comptes de la desviació tipus mostral $S_n = \sqrt{((n-1)/n)}\ S_{n-1}$, anomenarem desviació tipus mostral, sense més especificacions, la desviació tipus mostral corregida i la designarem S.

Es defineix l'*error estadístic* associat a l'estimador mitjana mostral m com la seva desviació tipus

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{n}$$

que, al seu torn, estimarem per

$$S_m = S / \sqrt{n} \tag{1.10}$$

Per l'estadística sabem que S és un estimador no esbiaixat de σ:

Proposició 3

L'esperança de la desviació tipus mostral S és la desviació tipus poblacional σ:

$$E(S) = \sigma \tag{1.11}$$

Observació

Cal no confondre aquest error estadístic S, que en molts contextos s'anomena "*error mitjà quadràtic*", amb l'error absolut $\varepsilon = \mu - u_i$ comès en mesurar la magnitud μ. D'altra banda, atès que el seu quadrat està relacionat amb la suma de residus al quadrat segons

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}$$

o, equivalentment,

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \tag{1.2}$$

la magnitud m que fa mínima la suma dels quadrats dels residus també fa mínima la variància S^2 o, el que és el mateix, fa mínim l'error S.

Hi ha una infinitat de conjunts de residus v_i que porten a diferents estimadors:

$$e_i = u_i + v_i$$

Hem vist que el criteri escollit per triar els residus adients és que la quantitat

$$v^T v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

sigui mínima.

Exemple 1 *Mesures directes d'igual precisió*

Considerem els següents resultats en la mesura d'un angle θ:

Observació u_i	Valor mesurat	Mitjana m	Residu v_i	v^2_i	Error S	Error $S/\sqrt{n}$
u_1	50º 15' 30",3	50º 15' 31",77	1",47	2",16	2",05	0",65
u_2	50º 15' 33",5		-1",73	2",99		
u_3	50º 15' 35",1		-3",33	11",01		
u_4	50º 15' 28",6		3",17	10",05		
u_5	50º 15' 32",4		-0",63	0",40		
u_6	50º 15' 34",2		-2",43	5",90		
u_7	50º 15' 29",7		2",07	4",28		
u_8	50º 15' 31",8		-0",03	0",00		
u_9	50º 15' 30",9		0",87	0",76		
u_{10}	50º 15' 31",2		0",57	0",32		
			0",00	37",87		

Taula 1 Mesures angulars

Si, com a estimador del *vertader valor* de l'angle, prenem una mesura qualsevol, θ = 50º 15' 29",7, l'error estadístic corresponent és S = 2", mentre que si prenem la mitjana θ = 50º 15' 31",8, aleshores l'error estadístic corresponent és $S/\sqrt{n}$ = 0",6. Amb els càlculs fets podem dir, doncs, que l'angle mesurat val θ = 50º 15' 31",8 ± 0",6. Però quina probabilitat hi ha que el *vertader valor* de l'angle estigui dins d'aquest interval, és a dir, que 50º 15' 31",2 < θ < 50º 15' 32",4?

1.2.3 Estimació per intervals

Fins ara hem fet una estimació puntual de la mitjana poblacional μ d'una variable aleatòria U per la mitjana mostral m, i de la desviació tipus poblacional σ per la desviació tipus mostral S. Podem fer una estimació per intervals de confiança d'aquests paràmetres poblacionals tenint en comte que U és $N(\mu,\sigma)$ i els resultats estadístics enunciats en la proposició següent:

Proposició 4

La variable aleatòria

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - m)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}$$

segueix una llei χ^2 amb n-1 graus de llibertat, mentre que la variable aleatòria

$$t = \frac{m-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

segueix una llei t de Student amb n-1 graus de llibertat.

a) Intervals de confiança per a la mitjana poblacional μ o *vertader valor* de la magnitud mesurada

Amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α

$$m - t_{n-1,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < m + t_{n-1,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

o bé

$$\mu = m \pm t_{n-1,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{1.13}$$

on $t_{n-1,\alpha}$ és el valor de la variable t de Student amb n-1 graus de llibertat tal que

$$P(-t_{n-1,\alpha} < t < t_{n-1,\alpha}) = 1 - \alpha$$

Si n és prou gran (a la pràctica s'acostuma a considerar $n \geq 30$), aleshores la variable t de Student amb n-1 graus de llibertat es confon amb una normal tipificada i la variable aleatòria

$$Z = \frac{m - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

segueix una llei normal estàndard $N(0,1)$. Per tant, amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α :

$$m - Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < m + Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

o bé

$$\mu = m \pm Z_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{1.14}$$

on Z_α és el valor de la variable Z $N(0,1)$ tal que

$$P(- Z_\alpha < Z < Z_\alpha) = 1 - \alpha$$

b) Intervals de confiança per a la desviació tipus poblacional σ o *vertader valor* de l'error

Amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α:

$$\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_a^2}} \tag{1.15}$$

on χ^2_a i χ^2_b són els valors de la variable χ^2 , amb n-1 graus de llibertat, tals que

$$P(\chi^2 > \chi^2_b) = \alpha/2 \;\; \text{i} \;\; P(\chi^2 > \chi^2_a) = 1 - \alpha/2$$

Exemple 2 *Estimació per intervals en mesures directes d'igual precisió*

a) Fem una estimació per intervals de l'angle calculat a l'exemple 1 i del seu error, amb un nivell de significació de l'1%, o nivell de confiança del 99%. Per establir els límits de confiança corresponents, hem de buscar els següents valors:

$t_{9,0.01}$ = valor de la variable t de Student amb 9 graus de llibertat que deixa l'1% de l'àrea sota la funció de densitat en les dues cues plegades = 3,25

$\chi^2_{9,a}$ = valor de la variable χ^2 amb 9 graus de llibertat que deixa a la dreta el 99,5% de l'àrea sota la funció de densitat = 1,73

$\chi^2_{9,b}$ = valor de la variable χ^2 amb 9 graus de llibertat que deixa a la dreta el 0,5% de l'àrea sota la funció de densitat = 23,6

L'interval del 99% de confiança per al vertader valor de l'angle és

$$\mu = m \pm t_{9,0,01}\frac{S}{\sqrt{n}} = 50º\ 15'\ 31'',8 \pm 2'',1$$

Observació

Quan, a l'exemple 1, hem fet l'estimació puntual del vertader valor de l'angle per a m i de l'error per a $S/\sqrt{n}$ i hem escrit

$$\mu = m \pm \frac{S}{\sqrt{n}} = 50º\ 15'\ 31'',8 \pm 0'',6$$

ens hem preguntat quina probabilitat hi ha que el *vertader valor* de l'angle estigui entre 50º 15' 31",2 i 50º 15' 32",4. Observem que, en escriure *vertader valor* = *mitjana* ± *error*, estem establint l'interval de confiança del tipus (1.13) corresponent a $t_{9,\alpha} = 1$. Consultant les taules de la t de Student amb 9 graus de llibertat, es troba que la probabilitat que $-1 < t_9 < 1$ és del 65,66%. Aquest és el corresponent nivell de confiança.

L'interval del 99% de confiança per al vertader valor de l'error és

$$\frac{\sqrt{9}S}{\sqrt{\chi^2_{9,b}}} < \sigma < \frac{\sqrt{9}S}{\sqrt{\chi^2_{9,a}}}$$

Fent els càlculs, dóna

$$1'',3 < \sigma < 4'',7$$

b) Es tracta d'estimar, amb un nivell de significació del 5%, o nivell de confiança del 95%, l'alçada H i la seva desviació tipus σ_H d'una estació que, mesurada des de tres punts diferents, ha donat els resultats següents:

$$h_1 = 495{,}751 \text{ m}$$
$$h_2 = 495{,}714 \text{ m}$$
$$h_3 = 495{,}701 \text{ m}$$

Els estimadors puntuals de les magnituds H i σ_H són, respectivament,

$$m = \frac{\sum_1^3 h_i}{3} = \frac{495{,}751 + 495{,}714 + 495{,}701}{3} = 495{,}722 \text{ m}$$

i

$$S = \sqrt{\frac{\sum_1^3 (h_i - m)^2}{2}} = \sqrt{\frac{0{,}029^2 + 0{,}008^2 + 0{,}021^2}{2}} \cong 26 \text{ mm}$$

Per establir els límits de confiança del 95% hem de buscar els valors següents:

$t_{2,0,05}$ = valor de la variable t de Student amb 2 graus de llibertat que deixa el 5% de l'àrea sota la funció de densitat en les dues cues plegades = 4,3027.

$\chi^2_{2,a}$ = valor de la variable χ^2 amb 2 graus de llibertat que deixa a la dreta el 97,5% de l'àrea sota la funció de densitat = 0,0507.

$\chi^2_{2,b}$ = valor de la variable χ^2 amb 2 graus de llibertat que deixa a la dreta el 2,5% de l'àrea sota la funció de densitat = 7,3790.

Sabem que

$$m - t_{2,0,05}\frac{S}{\sqrt{3}} < H < m + t_{2,0,05}\frac{S}{\sqrt{3}}$$

i, substituint, obtenim

$$495{,}658 \text{ m} < H < 495{,}786 \text{ m}$$

amb un nivell de confiança del 95%. D'altra banda, per a la desviació tipus tenim l'interval

$$\frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{\chi^2_{2,b}}} < \sigma < \frac{\sqrt{2}S}{\sqrt{\chi^2_{2,a}}}$$

i, substituint, obtenim

$$14 \text{ mm} < \sigma_H < 163 \text{ mm}$$

amb un nivell de confiança del 95%.

1.3 Detecció d'errors grollers

Suposem que, en la mostra de n mesures *independents* $u_1, u_2, ..., u_n$ d'una certa població $N(\mu, \sigma)$, n'hi ha una, u_i, que destaca netament de les altres, ja sigui per sobre o per sota. Es tracta de detectar si aquest valor, aparentment anòmal, és una realització de la variable $N(\mu, \sigma)$ i, per tant, l'haurem d'acceptar com a producte de l'atzar que permet, encara que amb probabilitat petita, valors allunyats de la mitjana, o si, al contrari, es tracta d'una mesura afectada d'algun error groller. Per això cal tenir en compte el resultat estadístic següent:

Proposició 5

Donada una mostra de n mesures *independents* $u_1, u_2, ..., u_n$ d'una certa variable $U \sim N(\mu, \sigma)$, amb mitjana mostral m i desviació tipus mostral S, aleshores la variable

$$t = \frac{\sqrt{n-2}\,r}{\sqrt{n-1-r^2}} \tag{1.16}$$

on

$$r = \frac{|u-m|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}S}$$

es comporta com una variable t de Student amb n-2 graus de llibertat.

Basant-nos en aquest resultat, el mètode per detectar mesures afectades d'errors grollers consistirà en el procediment descrit pels passos següents:

Primer fixarem un nivell de significació α.

Segon, calcularem el valor t_α de la variable t de Student amb n-2 graus de llibertat tal que

$$P(t < t_\alpha) = 1 - \alpha$$

Tercer, decidirem que la mesura u_i està afectada d'errors grollers si $t_i > t_\alpha$, és a dir, si

$$\frac{\sqrt{n-2r_i}}{\sqrt{n-1-r_i^2}} > t_\alpha$$

on

$$r_i = \frac{u_i - m}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}S}$$

i, aleshores, l'eliminarem de la mostra.

Quart, recalcularem la mitjana i la desviació tipus mostrals un cop eliminada l'observació aberrant, i repetirem el procés en cas que hi hagi, encara, alguna observació que destaqui netament de la resta de la mostra.

Exemple 3 [LIN63] *Detecció d'errors grollers*

Considerem les següents 20 mesures d'una subdivisió d'escala:

3,68, 3,11, 4,76, 2,75, 4,15, 5,08, 2,95, 11,5, 3,78, 4,49
2,81, 4,65, 3,27, 4,08, 4,51, 4,43, 3,43, 3,26, 2,48, 4,84

La mitjana mostral és

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} = \frac{84{,}01}{20} = 4{,}2$$

i la desviació tipus mostral

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}}S = S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - m)^2}{n}} = 1{,}841$$

El valor més allunyat de la mitjana és 11,5, que està per sobre.

1. Fixem el nivell de significació $\alpha = 0{,}05$.

2. El valor de la variable t de Student amb 18 graus de llibertat tal que $P(t < t_\alpha) = 0{,}95$ és $t_\alpha = 1{,}734$.

3. Calculem els paràmetres

$$r_i = \frac{u_i - m}{S_n} = 3{,}965$$

i

$$t_i = \frac{\sqrt{n-2}\,r_i}{\sqrt{n-1-r_i^2}} = 1{,}919 > 1{,}734$$

Podem considerar, doncs, que es tracta d'una mesura afectada d'errors grollers. La traurem de la mostra. Repetim el procés amb les 19 mesures restants:

3,68, 3,11, 4,76, 2,75, 4,15, 5,08, 2,95, 3,78, 4,49
2,81, 4,65, 3,27, 4,08, 4,51, 4,43, 3,43, 3,26, 2,48, 4,84

La mitjana mostral és

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} = 3{,}816$$

i la desviació tipus mostral

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (u_i - m)^2}{n-1}} = 0{,}784$$

El valor més allunyat de la mitjana és 2,48, que està per sota. Encara que no destaca netament de la resta de la mostra, aplicarem igualment el mètode de detecció d'errors grollers per veure un exemple d'observació no rebutjable.

1. Fixem el nivell de significació $\alpha = 0{,}05$.

2. El valor de la variable t de Student amb 17 graus de llibertat tal que $P(t < t_\alpha) = 0{,}95$ és $t_\alpha = 1{,}740$.

3. Calculem els paràmetres $r_i = 1{,}704$ i $t_i = 1{,}015 < 1{,}740$.

1.4 Observacions ponderades

En l'apartat anterior, en considerar n mesures d'una magnitud μ, hem suposat que totes estaven fetes en les mateixes circumstàncies. Això ens permetia tractar-les com n observacions *independents* u_1, u_2, ..., u_n d'una variable aleatòria $U \sim N(\mu,\sigma)$ o, equivalentment, com n observacions de n variables aleatòries *independents* U_i , i = 1, 2, ..., n, totes seguint la mateixa llei de distribució de probabilitat que la variable poblacional: $N(\mu,\sigma)$. En aquests casos es pot dir que totes les observacions tenen el mateix pes (=1) i indicar que, donades dues qualssevol, no podem dir que l'una sigui més fiable que l'altra.

Tanmateix, pot esdevenir-se que les n mesures $u_1, u_2, ..., u_n$ d'una magnitud μ es facin en circumstàncies diferents, per persones diferents i/o amb aparells diferents. En aquest cas, hem de suposar que es tracta de n observacions de n variables aleatòries *independents* U_i seguint lleis de distribució de probabilitat $N(\mu,\sigma_i)$, i = 1, 2, ..., n, respectivament, totes amb la mateixa mitjana μ però amb desviacions tipus diferents σ_i . Evidentment, són més fiables les mesures amb desviació tipus més petita. Això ens porta a la definició següent:

Definició 3 *Pes d'una observació. Variància de referència*

Siguin n observacions $u_1, u_2, ..., u_n$ de n variables aleatòries independents U_i que segueixen lleis de distribució de probabilitat $N(\mu,\sigma_i)$, i = 1, 2, ..., n, respectivament, totes amb la mateixa mitjana μ però amb desviacions tipus diferents σ_i . Considerem que una de les observacions, u_j, té "fiabilitat estàndard" i li assignem pes unitat: $p_j = 1$. A la corresponent variància $\sigma^2_j = \sigma^2$ li direm *variància estàndard*, *variància de referència* o *variància de les observacions de pes unitat*, i definim el *pes d'una observació* u_i qualsevol com

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \tag{1.17}$$

Observació

La definició 3 només es pot aplicar si es coneixen les desviacions tipus σ_i. Quan no és així, per posar pesos s'utilitzen, moltes vegades, criteris subjectius que depenen de les circumstàncies i/o raons tècniques fora de l'abast d'aquest manual. En qualsevol cas, haurem de tenir en compte que, en aplicar un pes a una observació, implícitament estem establint la seva desviació tipus, salvat el factor de proporcionalitat que és la variància de referència.

Observem, a més, que el pes p_i d'una observació u_i té les unitats de l'observació u_j (de fiabilitat estàndard o de pes unitat) al quadrat, dividit per les unitats de u_i al quadrat. Per exemple, si u_j és un angle en radiants i u_i és una distància en metres, les unitats de p_i seran rad^2/m^2.

1.4.1 Mínims quadrats i màxima versemblança

Igual que en el cas d'observacions no ponderades, es tracta d'establir un criteri per estimar el paràmetre μ a partir de la mostra $u_1, u_2, ..., u_n$. Com que les n variables $U_1, U_2, ..., U_n$ són independents amb mitjana μ i desviació tipus

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$$

la funció de densitat conjunta del vector aleatori normal ($U_1, U_2, ..., U_n$) és el producte de funcions de densitat, que en aquest cas s'escriu

$$f(u_1,u_2,\dots,u_n)=\prod_{i=1}^{n} f(u_i)=\frac{\sqrt{p_1p_2\dots p_n}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}p_i(u_i-\mu)^2} \tag{1.18}$$

Aquesta és la *funció de versemblança* de la mostra i depèn dels dos paràmetres μ i σ. Per a qualsevol valor σ de la desviació tipus de referència, el màxim correspondrà a aquell valor del paràmetre μ que faci mínim el sumatori de l'exponent:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(u_i-\mu)^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i-\mu}{\sigma_i}\right)^2 \tag{1.19}$$

En el cas d'observacions ponderades, el criteri de màxima versemblança per a l'estimació de μ torna a coincidir amb el *criteri dels mínims quadrats*, que, en aquest cas, porta a prendre com a estimador del paràmetre μ aquell valor m que faci mínima la suma *ponderada* dels quadrats de les desviacions respecte de les observacions. En aquest cas, l'estimador corresponent és la mitjana *ponderada* de les observacions.

Proposició 6

L'estimador mínimoquadràtic d'una magnitud μ de la qual es disposa d'una mostra $u_1, u_2, \dots, u_n$ de n mesures directes amb pesos $p_1, p_2, \dots, p_n$, respectivament, és la mitjana *ponderada*:

$$m_p=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_iu_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{1.20}$$

Demostració

És anàloga a la de la proposició 1. Considerem la suma *ponderada* dels quadrats de les correccions de les observacions u_i respecte d'un cert estimador e com una funció de e:

$$f(e)=\sum_{i=1}^{n} p_iv_i^2=\sum_{i=1}^{n} p_i(u_i-e)^2=\sum_{i=1}^{n} p_iu_i^2-2e\sum_{i=1}^{n} p_iu_i+e^2\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Anul·lant la derivada respecte de l'estimador e,

$$f'(e)=-2\sum_{i=1}^{n} p_iu_i+2e\sum_{i=1}^{n} p_i=0\Rightarrow e=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_iu_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}=m_p$$

És immediat que la derivada segona $f''(e)$ és positiva i que, per tant, es tracta d'un mínim.

Proposició 7

La mitjana ponderada m_p és un estimador no esbiaixat i consistent del vertader valor μ de la magnitud que volem calcular. La seva esperança matemàtica és

$$E(m_p) = \mu \tag{1.21}$$

i té per variància

$$VAR(m_p) = \sigma_{mp}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum p_i} \tag{1.22}$$

o, el que és equivalent,

$$\sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$$

Demostració

Per demostrar la primera afirmació només cal aplicar la linealitat de l'esperança,

$$E\left(\frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i}\right) = \frac{\sum p_i E(u_i)}{\sum p_i} = \frac{\sum p_i \mu}{\sum p_i} = \mu$$

mentre que per a la variància tenim

$$VAR\left(\frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i}\right) = \frac{\sum p^2{}_i VAR(u_i)}{\left(\sum p_i\right)^2} = \frac{\sum p^2{}_i \sigma_i^2}{\left(\sum p_i\right)^2} =$$

prenent $p_i = \dfrac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$:

$$= \frac{\sum \frac{\sigma^4}{\sigma_i^4} \sigma_i^2}{\left(\sum p_i\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum p_i}$$

Observació

Els resultats

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \quad \text{i} \quad \sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$$

coincideixen amb els corresponents a observacions no ponderades fent tots els pesos iguals a 1 i, per tant, $\sum p_i = n$.

1.4.2 Error en l'estimació per mínims quadrats

Definició 4 *Errors absoluts i residus amb observacions ponderades*
Igual que en el cas d'observacions no ponderades, anomenarem *correccions vertaderes* els *errors absoluts*, és a dir, les diferències entre la magnitud μ i les seves observacions u_i: $\varepsilon_i = \mu - u_i$, i *correccions aparents* o *residus* les diferències entre l'estimador m i les observacions

$$v_i = m_p - u_i \tag{1.23}$$

És a dir, les correccions que cal fer a les observacions perquè donin el valor estimat m_p del vertader valor μ:

$$u_i + v_i = m_p$$

Observació

De la seva definició, es dedueix que la suma ponderada dels residus és nul·la:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = 0 \tag{1.24}$$

Efectivament,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (m_p - u_i) = m_p \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = 0$$

Per tenir una mesura de la desviació de les observacions respecte de l'estimador mitjana ponderada m_p, prendrem la suma ponderada dels quadrats $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2$.

Definició 5 *Error estadístic associat a una operació de mesura amb observacions ponderades*

Es defineix l'*error estadístic* associat a l'estimació d'una magnitud per la mitjana ponderada m_p com la seva desviació tipus:

$$\sigma_{mp} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$$

Atès que la desviació tipus de referència σ és desconeguda,. l'haurem d'estimar a partir d'un estadístic mostral. Per això definim l'*error mitjà quadràtic* d'un conjunt d'observacions ponderades com la desviació tipus mostral ponderada:

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - m_p)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-1}} \tag{1.25}$$

Proposició 8

La variància mostral ponderada $S_p^{\,2}$ és un estimador no esbiaixat de la variància de referència σ^2:

$$E(S_p^2) = \sigma^2 \tag{1.26}$$

Demostració

Partim de la igualtat següent:

$$\sum p_i (u_i - \mu)^2 = \sum p_i \{(u_i - m_p) + (m_p - \mu)\}^2 =$$
$$\sum p_i (u_i - m_p)^2 + 2(m_p - \mu)\sum p_i (u_i - m_p) + (m_p - \mu)^2 \sum p_i$$

Per tant, tenint en compte (1.24) i la linealitat de l'esperança, es pot escriure

$$E(S_p^2) = \frac{1}{n-1}\sum p_i E(u_i - \mu)^2 - \frac{\sum p_i}{n-1} E(m_p - \mu)^2$$

o bé

$$E(S_p^2) = \frac{1}{n-1}\sum p_i VAR(u_i) - \frac{\sum p_i}{n-1} VAR(m_p) =$$

d'acord amb (1.17) i (1.22):

$$= \frac{1}{n-1}\sum \frac{\sigma^2}{\sigma^2{}_i}\sigma^2{}_i - \frac{\sum p_i}{n-1}\frac{\sigma^2}{\sum p_i} = \sigma^2$$

Observació

Atès que σ és desconegut i l'estimem per S_p, l'error associat a la mitjana ponderada l'estimarem per

$$S_{mp} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \tag{1.27}$$

D'altra banda, atès que

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-1}$$

i que, per tant,

$$(n-1)S_p^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 \tag{1.28}$$

la magnitud m_p que fa mínima la suma ponderada dels quadrats de les correccions també fa mínima la variància $S_p^{\,2}$ o, el que és el mateix, fa mínim l'error S_p.

Exemple 4 *Observacions ponderades*

Es vol determinar l'altura d'una estació P des de 4 estacions A, B, C, D, d'altura coneguda. Els resultats d'aquests mesuraments són

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1946{,}535 \text{ m} & \text{amb pes } p_1 = 1{,}433 \\ u_2 = 1946{,}560 \text{ m} & \text{amb pes } p_2 = 0{,}470 \\ u_3 = 1946{,}447 \text{ m} & \text{amb pes } p_3 = 3{,}050 \\ u_4 = 1946{,}459 \text{ m} & \text{amb pes } p_4 = 14{,}409 \end{array}$$

L'estimador puntual de l'altura de l'estació P i el corresponent error són, respectivament:

$$m_p = \frac{\sum p_i u_i}{\sum p_i} = 1946{,}465 \text{ m}$$

i

$$S_{mp} = \frac{S_p}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - m_p)^2}{n-1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i}} = \frac{0{,}065}{\sqrt{19{,}362}} = 0{,}015 \text{ m}$$

1.4.3 Estimació per intervals

Fins ara hem fet una estimació puntual del vertader valor μ d'una magnitud mesurada repetidament, per la mitjana ponderada m_p, i de la desviació tipus de referència σ, per la desviació tipus mostral ponderada S_p. Per fer una estimació dels paràmetres μ i σ per intervals de confiança, cal tenir en compte que cada mesura u_i és una realització d'una variable aleatòria U_i normal $N(\mu,\sigma)$, i el resultat presentat a la proposició següent, anàloga a la proposició 4 prou coneguda en l'estadística, que enunciarem sense demostració (una demostració es pot trobar a [LIN63], Teorema 5.3.1, p. 130).

Proposició 9

La variable aleatòria

$$Y = \frac{(n-1)S_p^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - m_p)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{\sigma^2}$$

segueix una llei χ^2 amb n-1 graus de llibertat. Com a conseqüència, la variable aleatòria

$$t = \frac{m_p - \mu}{S_{mp}} = \frac{m_p - \mu}{S_p / \sqrt{\sum p_i}}$$

segueix una llei t de Student amb n-1 graus de llibertat.

a) Intervals de confiança per al *vertader valor* μ de la magnitud mesurada

Amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α

$$m_p - t_{n-1,\alpha}\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} < \mu < m_p + t_{n-1,\alpha}\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$$

o bé

$$\mu = m_p \pm t_{n-1,\alpha}\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \tag{1.29}$$

on $t_{n-1,\alpha}$ és el valor de la variable t de Student amb n-1 graus de llibertat tal que

$$P(\,-\,t_{n-1,\alpha} < t < t_{n-1,\alpha}\,) = 1 - \alpha$$

Si n és prou gran (a la pràctica s'acostuma a considerar $n \geq 30$), aleshores la variable t de Student amb n-1 graus de llibertat es confon amb una normal tipificada i la variable aleatòria

$$Z = \frac{m_p - \mu}{S_p / \sqrt{\sum p_i}}$$

segueix una llei normal estàndard $N(0,1)$. Per tant, amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α,

$$m_p - Z_\alpha\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} < \mu < m_p + Z_\alpha\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$$

o bé

$$\mu = m_p \pm Z_\alpha\frac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}} \tag{1.30}$$

on Z_α és el valor de la variable Z $N(0,1)$ tal que

$$P(\,-\,Z_\alpha < Z < Z_\alpha\,)=1-\alpha$$

b) Intervals de confiança per a la desviació tipus poblacional σ o *vertader valor* de l'error

Amb un nivell de significació α o coeficient de confiança 1-α

$$\frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_a^2}} \tag{1.31}$$

on χ^2_a i χ^2_b són els valors de la variable χ^2, amb n-1 graus de llibertat, tals que

$$P(\chi^2 > \chi^2_b) = \alpha/2 \;\; \text{i} \;\; P(\chi^2 > \chi^2_a) = 1-\alpha/2$$

Exemple 5 *Estimació per intervals amb observacions ponderades*

Els intervals de confiança, amb coeficient del 95%, per als vertaders valors de l'altura i l'error de l'exemple 3, calculats segons els criteris expressats més amunt, són

$$1946{,}465 - t\, 0{,}065 / \sqrt{19{,}362} < \mu < 1946{,}465 + t\, 0{,}065 / \sqrt{19{,}362}$$

La t de Student amb 3 graus de llibertat i nivell de significació del 5% val t = 3,1824. Per tant, es té

$$1946{,}418 < \mu < 1946{,}512$$

Quant a l'error,

$$(\sqrt{3} / \sqrt{\chi^2_b})\, 0{,}065 < \sigma < (\sqrt{3} / \sqrt{\chi^2_a})\, 0{,}065$$

Els valors de χ^2_a i χ^2_b, per a un nivell de significació del 5%, són respectivament 0,2158 i 9,3484. Substituint-los, obtenim l'interval

$$0{,}037 < \sigma < 0{,}242$$

La taula següent permet la visió comparada de les diferents magnituds que intervenen quan les observacions són equiprecises o ponderades.

Observacions equiprecises	Observacions ponderades
$u_1, u_2, ..., u_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$	$u_i \rightarrow N(\mu, \sigma_i); P_i = \dfrac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$, i= 1, 2, ..., n
$\sum_{i=1}^{n} (u_i - \mu)^2$	$\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - \mu)^2$
$m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$	$m_p = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$
$S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (u_i - m)^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$	$S_p = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - m_p)^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-1}}$
$S_m = S / \sqrt{n}$ $\sigma_m = \sigma / \sqrt{n}$	$S_{mp} = \dfrac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$ $\sigma_{mp} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sum p_i}}$

$\mu = m \pm t_{n-1,\alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\mu = m_p \pm t_{n-1,\alpha} \dfrac{S_p}{\sqrt{\sum p_i}}$
$\dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_a^2}}$	$\dfrac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \dfrac{\sqrt{n-1}S_p}{\sqrt{\chi_a^2}}$

1.5 Matriu de variància-covariància

Tot vector aleatori n-dimensional $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, com per exemple un vector de n observacions, té associat el corresponent vector de desviacions tipus $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ i, fixada la variància de referència σ^2, el corresponent vector de variàncies normalitzades $(\sigma^2_1/\sigma^2, \sigma^2_2/\sigma^2, ..., \sigma^2_n/\sigma^2)$ i el corresponent vector de pesos format pels respectius valors inversos de les variàncies normalitzades $(p_1, p_2, ..., p_n) = (\sigma^2/\sigma^2_1, \sigma^2/\sigma^2_2, ..., \sigma^2/\sigma^2_n)$. Però si les variables aleatòries u_i no són independents, cal considerar també les corresponents covariàncies, cosa que dóna lloc a la definició següent:
Definició 6 *Matrius de variància-covariància, cofactor i pes*

Tota variable aleatòria n-dimensional $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ té associada una *matriu de variància-covariància*:

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

on l'element ij és la covariància de les variables u_i, u_j i l'element i-èsim de la diagonal és la variància de la variable u_i.

Anomenem *matriu cofactor* la matriu de variància-covariància normalitzada dividida per la variància de referència:

$$Q_u = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_u \tag{1.33}$$

I *matriu pes* la inversa de la matriu cofactor

$$W_u = Q^{-1}_u = \sigma^2\, \Sigma^{-1}_u \tag{1.34}$$

Observacions

- Els errors o desviacions tipus associats a una variable aleatòria n-dimensional $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ són determinats per la seva matriu de variància-covariància Σ_u. Coneguda la matriu cofactor, per trobar aquests errors només hem de multiplicar-la per la variància de referència

$$\Sigma_u = \sigma^2\, Q_u \tag{1.35}$$

- Si les variables $u_1, u_2, ..., u_n$ són independents, aleshores aquestes matrius són diagonals. En particular, la matriu pes W_u coincidirà amb la matriu diagonal P de pesos:

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

1.5.1 Propagació de la matriu de variància-covariància en expressions lineals

Per l'estadística sabem que l'esperança matemàtica és un operador lineal, és a dir que, ateses dues variables aleatòries X i Y, se satisfà

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

mentre que per a la variància es té

$$VAR(aX + bY) = a^2 VAR(X) + b^2 VAR(Y) + 2abCOV(X, Y)$$

Aquest resultat es generalitza en termes de la matriu de variància-covariància o de la matriu cofactor segons la següent proposició, una demostració de la qual es pot trobar, per exemple, a [MIG81].

Proposició 10

Si u és una variable aleatòria n-dimensional representada matricialment per la columna

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

i w és una variable aleatòria h-dimensional que s'obté de u mitjançant la relació matricial

$$w = Au + b \tag{1.37}$$

on A és una matriu $n \times h$ i b és una matriu columna de h elements, ambdues de constants, aleshores el vector esperança matemàtica de w està relacionat amb el vector esperança matemàtica de u segons l'equació matricial

$$E(w) = AE(u) + b \tag{1.38}$$

La matriu cofactor de w està relacionada amb la matriu cofactor de u segons l'equació matricial

$$Q_w = AQ_uA^T \tag{1.39}$$

i anàlogament amb la matriu de variància-covariància

$$\Sigma_w = A\Sigma_u A^T \tag{1.40}$$

Les expressions (1.39) i (1.40) es coneixen com a *llei de propagació de la matriu cofactor* i *llei de propagació de la matriu de variància-covariància, respectivament.*

Exemple 6 *Propagació de la matriu de variància-covariància en expressions lineals*

Siguin x_1 i x_2 dues mesures longitudinals de camp independents amb desviacions típiques σ_{x1} = 0,01 i σ_{x2} = 0,02 m respectivament. Calculeu les desviacions típiques de la seva suma

$$y_1 = x_1 + x_2$$

i la seva diferència

$$y_2 = x_1 - x_2$$

així com la covariància de les dues variables y_1 i y_2.

La relació matricial del tipus (1.37) que relaciona les variables y_1 , y_2 amb les mesures x_1 , x_2 és

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aplicant (1.40),

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1y2} \\ \sigma_{y1y2} & \sigma_{y2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

És a dir,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1y2} \\ \sigma_{y1y2} & \sigma_{y2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}01^2 & 0 \\ 0 & 0{,}02^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fent operacions,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{y1}^2 & \sigma_{y1y2} \\ \sigma_{y1y2} & \sigma_{y2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01^2 + 0{,}02^2 & 0{,}01^2 - 0{,}02^2 \\ 0{,}01^2 - 0{,}02^2 & 0{,}01^2 + 0{,}02^2 \end{pmatrix}$$

Per tant, les desviacions típiques de la suma i la diferència són

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sqrt{0{,}0005} = 0{,}022 \text{ m}$$

ambdues iguals, mentre que la seva covariància és

$$\sigma_{y1\,y2} = -\ 0{,}0003 \text{ m}^2$$

Observem que, encara que les variables x_1 i x_2 siguin estadísticament independents, la seva suma y_1 i la seva diferència y_2 no ho són, ja que la seva covariància és no nul·la. Això és així perquè, tant per calcular y_1 com per calcular y_2 intervenen les dues variables x_1 i x_2. Per mesurar el grau de dependència és més adient el coeficient de correlació, que és adimensional i no depèn de les unitats emprades:

$$\rho = \frac{\sigma_{y1y2}}{\sigma_{y1}\sigma_{y2}} = -0{,}6$$

Exemple 7 *Matriu de variància-covariància en l'estimació de la mitjana ponderada*

Anem a deduir l'expressió (1.22) que dóna la variància de la mitjana ponderada m_p, mitjançant la llei (1.40) de propagació de la matriu de variància-covariància.

La mitjana ponderada m_p s'obté a partir del vector u d'observacions segons l'equació matricial

$$m_p = Au \tag{1.41}$$

on A és la matriu fila

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} & \dfrac{p_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} & \dots & \dfrac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

És a dir,

$$m_p = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} & \dfrac{p_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} & \dots & \dfrac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i u_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}$$

La mitjana ponderada m_p és un nombre real. Per tant, la seva matriu de variància-covariància Σ_{mp} té una sola fila i una sola columna on hi ha la variància σ^2_{mp}:

$$\Sigma_{mp} = \sigma^2_{mp}$$

Les observacions u_i són independents i, per tant, la matriu de variància-covariància és la matriu diagonal que conté les variàncies respectives.

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma^2}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\sigma^2}{p_n} \end{pmatrix}$$

Segons la llei (1.40) de propagació de la matriu de variància-covariància,

$$\Sigma_{mp} = A\Sigma_u A^T$$

I, segons l'expressió (1.42) de la matriu A,

$$\sigma_{mp}^2 = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} & \frac{p_2}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} & \dots & \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma^2}{p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_1}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} \\ \frac{p_2}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} \\ \dots \\ \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^n p_i} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2 \sum p_i}{\left(\sum p_i\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum p_i}$$

1.5.2 Propagació de la matriu de variància-covariància en expressions no lineals

Siguin $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ una variable aleatòria n-dimensional i w una variable aleatòria h-dimensional que s'obté de u mitjançant la relació

$$w = F(u) \tag{1.43}$$

on F és una funció vectorial de components

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ w_2 &= f_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ &\dots \\ w_h &= f_h(u_1, u_2, ..., u_n) \end{aligned} \tag{1.44}$$

i on les h funcions f_i són **no lineals**.

Per tal de poder aplicar les lleis (1.39) i (1.40) de propagació de les matrius cofactor i de variància-covariància, haurem de **linealitzar** el sistema desenvolupant per Taylor les h funcions f_i fins a primer ordre en l'entorn d'un punt $u^0 = (u^0_1, u^0_2, ..., u^0_n)$.

Anomenant

$$\begin{aligned} w^0_i &= f_i(u^0) \\ \Delta u_i &= u_i - u^0_i \\ \Delta w_i &= w_i - w^0_i \end{aligned}$$

i fent els desenvolupaments, s'obtenen les expressions **lineals en els increments**

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &\cong \frac{\partial f_1(u^0)}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_1(u^0)}{\partial u_2}\Delta u_2 + \dots + \frac{\partial f_1(u^0)}{\partial u_n}\Delta u_n \\ \Delta w_2 &\cong \frac{\partial f_2(u^0)}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_2(u^0)}{\partial u_2}\Delta u_2 + \dots + \frac{\partial f_2(u^0)}{\partial u_n}\Delta u_n \\ &\dots \\ \Delta w_h &\cong \frac{\partial f_h(u^0)}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_h(u^0)}{\partial u_2}\Delta u_2 + \dots + \frac{\partial f_h(u^0)}{\partial u_n}\Delta u_n \end{aligned} \tag{1.45}$$

Pressuposant que els increments Δu_i són petits i, per tant, negligint els termes d'ordre superior, matricialment escriurem

$$\Delta w = dF_{u^0} \Delta u \tag{1.46}$$

que és una expressió anàloga a (1.37) canviant w per Δw, u per Δu i A per dF_{u^0}. Aplicant les lleis (1.39) i (1.40) a l'expressió (1.46) per a Δu i Δw, dins de l'aproximació que suposa la linealització de la funció F, s'obté

$$Q_{\Delta w} = dF_{u^0}\, Q_{\Delta u}\, dF_{u^0}{}^T$$

I, anàlogament amb la matriu de variància-covariància,

$$\Sigma_{\Delta w} = dF_{u^0}\, \Sigma_{\Delta u}\, dF_{u^0}{}^T$$

Atès que la dispersió de l'increment Δu és igual a la de la variable u, i anàlogament amb w, podem escriure les mateixes lleis per a les matrius cofactor

$$Q_w = dF_{u^0}\, Q_u\, dF_{u^0}{}^T \tag{1.47}$$

i de variància-covariància

$$\Sigma_w = dF_{u^0}\, \Sigma_u\, dF_{u^0}{}^T \tag{1.48}$$

de w i de u.

Exemple 8 *Propagació de la matriu de variància-covariància en expressions no lineals*

Es mesura la hipotenusa a i un catet b d'un triangle rectangle amb els resultats

$$a = 380{,}143 \text{ m}$$
$$b = 215{,}030 \text{ m}$$

i amb desviacions tipus

$$\sigma_a = 0{,}015 \text{ m}$$
$$\sigma_b = 0{,}010 \text{ m}$$

respectivament.

Es vol calcular el catet c i l'angle B oposat al catet b, la seva desviació tipus i la correlació entre els dos.

La relació entre les dades a i b i les incògnites c i B és donada per les funcions no lineals

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$B = arcsin \frac{b}{a}$$

Fent els càlculs s'obté

$$c = 313{,}482 \text{ m}$$

i

$$B = 0{,}6012279956 \text{ rad} = 34^\circ\ 26'\ 52'',18$$

Per calcular les desviacions tipus σ_c i σ_B calcularem la matriu de variància-covariància

$$\Sigma_w = \begin{pmatrix} \sigma_c^2 & \sigma_{cB} \\ \sigma_{cB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

de les variables c i B tot aplicant la relació (1.48), on

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}25\times10^{-4} & 0 \\ 0 & 1{,}00\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

i

$$dF_{u^0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial a} & \dfrac{\partial c}{\partial b} \\ \dfrac{\partial B}{\partial a} & \dfrac{\partial B}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{c} & \dfrac{-b}{c} \\ \dfrac{-b}{ac} & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}213 & -0{,}686 \\ 1{,}804\times10^{-3} & 3{,}190\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de variància-covariància de c i B serà

$$\Sigma_w = dF_{u^0}\,\Sigma_u\,dF_{u^0}{}^T = \begin{pmatrix} 3{,}779\times10^{-4} & -7{,}111\times10^{-7} \\ -7{,}111\times10^{-7} & 1{,}750\times10^{-9} \end{pmatrix}$$

Així, les desviacions tipus de c i B són

$$\sigma_c = \sqrt{3{,}779\times10^{-4}} = 0{,}019 \text{ m}$$

i

$$\sigma_B = \sqrt{1{,}750\times10^{-9}} = 4{,}1835\times10^{-5} \text{ rad} = 8'',63$$

respectivament, mentre que el coeficient de correlació entre ambdues variables és la magnitud adimensional

$$\rho = \frac{\sigma_{cB}}{\sigma_c\sigma_B} = -0{,}874$$

Observem que, encara que els observables a i b són estadísticament independents, les magnituds calculades c i B estan fortament correlacionades. Això és degut que, tant en el càlcul de c com en el de B, intervenen les mateixes dues variables a i b.

1.6 Exercicis

1. Es mesura una distància 4 vegades amb els resultats següents:

50,348, 50,352, 50,354 i 50,349 m.

Doneu una estimació puntual del vertader valor d'aquesta distància i de l'error mitjà quadràtic d'aquestes mesures i una estimació per intervals del 95% de confiança d'aquests dos paràmetres.

2. Es mesura un angle 6 vegades amb els resultats següents:

25º 15' 3",36, 25º 15' 5",99, 25º 15' 10",52
25º 15' 7",25, 25º 15' 6",98 i 25º 15' 8",04

Doneu una estimació puntual del vertader valor d'aquest angle així com de l'error mitjà quadràtic d'aquestes mesures i una estimació per intervals del 99% de confiança d'aquests dos paràmetres.

3. Es mesura una distància 16 vegades amb els resultats següents (en metres):

510,220, 510,230, 510,228, 510,236,
510,272, 510,233, 510,231, 510,229,
510,237, 510,234, 510,238, 510,232,
510,234, 510,237, 510,236 i 510,238

Detecteu, amb un 95% de confiança, si hi ha alguna mesura afectada d'errors grollers.

Doneu l'interval del 95% de confiança per al vertader valor d'aquesta distància.

4. Sis persones diferents mesuren un azimut amb el mateix aparell i en circumstàncies similars. Els resultats són:

15' 13",51 com a mitjana de 7 mesures
15' 12",23 com a mitjana de 3 mesures
15' 13",87 com a mitjana de 6 mesures
15' 13",01 com a mitjana de 4 mesures
15' 14",22 com a mitjana de 2 mesures
15' 13",32 com a mitjana de 5 mesures

Doneu una estimació puntual del vertader valor d'aquest azimut i de la variància de referència d'aquestes mesures angulars i una estimació per intervals del 99% de confiança d'aquests dos paràmetres.

5. A continuació es donen els resultats, expressats en metres, de la mesura de l'altura d'un cert punt per diferents mitjans, acompanyats dels pesos corresponents.

15,617	1,0
15,592	0,3
15,620	2,5
15,650	0,2
15,630	0,6

Doneu una estimació puntual del vertader valor d'aquesta altura i de la variància de referència d'aquestes mesures i una estimació per intervals del 90% de confiança d'aquests dos paràmetres.

6. Siguin x_1 i x_2 dues mesures longitudinals de camp independents amb desviació típica de 3 i 5 cm respectivament. Calculeu la matriu de variància-covariància, les desviacions típus de les magnituds

$$y_1 = 2\,x_1 + x_2$$

$$y_2 = 3\,x_1 + 5x_2$$

i

$$z = 2\,y_1 + 3y_2$$

Són y_1 i y_2 estadísticament independents?

Estan fortament o feblement correlacionats?

7. Es mesuren els dos catets b i c d'un triangle rectangle amb els resultats

$$b = 124{,}501 \text{ m}$$
$$c = 210{,}314 \text{ m}$$

i amb les desviacions tipus

$$\sigma_b = 0{,}006 \text{ m}$$
$$\sigma_c = 0{,}015 \text{ m}$$

respectivament.

Calculeu la hipotenusa a i l'angle B oposat al catet b, així com la seva desviació tipus i la correlació entre les dues magnituds.

8. Considerem tres mesures A_1, A_2 i A_3 d'un angle A. Suposem que A_1 ha estat calculat com la mitjana de 3 observacions, A_2 com la mitjana de 5 observacions i A_3 com la mitjana de 7 observacions. Suposem, a més, que totes les observacions estan fetes amb el mateix aparell i sota les mateixes condicions. Quins són els pesos P_i corresponents a les mesures A_i?

2 Observacions indirectes

2.1 Introducció

Considerem n observacions $u_1, u_2, ..., u_n$ de n magnituds, destinades a esbrinar el valor de h paràmetres $x_1, x_2, ..., x_h$. Les observacions u_i no els mesuren directament, com era el cas del capítol anterior, sinó que la vinculació entre les unes i les altres s'expressa a través d'un sistema de n equacions *lineals* amb h incògnites:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1h}x_h = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2h}x_h = u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nh}x_h = u_n \end{cases} \tag{2.1}$$

La discussió de la solució d'aquest sistema es farà sota les hipòtesis següents:

1. El nombre d'observacions és superior al nombre de incògnites a determinar: $n > h$. Per tant, aquest sistema, que matricialment escriurem

$$Ax = u \tag{2.2}$$

té més equacions que incògnites i serà, en general, incompatible, a causa de la inevitable imprecisió de les observacions. Suposarem, a més, que la matriu A és de rang màxim h i que, per tant, si les observacions fossin exactes, aleshores el sistema seria determinat. És precisament a causa de la inexactitud de les observacions que se'n fan més de les h estrictament necessàries per trobar els valors de les incògnites x_i. La relació (2.2), que expressa les observacions u en funció de les incògnites x, rep el nom de **model matemàtic** del problema d'observacions indirectes.

2. Mentre no s'especifiqui el contrari, totes les observacions són independents i estan distribuïdes normalment. El que és el mateix, es tracta de n observacions u_i de n variables aleatòries U_i independents que segueixen lleis $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, respectivament. $U = (U_1, U_2, ..., U_n)$ és, per tant, un vector aleatori normal de dimensió n amb esperança $E(U) = \mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$. Donar la desviació tipus σ_i, $i = 1, 2, ..., n$, de cada observació suposa establir l'anomenat **model estocàstic** del problema d'observacions indirectes.

D'altra banda, anomenarem $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_h)$ els vertaders valors dels paràmetres que volem estimar, de forma que $Ax = \mu$ seria un sistema determinat amb solució única $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_h)$.

Dit d'una altra manera, suposarem que es verifica la igualtat $A\zeta=\mu$ però que ζ i μ són vectors desconeguts.

Els *vertaders valors* μ de les magnituds observables estan estimats mitjançant observació directa i donant u com a valor aproximat, i els *vertaders valors* ζ dels paràmetres s'estimaran pel mètode dels mínims quadrats que es desenvoluparà en aquest capítol.

Exemple 1 [LAU83] *Determinació de l'altura sobre el nivell del mar de tres estacions a partir de l'observació de desnivells*

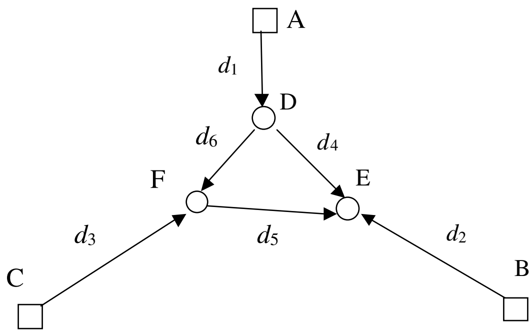

Fig. 2.1 Anivellació

Es vol determinar les altures x_1, x_2 i x_3 sobre el nivell del mar de tres estacions D, E i F, respectivament, conegudes les altures Ha, Hb i Hc de tres estacions de referència A, B i C, respectivament, i mesurant els sis desnivells d_1 de A a D, d_2 de B a E, etc., tal com s'indica a la figura 2.1. S'obté el sistema de 6 equacions amb 3 incògnites

$$\begin{cases} x_1 & & & = & Ha + d_1 \\ & x_2 & & = & Hb + d_2 \\ & & x_3 & = & Hc + d_3 \\ -x_1 & +x_2 & & = & d_4 \\ & x_2 & -x_3 & = & d_5 \\ -x_1 & & +x_3 & = & d_6 \end{cases}$$

El vertader valor $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ de les altures és intrínsecament desconegut. Només el podríem determinar si les observacions fossin exactes ($d_i = \mu_i$), amb la qual cosa el problema quedaria resolt amb les 3 primeres equacions:

$$\zeta_1 = Ha + \mu_1$$
$$\zeta_2 = Hb + \mu_2$$
$$\zeta_3 = Hc + \mu_3$$

Les 3 restants serien combinacions lineals seves. Però, a causa de la inexactitud de les observacions, aquest sistema és incompatible. Matricialment, l'escriurem $Ax = u$, on la matriu del sistema és

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

i el vector d'incògnites i el de termes independents, on hi ha les observacions, són, respectivament,

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ha+d_1\\Hb+d_2\\Hc+d_3\\d_4\\d_5\\d_6\end{pmatrix}$$

Moltes vegades, a més de la inevitable fluctuació estadística de l'error en les observacions, en la incompatibilitat del sistema intervé el fet que les relacions lineals

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ih}x_h = u_i\ ,\ i = 1,2,\ \ldots,\ n$$

entre les observacions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i les incògnites $x_1, x_2, \ldots, x_h$ són *models que aproximen* una realitat massa complexa per ser expressada matemàticament d'una forma operativa.

El següent exemple il·lustra aquest fet i com l'aplicació del mètode de mínims quadrats abasta camps molt diversos.

Exemple 2 [LIN63] *Ajust de coeficients en un model parabòlic*

La qualitat d'una producció de blat és determinada pel contingut en proteïnes (p) i en "globoides" (g) del gra. S'ha estimat empíricament que hi ha una relació entre aquests dos continguts que s'ajusta bastant bé per una funció parabòlica de la forma

$$g = x_1 + x_2 p + x_3 p^2$$

Els valors dels 3 paràmetres x_1, x_2 i x_3 es determinen fent n (més de 3) observacions del contingut g en n grans de contingut p conegut, cosa que dóna lloc a un sistema de n equacions en aquestes 3 incògnites:

$$\begin{pmatrix}1&p_1&p_1^2\\1&p_2&p_2^2\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&p_n&p_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\\cdots\\g_n\end{pmatrix}$$

El sistema és incompatible tant per l'aleatorietat en la imprecisió de les observacions g_i com pel fet que la funció parabòlica que relaciona les dues variables no expressa la *relació real exactament* sinó que és un model matemàtic que la simplifica, però que és útil operativament.

En aquest capítol establirem quina és la solució d'aquests tipus de sistemes sobredeterminats "en el sentit mínimoquadràtic", així com l'error que associarem a aquesta solució tant en el cas que totes les observacions tinguin el mateix pes com en el cas d'observacions ponderades.

Considerarem únicament els casos en que, com a l'exemple 1, la matriu A de coeficients és ben coneguda i només estan sotmeses a error les observacions contingudes al vector de termes independents u.

2.2 Solució per mínims quadrats d'un sistema d'equacions lineals sobredeterminat

Sigui el sistema incompatible $Ax = u$ de n equacions amb h incògnites on $n > h$. La matriu A i el vector u són constants, i no existeix cap vector x que verifiqui aquesta igualtat matricial.

Però sempre podrem trobar unes *correccions* $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ al vector u d'observacions tals que el sistema

$$Ax = u + v \tag{2.3}$$

tingui solució $m = (m_1, m_2, ..., m_h)$.

Definició 1 *Vector de correccions o residus*

Donat el sistema incompatible $Ax = u$ de n equacions amb h incògnites, on $n > h$, anomenarem *vector de correccions* o *vector de residus* el vector v definit per

$$v = Ax - u \tag{2.4}$$

2.2.1 Mínims quadrats i màxima versemblança

El vector v depèn de x en el sentit que per a cada vector x hi ha un vector v donat per la definició 1. Hi ha, doncs, una infinitat de parelles $\{x, v\}$ que satisfan l'expressió (2.3). Es tracta d'establir un criteri per escollir una d'aquestes parelles com a solució del sistema. Vegem com el criteri de màxima versemblança de les observacions condueix, igual que en el cas d'observacions directes tractat en el capítol anterior, al criteri de mínims quadrats per als residus.

Tenint en compte que les observacions u_i són normals, independents, de mitjana

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{h} a_{ij} x_j$$

i suposant que totes tenen la mateixa desviació tipus σ, aleshores la funció de versemblança del conjunt d'observacions és el producte de funcions de densitat normals

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} f(u_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \sum a_{ij}x_j)^2} \tag{2.5}$$

i serà màxima quan el sumatori de l'exponent

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \sum_{j=1}^{h} a_{ij}x_j\right)^2$$

que és la suma $v^T v$ dels residus al quadrat, sigui mínim.

Definició 2 *Estimador per mínims quadrats*

Anomenarem *estimador per mínims quadrats* dels vertaders valors $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_h)$ dels paràmetres el vector $m = (m_1, m_2, \ldots, m_h)$ solució del sistema $Ax = u + v$ que fa mínima la suma dels quadrats dels residus, és a dir, que fa mínima la quantitat $v^T v$ amb $v = Ax\text{-}u$.

Proposició 1

El vector $m = (m_1, m_2, \ldots, m_h)$ solució del sistema $Ax = u + v$, que fa mínima la quantitat $v^T v$, és determinat per l'expressió:

$$m = (A^T A)^{-1} A^T u \tag{2.6}$$

Demostració

La magnitud

$$v^T v = (Ax - u)^T (Ax - u)$$

és funció del vector x, ja que A i u són constants:

$$v^T v = f(x_1, x_2, \ldots, x_h)$$

Es tracta de trobar el vector x que anul·la les seves derivades parcials. Fent ús de resultats de càlcul matricial,

$$\frac{\partial v^T v}{\partial x_i} = 2v^T \frac{\partial v}{\partial x_i} = 2v^T A \frac{\partial x}{\partial x_i} = 0$$

i tenint en compte que

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = (1, 0, \ldots, 0)^T, \frac{\partial x}{\partial x_2} = (0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots, \frac{\partial x}{\partial x_h} = (0, 0, \ldots, 1)^T$$

resulta

$$v^T A = (0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow A^T v = (0, 0, \ldots, 0)^T = \mathbf{0}$$

I per la definició de v:

$$A^T (Ax - u) = \mathbf{0} \Rightarrow A^T A x = A^T u$$

Observació

En l'anterior demostració només es veu que *els candidats* a extrems són les solucions del sistema d'equacions $A^TAx = A^Tu$. Com que la matriu $N = A^TA$ és no singular, el candidat és únic i donat per l'expressió (2.6).

Sembla raonable pensar que un màxim de v^Tv no té massa sentit, doncs sempre podrem trobar vectors x tals que Ax s'allunyi de u tant com volem i que, en canvi, de tots els casos possibles si que n'hi ha d'haver un de mínim quadràtic, que haurà de ser l'únic candidat que tenim. De totes maneres, es pot veure que el candidat és un mínim comparant ([LIN63] p. 146) el valor de v^Tv calculat a partir d'aquesta solució amb qualsevol altre possible valor.

Definició 3 *Sistema d'equacions normals*

Donat el sistema incompatible sobredeterminat $Ax = u,$ s'anomena *sistema d'equacions normals* al sistema compatible determinat

$$Nx = A^T u, \quad \text{on} \quad N = A^TA \tag{2.7}$$

Les propietats estadístiques de l'estimador m es resumeixen en la següent proposició

Proposició 2

La solució mínima quadràtica m del sistema sobredeterminat $Ax = u$, és un vector aleatori normal de dimensió h, estimador no esbiaixat dels paràmetres ζ.

Demostració

Per veure que m és un vector aleatori normal de dimensió h només cal tenir en compte que u és un vector aleatori normal de dimensió n i que $m = Hu$ on $H = N^{1}A^T$ és una matriu $h \times n$ de rang h.

Per a demostrar que és un estimador no esbiaixat dels paràmetres ζ recordarem que, al principi del capítol, hem establert les convencions: $E(u) = \mu$ i $A\zeta = \mu$. Com que la matriu H és constant, tenim

$$E(m) = E(Hu) = HE(u) = H\mu = (A^TA)^{-1}A^TA\zeta = \zeta$$

Exemple 3 *Determinació de l'altura sobre el nivell del mar de tres estacions, a partir de l'observació de desnivells (Anivellació 2)*

Solucionem el problema plantejat a l'exemple 1 donant dades numèriques.

Les altures conegudes són

$$Ha = 746.239 \text{ m}$$
$$Hb = 789.417 \text{ m}$$
$$Hc = 754.219 \text{ m}$$

i els desnivells observats

$$d_1 = 12{,}005 \text{ m}$$
$$d_2 = 8{,}205 \text{ m}$$

$$d_3 = 30{,}004 \text{ m}$$
$$d_4 = 39{,}413 \text{ m}$$
$$d_5 = 13{,}398 \text{ m}$$
$$d_6 = 26{,}026 \text{ m}$$

Amb aquestes dades, el sistema $Ax = u$ s'escriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758{,}244 \\ 797{,}622 \\ 784{,}223 \\ 39{,}413 \\ 13{,}398 \\ 26{,}026 \end{pmatrix}$$

Si les observacions fossin exactes, les tres primeres equacions donarien la solució

$$\begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758{,}244 \\ 797{,}622 \\ 784{,}223 \end{pmatrix}$$

Vegem com la resta d'observacions modifiquen aquesta solució aproximada. El sistema d'equacions normals $Nx = A^T u$ és

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692{,}805 \\ 850{,}433 \\ 796{,}851 \end{pmatrix}$$

Invertint la matriu d'aquest sistema

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

podem calcular la solució amb el producte matricial

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 692{,}805 \\ 850{,}433 \\ 796{,}851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 758{,}223 \\ 797{,}630 \\ 784{,}235 \end{pmatrix}$$

Observem que, en aquest cas, el mètode de mínims quadrats introdueix modificacions de l'ordre dels centímetres.

Exemple 4 *Recta de regressió*

Anem a veure, a partir d'un exemple qualsevol, que el problema clàssic de trobar la recta de regressió lineal d'un núvol de punts és un cas particular del problema d'observacions indirectes.

Sigui y la quantitat, en grams, d'una certa substància que es dissol en un litre d'aigua a temperatura x. S'observa que, en augmentar la temperatura, augmenta la quantitat de substància que podem dissoldre.

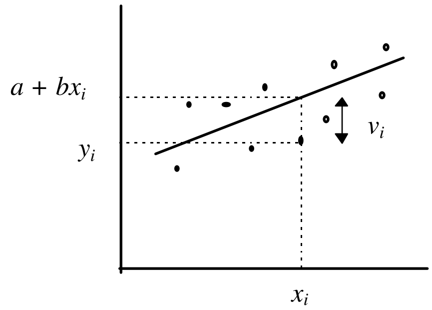

Fig. 2.2 *Recta de regressió*

Per donar una llei senzilla que relacioni aquestes dues variables, considerem n parelles de valors observats (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) que donen lloc a un núvol de punts (Fig. 2.2) del qual volem deduir la recta d'equació

$$y = a + bx$$

tal que

$$v^T v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$$

sigui mínim.

En termes del problema d'observacions indirectes, tenim el sistema de n equacions

$$\begin{gathered} a + x_1 b = y_1 \\ a + x_2 b = y_2 \\ \dots \\ a + x_n b = y_n \end{gathered}$$

amb les 2 incògnites a i b. Matricialment s'escriu

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriu del sistema i el vector d'observacions són, respectivament,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \text{ i } u=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Fent les operacions matricials, el sistema d'equacions normals $A^T Ax = A^T u$ queda

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

la solució del qual és

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

on

$$N^{-1}=(A^T A)^{-1}=\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{x^2}}{nS_x^2} & -\dfrac{\overline{x}}{nS_x^2} \\ -\dfrac{\overline{x}}{nS_x^2} & \dfrac{1}{nS_x^2} \end{pmatrix}$$

Fent els càlculs, obtenim el conegut resultat

$$b=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}=\frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

$$a=\frac{\sum y_i \sum x_i^2-\sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}=\frac{\overline{y}\,\overline{x^2}-\overline{x}\,\overline{xy}}{S_x^2}$$

on S^2_x i S_{xy} són la variància i la covariància mostrals, respectivament, mentre que la barra indica la mitjana mostral de la variable corresponent.

2.3 Precisió en l'estimació per mínims quadrats

En aquesta secció suposarem que totes les observacions estan afectades pel mateix error. És a dir, suposarem que cada observació u_i és un valor que pren una variable aleatòria U_i i que totes les variables aleatòries U_i , i = 1, 2, ..., n, són independents i amb la mateixa desviació tipus σ. Dit d'una altra manera, la matriu de variància-covariància (model estocàstic) del vector aleatori u d'observacions és

$$\Sigma_u = \sigma^2 I \tag{2.8}$$

on I és la identitat d'ordre n i, per tant, les matrius cofactor i pes són ambdues la pròpia identitat, com d'altra banda cal esperar, ja que totes les observacions tenen pes unitat. Si bé el paràmetre poblacional

σ és, en general, desconegut, sempre podrem calcular (veurem com fer-ho) el corresponent estimador S que, per tant, suposarem conegut, i escriurem

$$\begin{aligned} \Sigma_u &\sim S^2\ I \\ Q_u &= W_u = I \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3.1 Errors associats a l'estimador per mínims quadrats

Es tracta de determinar els errors σ_m associats a l'estimador m calculat a partir de la proposició 1, com a conseqüència de la propagació de l'error σ de les observacions.

Proposició 3

Si les observacions u_i són independents i tenen el mateix pes, aleshores la matriu cofactor del vector aleatori m, solució mínima quadràtica del sistema $Ax = u$, és la inversa de la matriu del sistema d'equacions normals:

$$Q_m = N^{1} = (A^T A)^{-1} \tag{2.10}$$

Demostració

Cal aplicar la llei de propagació de la matriu cofactor al procés que permet calcular l'estimador m a partir de les observacions u:

$$m = N^{-1} A^T u$$

Primer es calcula el vector

$$t = A^T u \Rightarrow Q_t = A^T Q_u (A^T)^T = A^T A = N$$

Després es fa

$$m = N^{-1} t \Rightarrow Q_m = N^{-1} Q_t (N^{-1})^T = N^{-1} N (N^{-1})^T = N^{-1}$$

on hem fet ús que N^{-1} és simètrica per ser-ho N.

Com a conseqüència directa de la proposició 3 tenim la

Proposició 4

La matriu de variància-covariància Σ_m de la solució minimoquadràtica m s'estima a partir de la desviació tipus σ de les observacions u_i segons la relació

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m$$

i, en particular,

$$\sigma^2_{mi} = Q_{m\,ii}\ \sigma^2 \tag{2.11}$$

on $Q_{m\,ii}$, $i = 1, 2, ..., h$, són els elements de la diagonal principal de la inversa de la matriu del sistema d'equacions normals.

Exemple 5 *Error en els paràmetres de la recta de regressió lineal*

En el càlcul dels paràmetres de la recta de regressió lineal, hem vist que la matriu cofactor és

$$Q_m = N^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{x^2}}{nS_x^2} & -\dfrac{\bar{x}}{nS_x^2} \\ -\dfrac{\bar{x}}{nS_x^2} & \dfrac{1}{nS_x^2} \end{pmatrix}$$

Per tant, si anomenem S l'error de cada una de les observacions y_i, segons la proposició 4 tenim que l'error de l'ordenada a l'origen és

$$S_a = \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}\,S$$

i que l'error de la pendent és

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{nS_x^2}}\,S$$

2.3.2 L'error en les observacions. Càlcul de la variància de referència

Hi ha la possibilitat que es conegui, per experiència prèvia, el valor de l'error σ associat a les observacions u_i; en general, però, aquesta dada és desconeguda i el seu càlcul forma part del procés d'estimació de la precisió dels resultats.

Hi ha una forma molt senzilla d'estimar la variància de les observacions de pes unitat, o variància de referència, a partir dels resultats de l'estimació; està basada en el comportament estadístic dels residus, resumit en la proposició següent:

Proposició 5

La magnitud

$$Y = \frac{v^T v}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n v_i^2$$

és una variable aleatòria que segueix una llei χ^2_{n-h} amb n-h graus de llibertat.

Demostració

La demostració formal d'aquest resultat (per exemple, a [LIN63] p. 155) és bastant llarga i complicada. S'ha de veure que $v^T v$ es pot escriure com a suma dels quadrats de n-h variables aleatòries independents i $N(0,\sigma)$. Per això cal fer, a més de força càlculs, un estudi complet de les característiques del vector aleatori v. Tot plegat ens faria desviar massa dels objectius fixats. Ens limitarem a fer una justificació intuïtiva.

La magnitud Y es pot escriure

$$Y=\sum_{1}^{n}\frac{v_i^2}{\sigma^2}=\sum_{1}^{n}\left(\frac{u_i-(Am)_i}{\sigma}\right)^2$$

que és un sumatori de magnituds que consisteixen en el quadrat d'un valor observat u_i menys el seu valor "mitjà" $(Am)_i$ segons el model $u = Ax$, partit per l'error σ.

Expressions d'aquest tipus sovint es tracten com a variables χ^2 en estadística; per tant, encara que no es demostri formalment, sembla raonable que la magnitud Y segueixi aquesta llei de probabilitat. Observem, a més, que, en aquest sentit, podem dir que l'ajust minimoquadràtic és un *ajust per mínim khi quadrat.*

Quant al nombre de graus de llibertat, també sembla raonable considerar que és igual a l'excés d'observacions n-h. Si es fes el mateix nombre d'observacions u_i que incògnites x_i es tenen, aleshores el sistema $Ax = u$ seria determinat i els residus v nuls, amb la qual cosa la quantitat $v^T v$ no seria una variable aleatòria sinó una constant nul·la. Per tant, es pot dir que la quantitat $v^T v$ és una variable aleatòria en la mesura que hi ha excés d'observacions i que, com que segueix una llei χ^2, els graus de llibertat seran, precisament, aquest excés.

Com a conseqüència immediata d'aquest resultat es dedueix la

Proposició 6

La magnitud

$$S=\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-h}} \tag{2.12}$$

és un estimador puntual no esbiaixat de l'error en les observacions σ.

Demostració

Només cal tenir en compte que l'esperança matemàtica d'una variable χ^2 és el nombre de graus de llibertat. Per tant, segons la proposició anterior i utilitzant la linealitat de l'operador esperança matemàtica, es té

$$E\left(\frac{v^T v}{\sigma^2}\right)=n-h \Leftrightarrow E\left(\frac{v^T v}{n-h}\right)=\sigma^2$$

Cal esperar, doncs, que

$$S^2=\left(\frac{v^T v}{n-h}\right)$$

prengui valors propers a la variància de referència σ^2.

Observació

Segons les proposicions 4 i 6, es pot establir el mètode per avaluar els errors en l'estimació paramètrica mitjançant el vector m, en cas que la variància de referència sigui desconeguda.

La matriu de variància-covariància Σ_m de la solució minimoquadràtica m s'estima a partir de la desviació tipus S de les observacions u_i segons la relació

$$\Sigma_m \sim S^2\, Q_m$$

i, en particular,

$$\sigma^2_{mi} \sim S^2_{mi} = Q_{m\,ii}\; S^2$$

on $Q_{m\,ii}$, $i = 1, 2, ..., h$, són els elements de la diagonal principal de la inversa de la matriu del sistema d'equacions normals.

Exemple 6 *Determinació de l'altura sobre el nivell del mar de tres estacions a partir de l'observació de desnivells (Anivellació 3)*

Calculem, en aquest cas, l'error en les observacions aplicant el resultat (2.12).

En primer lloc hem de trobar el vector de residus $v = Am - u$ a partir de les observacions u, la matriu A i el resultat de l'estimació per mínims quadrats m:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 758{,}223 \\ 797{,}630 \\ 784{,}235 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 758{,}244 \\ 797{,}622 \\ 784{,}223 \\ 39{,}413 \\ 13{,}398 \\ 26{,}026 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}021 \\ 0{,}008 \\ 0{,}012 \\ -0{,}006 \\ -0{,}003 \\ -0{,}014 \end{pmatrix}$$

El nombre de graus de llibertat és n-h = 6-3 =3. Aplicant la proposició 6 s'obté

$$S = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-h}} = \sqrt{\frac{0{,}00089}{3}} = 0{,}017 \ \text{ m}$$

2.3.3 Estimació per intervals

Recordem que cada component m_i de la solució mínima quadràtica m és un estimador puntual del paràmetre corresponent ζ_i i que l'error en les observacions S és un estimador puntual de la desviació tipus poblacional σ.

Com a conseqüència de la proposició 5, podem afirmar directament que, fixat un nivell de significació α, *l'interval de confiança per al vertader valor de* σ és

$$\frac{\sqrt{v^T v}}{\sqrt{\chi^2_b}} < \sigma < \frac{\sqrt{v^T v}}{\sqrt{\chi^2_a}} \tag{2.13}$$

on χ^2_a i χ^2_b són els valors de la distribució khi quadrat amb n-h graus de llibertat, amb el significat habitual pel corresponent valor de α.

Per exemple, si el nivell de significació és del 5%, és a dir, el nivell de confiança del 95%, aleshores χ^2_a i χ^2_b són els valors de la distribució khi quadrat amb n-h graus de llibertat tals que $P(\chi^2 < \chi^2_a) = P(\chi^2 > \chi^2_b) = 0{,}025$.

Quant a l'estimació per intervals del vertader valor dels paràmetres ζ_i a partir dels resultats m_i, es pot fer a partir de la proposició següent:

Proposició 7

La variable

$$t_i = \frac{m_i - \varsigma_i}{S\sqrt{Q_{mii}}}$$

segueix una llei t de Student amb n-h graus de llibertat.

Demostració

Segons les proposicions 2, 4 i 5, la magnitud

$$Z_i = \frac{m_i - \varsigma_i}{\sigma\sqrt{Q_{mii}}}$$

és $N(0,1)$, i la magnitud

$$Y = \frac{v^T v}{\sigma^2}$$

segueix una llei χ^2 amb n-h garus de llibertat. Per tant, la magnitud

$$t_i = \sqrt{n-h}\,\frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

seguirà una llei t de Student amb n-h graus de llibertat.

Ara estem en condicions d'afirmar que, fixat un nivell de significació α, *l'interval de confiança per a l'estimació dels paràmetres* ζ_i és

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \varsigma_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \tag{2.14}$$

$i = 1, 2, ..., h$, on T_α és el valor de la variable t de Student amb n-h graus de llibertat tal que

$$P(-t_\alpha < t_{n-h} < t_\alpha) = 1-\alpha$$

Exemple 6 *Determinació de l'altura sobre el nivell del mar de tres estacions a partir de l'observació de desnivells (Anivellació 4)*

Calculem, en aquest cas, els intervals del 95% de confiança per a les tres altures i per a l'error en les observacions.

Amb tres graus de llibertat i un nivell de significació $\alpha = 0{,}05$ (95% de confiança), tenim $T_\alpha = 3{,}1824$. Recordem que $Q_{mii} = 0{,}5$, $i = 1, 2, 3$ i $S = 0{,}0172$. Per tant,

$$m_i - 3{,}1824 \times 0{,}0172\sqrt{0{,}5} < \varsigma_i < m_i + 3{,}1824 \times 0{,}0172\sqrt{0{,}5}$$

o bé

$$\zeta_i = m_i \pm 0{,}039$$

Fent els càlculs,

$$758{,}185 < \zeta_1 < 758{,}262$$
$$797{,}592 < \zeta_2 < 759{,}669$$
$$784{,}196 < \zeta_3 < 784{,}274$$

Observem la major precisió de l'estimació per intervals. Sense el concepte d'interval de confiança només podíem dir que, per exemple, l'estació D es troba a una altura d'"aproximadament" 758,223 m sobre el nivell del mar. Ara podem dir que, amb una probabilitat del 95%, l'estació D es troba a una altura sobre el nivell del mar d'entre 758,185 i 758,262 m.

Calculem, ara, l'interval de confiança per al vertader error en les observacions σ. Amb 3 graus de llibertat i nivell de significació $\alpha = 0{,}05$, tenim $\chi^2_a = 0{,}2158$ i $\chi^2_b = 9{,}3562$. Per tant, recordant que $v^T v = 0{,}00089$ podem dir, amb un 95% de confiança, que

$$\sqrt{\frac{0{,}00089}{9{,}3562}} < \sigma < \sqrt{\frac{0{,}00089}{0{,}2158}}$$

o bé que

$$0{,}01 < \sigma < 0{,}064$$

2.4 Observacions ponderades

Suposem que tenim el mateix *sistema sobredeterminat* $Ax = u$ amb la mateixa definició de *correccions* o *residus* $v = Ax - u$, però que, ara, no totes les observacions estan fetes en les mateixes circumstàncies i que, per tant, s'han de ponderar de manera diferent.

Això equival a considerar que el vector aleatori n-dimensional $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, té associat un vector de desviacions tipus $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ de components σ_i diferents o no necessàriament iguals i, fixada la variància de referència σ^2, el corresponent vector de variàncies normalitzades $(\sigma^2_1/\sigma^2, \sigma^2_2/\sigma^2, ..., \sigma^2_n/\sigma^2)$ i el corresponent vector de pesos format pels respectius valors inversos de les variàncies normalitzades $(p_1, p_2, ..., p_n) = (\sigma^2/\sigma^2_1, \sigma^2/\sigma^2_2, ..., \sigma^2/\sigma^2_n)$.

Com que suposem que les observacions $u_1, u_2, ..., u_n$ són independents, la *matriu de variància-covariància* (model estocàstic) serà diagonal:

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

La *matriu cofactor* serà

$$Q_u = \frac{1}{\sigma^2}\Sigma_u \tag{2.16}$$

I la *matriu pes*

$$W_u = Q^{-1}{}_u = \sigma^2 \Sigma^{-1}{}_u$$

serà la matriu diagonal

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

2.4.1 Mínims quadrats i màxima versemblança

Deduïm el criteri de mínims quadrats a partir del de màxima versemblança, corresponent al cas d'observacions ponderades. Considerant, en l'expressió (2.5) de la funció de versemblança, que cada observació u_i té variància

$$\sigma^2_i = \sigma^2/p_i$$

s'obté

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} f(u_i) = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - \sum a_{ij} x_j)^2} \tag{2.18}$$

que serà màxima quan el sumatori de l'exponent

$$v^T P v = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{h} a_{ij} x_j \right)^2$$

que és la suma ponderada dels residus al quadrat, sigui mínim.

Amb una demostració anàloga a la de la proposició 1 s'estableix la següent proposició per al cas corresponent a observacions ponderades.

Proposició 8

El vector $m = (m_1, m_2, ..., m_h)$ solució del sistema $Ax = u + v$ que fa mínima la quantitat $v^T P v$, és determinat per l'expressió

$$m = N^{-1} A^T P u \tag{2.19}$$

on

$$N = A^T P A \tag{2.20}$$

Definició 4 *Sistema d'equacions normals per a observacions indirectes ponderades*

Donat el sistema incompatible sobredeterminat $Ax = u$, on les observacions del vector u són ponderades amb matriu de pesos P, s'anomena *sistema d'equacions normals* el sistema compatible determinat

$$Nx = A^T P u \tag{2.21}$$

Observació

Si en el sistema inicial $Ax = u$ es multiplica cada equació per l'arrel quadrada $\sqrt{p_i}$ del pes de la corresponent observació u_i:

$$\begin{cases} \sqrt{p_1}\,a_{11}x_1 + \sqrt{p_1}\,a_{12}x_2 + \ldots + \sqrt{p_1}\,a_{1h}x_h = \sqrt{p_1}\,u_1 \\ \sqrt{p_2}\,a_{21}x_1 + \sqrt{p_2}\,a_{22}x_2 + \ldots + \sqrt{p_2}\,a_{2h}x_h = \sqrt{p_2}\,u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt{p_n}\,a_{n1}x_1 + \sqrt{p_n}\,a_{n2}x_2 + \ldots + \sqrt{p_n}\,a_{nh}x_h = \sqrt{p_n}\,u_n \end{cases} \tag{2.22}$$

i es considera com un sistema d'observacions no ponderades, amb els nous coeficients

$$\tilde{a}_{ij} = \sqrt{p_i}\,a_{ij}$$

i

$$\tilde{u}_i = \sqrt{p_i}\,u_i$$

aplicant la proposició 1 (sense matriu de pesos) s'obté el mateix resultat que aplicant la proposició 8 (amb matriu de pesos), ja que anomenant

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1h} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \ldots & \tilde{a}_{nh} \end{pmatrix}$$

i

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \ldots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix}$$

es té

$$A^T P A = \tilde{A}^T \tilde{A} \tag{2.23}$$

i

$$A^T P u = \tilde{A}^T \tilde{u} \tag{2.24}$$

Per tant, els sistemes amb observacions ponderades es poden tractar com sistemes amb observacions no ponderades (sense la matriu de pesos) un cop transformades les equacions de la forma indicada. Així, el resultat de la proposició 1 és equivalent al de la proposició 8, i per tant vàlid per a observacions ponderades, substituint la matriu A per $\tilde{A}$ i el vector u per $\tilde{u}$. Dit d'una altra manera, és equivalent considerar una matriu de pesos diagonal amb elements p_i i multiplicar l'equació i-èsima per $\sqrt{p_i}$, la qual cosa, salvat el factor de proporcionalitat σ, és el mateix que dividir-la per l'error o desviació tipus σ_i de la corresponent observació u_i.

Per aquest motiu prescindim de les demostracions en les següents proposicions, que seran les mateixes que les corresponents a observacions no ponderades, un cop multiplicada cada equació per l'arrel del pes escaient.

Primer resumirem les propietats estadístiques de l'estimador m. A continuació veurem com es propaga la matriu de variància-covariància Σ_u de les observacions u, és a dir, com es propaguen els seus errors, a la solució m per mínims quadrats donada per la proposició 8.

Proposició 9

La solució mínima quadràtica m del sistema sobredeterminat $Ax = u$ és un vector aleatori normal de dimensió h, estimador no esbiaixat dels paràmetres ζ:

$$E(m) = \zeta \tag{2.25}$$

2.5 Precisió en l'estimació per mínims quadrats amb observacions ponderades

Enunciarem els resultats anàlegs als establerts en l'apartat 2.3 però corresponents al cas d'observacions ponderades.

2.5.1 Errors associats a l'estimador per mínims quadrats

Es tracta de determinar els errors σ_m associats a l'estimador m calculat a partir de la proposició 8 com a conseqüència de la propagació de l'error σ de les observacions.

Proposició 10

Si la matriu cofactor de les observacions u és $Q_u = P^{-1}$, aleshores la matriu cofactor Q_m de la solució per mínims quadrats ($m = N^{-1}A^TPu$) del problema d'observacions indirectes donada per la proposició 8 és

$$Q_m = N^{-1} = (A^TPA)^{-1} \tag{2.26}$$

Observació

La matriu de variància-covariància de la solució m serà

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m = \sigma^2 N^{-1} = \sigma^2 (A^TPA)^{-1}$$

on σ^2 és la variància de referència.

Notem que, encara que la matriu de variància-covariància Σ_u de les observacions u_i sigui diagonal, en general la matriu de variància-covariància Σ_m dels resultats m_i no ho serà. Això vol dir que, encara que les observacions u_i siguin independents, en general els resultats m_i no ho seran. I això és lògic, ja que per calcular cada m_i intervenen totes les observacions u_i.

Segons la proposició 10 es poden establir els errors o les desviacions tipus associades a l'estimació paramètrica mitjançant el vector m.

Proposició 11

La desviació tipus σ_{mi} de cada component m_i , i = 1, 2, ..., h, de l'estimador mínim quadràtic m està relacionada amb la desviació tipus σ de referència de la forma

$$\sigma^2_{mi} = Q_{m\ ii}\ \sigma^2 \tag{2.27}$$

on $Q_{m\ ii}$, i = 1, 2, ..., h, són els elements de la diagonal principal de la inversa de la matriu del sistema d'equacions normals.

2.5.2 L'error en les observacions. Càlcul de la variància de referència

Si la variància σ^2 de referència és desconeguda s'haurà d'estimar a partir de magnituds observables, la qual cosa es podrà fer segons la proposició següent:

Proposició 12

La magnitud

$$Y = \frac{v^T P v}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n p_i v_i^2$$

és una variable aleatòria que segueix una llei χ^2_{n-h} amb n-h graus de llibertat.

Com a conseqüència d'aquest resultat, i atès que l'esperança matemàtica d'una variable χ^2_{n-h} és el nombre n-h de graus de llibertat, es dedueix la proposició següent:

Proposició 13

La magnitud

$$S = \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{n-h}} \tag{2.28}$$

és un estimador puntual no esbiaixat de la desviació tipus de referència σ.

Observació

Segons les proposicions 11 i 13, es pot establir el mètode per avaluar els errors en l'estimació paramètrica mitjançant el vector m en el cas que la variància de referència sigui desconeguda.

La matriu de variància-covariància Σ_m de la solució minimoquadràtica m s'estima a partir de la desviació tipus S de les observacions u_i segons la relació

$$\Sigma_m \sim S^2 Q_m$$

i, en particular,

$$\sigma^2_{mi} \sim S^2_{mi} = Q_{m\,ii}\; S^2 \tag{2.29}$$

on $Q_{m\,ii}$, $i = 1, 2, ..., h,$ són els elements de la diagonal principal de la inversa de la matriu del sistema d'equacions normals.

2.5.3 Estimació per intervals

Com a conseqüència de la proposició 12, podem afirmar directament que, fixat un nivell de significació α, *l'interval de confiança per al vertader valor de* σ és

$$\frac{\sqrt{v^T Pv}}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{v^T Pv}}{\sqrt{\chi_a^2}} \tag{2.30}$$

on χ^2_a i χ^2_b són els valors de la distribució khi quadrat amb n-h graus de llibertat, amb el significat habitual per al corresponent valor de α.

Per exemple, si el nivell de significació és del 5%, és a dir, el nivell de confiança del 95%, aleshores χ^2_a i χ^2_b són els valors de la distribució khi quadrat amb n-h graus de llibertat tals que $P(\chi^2 < \chi^2_a) = P(\chi^2 > \chi^2_b) = 0{,}025$.

Quant a l'estimació per intervals del vertader valor dels paràmetres ζ_i a partir dels resultats m_i, es pot fer a partir de la proposició següent:

Proposició 14

La variable

$$t_i = \frac{m_i - \varsigma_i}{S\sqrt{Q_{mii}}}$$

segueix una llei t de Student amb n-h graus de llibertat.

Ara estem en condicions d'afirmar que, fixat un nivell de significació α, *l'interval de confiança per a l'estimació dels paràmetres* ζ_i és

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \varsigma_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \tag{2.31}$$

$i = 1, 2, ..., h$, on t_α és el valor de la variable t de Student amb n-h graus de llibertat tal que

$$P(-t_\alpha < t_{n\text{-}h} < t_\alpha) = 1\text{-}\alpha.$$

Exemple 8 [MIG81] *Anivellació amb observacions ponderades*

Es volen calcular els nivells Hb, Hc i Hd de tres punts B, C i D, respectivament, conegut el nivell Ha = 281,130 m d'un punt A de referència i observats els desnivells següents (Fig. 2.3):

Des de punt més baix	Fins a punt més alt	Desnivell observat	Distància entre els punts	Pes de l'observació
B	A	h_1 = 11,973	20	1,400
D	B	h_2 = 10,940	12	2,333
D	A	h_3 = 22,932	15	1,867
B	C	h_4 = 21,040	28	1,000
D	C	h_5 = 31,891	20	1,400
A	C	h_6 = 8,983	26	1,077

Taula 2.1

Els pesos s'han posat de forma que resultin inversament proporcionals a la distància entre els punts corresponents al desnivell respectiu.

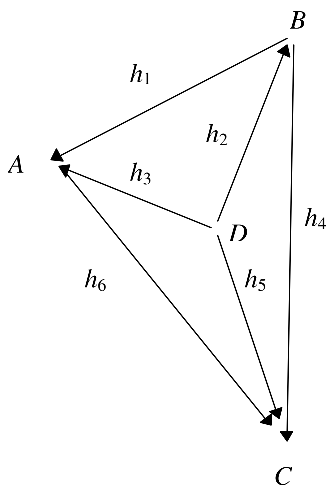

Fig. 2.3 Anivellació

Escrivint les dades en forma de sistema d'equacions, tenim

$$
\begin{aligned}
Ha - Hb &= h_1 \\
Hb - Hd &= h_2 \\
Ha - Hd &= h_3 \\
-Hb + Hc &= h_4 \\
Hc - Hd &= h_5 \\
-Ha + Hc &= h_6
\end{aligned}
$$

Però, com que Ha és coneguda, el sistema és de 6 equacions amb 3 incògnites, i s'escriurà

$$
\begin{aligned}
Hb &= Ha - h_1 \\
Hb - Hd &= h_2 \\
Hd &= Ha - h_3 \\
- Hb + Hc &= h_4 \\
Hc - Hd &= h_5 \\
Hc &= Ha + h_6
\end{aligned}
$$

La resolució d'aquest exemple està feta amb el programa MAPLE V, amb els paquets d'àlgebra lineal i estadística.

Es defineix la matriu de coeficients del sistema sobredeterminat d'observacions indirectes:

```
> A:=matrix(6,3,[1,0,0,1,0,-1,0,0,1,-1,1,0,0,1,-1,0,1,0]);
> At:=transpose(a):
```

$$
A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Graus de llibertat del sistema:

```
> gdl:=6-3:
```

Vector de termes independents que conté les observacions.

```
> u:=vector(6,[269.157,10.94,258.198,21.04,31.891,290.113]);
```

$$u := [269.157, 10.94, 258.198, 21.04, 31.891, 290.113]$$

Matriu de pesos:

```
> P:=diag(1.400,2.333,1.867,1.000,1.400,1.077);
```

$$
P := \begin{bmatrix} 1.400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.867 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.077 \end{bmatrix}
$$

Matriu del sistema d'equacions normals:

```
> N:=evalm(&*(At,P,A));
```

$$
N := \begin{bmatrix} 4.733 & -1.000 & -2.333 \\ -1.000 & 3.477 & -1.400 \\ -2.333 & -1.400 & 5.600 \end{bmatrix}
$$

Termes independents del sistema d'equacions normals:

```
> atpu:=evalm(&*(At,P,u));
```

$$atpu := [381.302820, 378.139101, 411.885246]$$

Matriu cofactor de m = inversa de N:

```
> Qm:=inverse(N);
```

$$Qm := \begin{bmatrix} .3379 & .1710 & .1835 \\ .1710 & .4064 & .1728 \\ .1835 & .1728 & .2982 \end{bmatrix}$$

Estimador minimoquadràtic dels nivells = solució del sistema d'equacions normals:

```
> m:=evalm(&*(Qm,atpu));
```

$$m := [269.136, 290.125, 258.206]$$

Càlcul dels residus:

```
> un:=evalm(&*(A,m)):
> v:=evalm(un-u);
> vt:=transpose(v):
```

$$v := [-.0204, -.0098, .0084, -.0515, .0275, .0120]$$

Càlcul de la variància de referència:

```
> vtpv:=evalm(&*(vt,p,v));
```

$$vtpv := .0048$$

```
> vref:=vtpv/gdl;
```

$$vref := .0016$$

Matriu de variància covariància del vector m:

```
> sigm:=evalm(vref*Qm);
```

$$Sigm := \begin{bmatrix} .00054 & .00027 & .00029 \\ .00027 & .00065 & .00027 \\ .00029 & .00027 & .00047 \end{bmatrix}$$

Desviacions tipus de la solució m:

```
> sm1:=sqrt(sigm[1,1]);
> sm2:=sqrt(sigm[2,2]);
> sm3:=sqrt(sigm[3,3]);
```

$$sm1 := .023$$
$$sm2 := .025$$
$$sm3 := .022$$

Estimació per intervals del 95% confiança o nivell de significació 0.05:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 3.182446$$

Errors de la solució m amb nivell de significació 0.05:

```
> d1:=sm1*t;
> d2:=sm2*t;
> d3:=sm3*t;
```

$$d1 := .07$$
$$d2 := .08$$
$$d3 := .07$$

Els nivells dels punts B, C i D amb un 95% de confiança són

$$Hb = 269.14 \pm 0.07 \text{ m}$$
$$Hc = 290.12 \pm 0.08 \text{ m}$$
$$Hd = 258.21 \pm 0.07 \text{ m}$$

Observem que, si l'error és de l'ordre dels centímetres, no té sentit donar els nivells amb més precisió.

2.6 El·lipse d'error

Moltes vegades, la solució per mínims quadrats del problema d'observacions indirectes consistirà en les coordenades $m = (m_1, m_2, ..., m_h) = (x_A, y_A, x_B, y_B, ...)$ d'un conjunt de punts $A, B, ...,$ *en un cert sistema de referència,* acompanyades de la seva matriu de variància-covariància Σ_m, que dóna l'error de cada coordenada i la correlació entre si, *en aquest sistema de referència.*

La pregunta que ens fem en aquest apartat és: Com afecta un canvi de sistema de referència (per exemple, passar d'un sistema de coordenades local a coordenades UTM) els resultats i els seus errors?

Considerarem el problema per a un sol punt P de coordenades (x, y) en el sistema inicial amb desviacions tipus S_x i S_y i covariància S_{xy}. Suposem que el nou sistema s'obté de l'inicial mitjançant un gir d'angle α (Fig. 2.4). Recordant la matriu de la transformació ortogonal del pla consistent en un gir d'eixos d'angle α, sabem que la relació entre les coordenades (x, y) en el sistema inicial i les coordenades (x', y') en el nou sistema és determinada per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

o bé per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

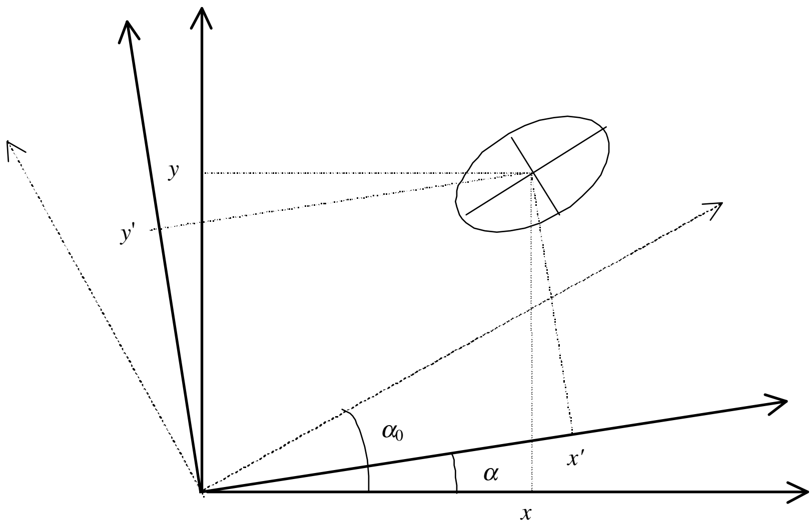

Fig. 2.4 Gir d'eixos

Seguint la llei de propagació de variàncies i covariàncies, podem escriure

$$\begin{pmatrix} S_{x'}^2 & S_{x'y'} \\ S_{x'y'} & S_{y'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

És a dir,

$$S_{x'}^2 = cos^2\alpha\, S_x^2 + 2sin\alpha\, cos\alpha\, S_{xy} + sin^2\alpha\, S_y^2$$

$$S_{y'}^2 = sin^2\alpha\, S_x^2 - 2sin\alpha\, cos\alpha\, S_{xy} + cos^2\alpha\, S_y^2$$

$$S_{x'y'} = -cos\alpha\, sin\alpha\, S_x^2 + (cos^2\alpha - sin^2\alpha) S_{xy} + sin\alpha\, cos\alpha\, S_y^2$$

Observació

Les variàncies $S_{x'}^2$, $S_{y'}^2$ i la covariància $S_{x'y'}$ són funcions de l'angle de gir α. Prenent coordenades polars, les corbes

$$S_{x'}^2(\alpha) = cos^2\alpha\, S_x^2 + 2sin\alpha\, cos\alpha\, S_{xy} + sin^2\alpha\, S_y^2$$

i (2.32)

$$S_{y'}^2(\alpha) = sin^2\alpha\, S_x^2 - 2sin\alpha\, cos\alpha\, S_{xy} + cos^2\alpha\, S_y^2$$

són dues corbes amb radis vectors $S_{x'}^2$ i $S_{y'}^2$, anomenades *corbes de variància* (o “corbes pedal” en alguns contextos), iguals i amb els eixos perpendiculars (Fig. 2.5).

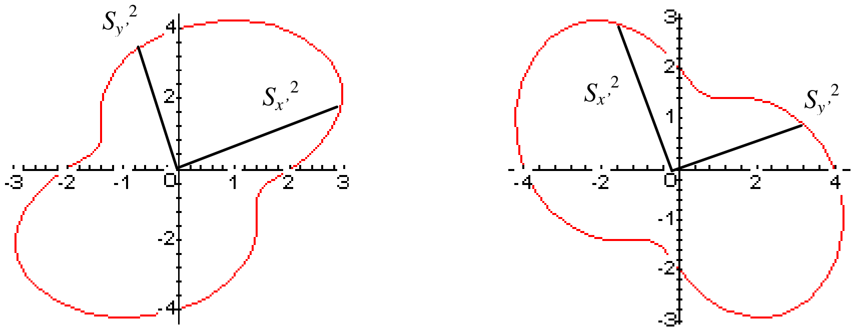

Fig. 2.5 Corbes de variància

Donat un angle α, les dues variàncies $S_{x'}^2(\alpha)$ i $S_{y'}^2(\alpha)$ són els radis vectors respectius de cada una d'aquestes "corbes de variància". O bé, amb una sola corba, són els radis vectors perpendiculars, ja que $S_{y'}^2(\alpha) = S_{x'}^2(\alpha+\pi/2)$ (Fig. 2.5).

Traient l'arrel quadrada

$$S_{x'}(\alpha) = \sqrt{(\cos^2\alpha\, S_x^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, S_{xy} + \sin^2\alpha\, S_y^2)}$$

i (2.33)

$$S_{y'}(\alpha) = \sqrt{(\sin^2\alpha\, S_x^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\, S_{xy} + \cos^2\alpha\, S_y^2)}$$

S'obtenen *corbes de desviació tipus* de forma semblant a les corbes de variància. Les desviacions tipus màxima i mínima són els semieixos de l'anomenada ***el·lipse d'error*** i corresponen a un cert angle de gir α_0 (fig. 2.4). Aquests paràmetres són determinats per la proposició següent:

Proposició 15

Sigui $m = (m_1, m_2, ..., m_h)$ la solució per mínims quadrats d'un problema d'observacions indirectes. Siguin $(m_i, m_{i+1}) = (x, y)$ les coordenades d'un punt qualsevol de la solució. Sigui la corresponent submatriu

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

de la matriu cofactor de la solució

$$N^{-1} = Q_m = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & & ... & .... \\ Q_{12} & Q_{22} & & & \\ ... & & Q_{33} & Q_{34} & ... \\ & & Q_{34} & Q_{44} & \\ ... & & ... & & ... \end{pmatrix} = \frac{1}{S^2}\begin{pmatrix} S_1^2 & S_{12} & & ... & .... \\ S_{12} & S_2^2 & & & \\ ... & & S_3^2 & S_{34} & ... \\ & & S_{34} & S_4^2 & \\ ... & & ... & & ... \end{pmatrix}$$

Els semieixos (al quadrat) de l'el·lipse d'error són

$$S_{màx}^2 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{2} + \sqrt{S_{xy}^2 + \frac{(S_x^2 - S_y^2)^2}{4}}$$

i (2.34)

$$S_{\text{mín}}^2 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{2} - \sqrt{S_{xy}^2 + \frac{(S_x^2 - S_y^2)^2}{4}}$$

orientats segons un angle α_0 tal que

$$tan\,2\alpha_0 = \frac{2S_{xy}}{S_x^2 - S_y^2} \tag{2.35}$$

El quadrant on es troba α_0 es determina analitzant el signe de numerador i denominador en (2.35).

Demostració

Derivant l'expressió de $S_{x'}^2\,(\alpha)$ o bé de $S_{y'}^2\,(\alpha)$ respecte de α i igualant a zero, en ambdós casos s'obté

$$S_{x'y'} = -cos\alpha\, sin\alpha\, S_x^2 + (cos^2\alpha - sin^2\alpha)S_{xy} + sin\alpha\, cos\alpha\, S_y^2 = 0$$

Tenint en compte les identitats trigonomètriques

$$2sin\alpha\, cos\alpha = sin2\alpha \text{ i } (cos^2\alpha - sin^2\alpha) = cos2\alpha$$

queda

$$(S_y^2 - S_x^2)\, sin2\alpha + 2S_{xy}\, cos2\alpha = 0$$

d'on es dedueix l'expressió proposada per a $tan2\alpha_0$. Introduint aquest valor de α_0 en les expressions de $S_{x'}^2$ i de $S_{y'}^2$, i mitjançant les identitats trigonomètriques adients, s'obtenen les expressions proposades per a $S^2_{mín}$ i $S^2_{màx}$.

Observacions

1. En l'anterior demostració es veu que la condició que la variància $S_{x'}^2$ o $S_{y'}^2$ sigui màxima o mínima equival que la covariància $S_{x'y'}$ sigui nul·la o, el que és el mateix, que les variables x' i y' estiguin no correlacionades.

2. Les expressions (2.34) de $S^2_{mín}$ i $S^2_{màx}$ són els valors propis de la matriu de variància-covariància del vector (x, y),

$$\begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y^2 \end{pmatrix}$$

segons es dedueix calculant les arrels del polinomi característic.

3. En termes de la matriu cofactor, els semieixos de l'el·lipse d'error s'escriuen

$$S_{màx}^2 = S^2\left(\frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2}+\sqrt{Q_{xy}^2+\frac{(Q_{xx}-Q_{yy})^2}{4}}\right)$$

i (2.36)

$$S_{mín}^2 = S^2\left(\frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2}-\sqrt{Q_{xy}^2+\frac{(Q_{xx}-Q_{yy})^2}{4}}\right)$$

orientats segons un angle α_0 tal que

$$tan\,2\alpha_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}} \tag{2.37}$$

Exemple 9 [MIG81] *El·lipse d'error*

L'error en el posicionament d'un punt d'estació en un aixecament topogràfic és determinat pels paràmetres

$$\sigma_x = 0{,}22 \text{ m}$$
$$\sigma_y = 0{,}14 \text{ m}$$
$$\sigma_{xy} = 0{,}0246 \text{ m}^2$$

Es tracta de dibuixar la corba de desviació tipus, calcular els paràmetres (semieixos i orientació) de l'el·lipse d'error i dibuixar aquesta el·lipse. Per fer els càlculs i les representacions gràfiques utilitzarem MAPLE V amb el paquet gràfic Plottools.

Introduïm les dades del problema:

```
> sx:=.22:
> sx2:=sx^2:
> sy:=.14:
> sy2:=sy^2:
> sxy:=.0246:
> sxy2:=sxy^2:
```

Calculem els semieixos i la inclinació de l'el·lipse d'error segons (2.34) i (2.35)

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
```

$$smax := .250$$

```
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
```

$$smin := .074$$

```
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
```

$$theta := 0.5206$$

Com que numerador i denominador en (2.35) són tots dos positius, l'angle *theta* està en el primer quadrant.

Dibuixem la corba de desviació tipus:

```
plot([sqrt(sx2*cos(t)^2+2*sxy*cos(t)*sin(t)+sy2*sin(t)^2),t,t=0..2*P
i], coords=polar);
```

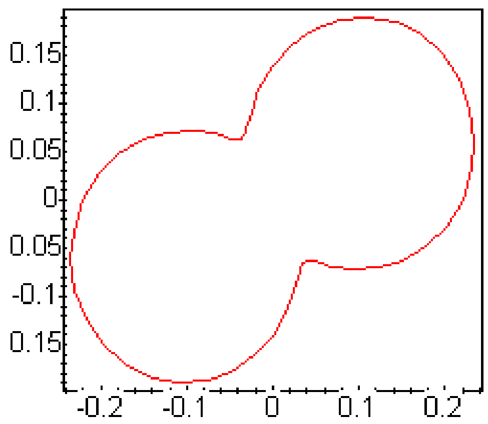

Fig. 2.6 Corba de desviació tipus

Dibuixem l'el·lipse d'error:

```
> elli:=ellipse([0,0],smax,smin):plots[display](rotate(elli,theta));
```

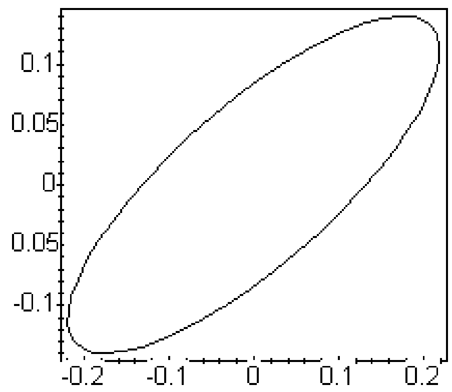

Fig. 2.7 El·lipse d'error

2.7 Cas particular d'observacions directes

Suposem que observem n vegades una certa magnitud x amb resultats $u_1, u_2, ..., u_n$. Podem plantejar el problema de trobar el millor estimador per mínims quadrats en els mateixos termes que ho hem fet per a observacions indirectes, considerant que tenim el sistema de n equacions amb 1 incògnita

$$\begin{gathered} x = u_1 \\ x = u_2 \\ \dots \\ x = u_n \end{gathered}$$

que, matricialment, s'escriu

$$Ax = u$$

on A i u són les matrius columna

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

En aquest cas tenim

$$A^T A = n$$

$$(A^T A)^{-1} = 1/n$$

$$A^T u = \Sigma u_i$$

Per tant, aplicant la proposició 1, la solució per mínims quadrats del sistema és la mitjana aritmètica

$$m = (A^T A)^{-1} A^T u = (\Sigma u_i)/n$$

Per a observacions ponderades, considerant la matriu de pesos

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

tenim

$$\begin{gathered} A^T PA = \Sigma P_i \\ (A^T PA)^{-1} = 1/\Sigma P_i \\ A^T Pu = \Sigma P_i u_i \end{gathered}$$

Per tant, en aquest cas, aplicant la proposició 8, la solució per mínims quadrats és la mitjana ponderada

$$m_p = (A^T PA)^{-1} A^T Pu = (\Sigma P_i u_i)/ \Sigma P_i$$

A més, aplicant la proposició 11, prenent

$$Q = (A^T PA)^{-1} = 1/\Sigma P_i$$

s'obté l'error de la mitjana ponderada

$$\sigma_{mp}{}^2 = \sigma_p{}^2/\Sigma P_i$$

que, en cas d'observacions no ponderades (P_i =1), s'escriu

$$\sigma^2_m = \sigma^2/n$$

2.8 Equacions no lineals

Fins ara hem suposat que el **model matemàtic** que estableix la relació entre el vector d'observacions $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ i el vector d'incògnites $x = (x_1, x_2, ..., x_h)$ s'expressava mitjançant un sistema d'**equacions lineals**

$$A\,x = u$$

on els termes independents contenen les observacions. Però, en general, aquesta relació és determinada per un sistema de n equacions amb h incògnites de la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_h) \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_h) \\ &\dots \\ u_n &= f_n(x_1, x_2, ..., x_h) \end{aligned} \tag{2.38}$$

on les n funcions f_i són **no lineals** (vegeu, com exemple, l'exercici 5).

Per poder aplicar la teoria exposada fins ara, haurem de **linealitzar** el sistema desenvolupant per Taylor les n funcions f_i fins a primer ordre en l'entorn d'un punt

$$x^0 = (x^0{}_1, x^0{}_2, ..., x^0{}_h)$$

Anomenant

$$\begin{aligned} u^0{}_i &= f_i\,(x^0) \\ \Delta u_i &= u_i - u^0{}_i \\ \Delta\, x_i &= x_i - x^0{}_i \end{aligned}$$

i fent els desenvolupaments, s'obté el **sistema lineal en els increments amb els observables en els termes independents**:

$$
\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1(x^0)}{\partial x_h}\Delta x_h \\
\Delta u_2 &= \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_2(x^0)}{\partial x_h}\Delta x_h \\
&\ldots \\
\Delta u_n &= \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_n(x^0)}{\partial x_h}\Delta x_h
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Observació

És molt important que les observacions estiguin en els termes independents del sistema lineal, tal com s'ha obtingut en l'anterior linealització, per tal de poder aplicar les lleis de propagació dels errors i donar l'error de l'estimador a partir dels errors de les observacions.

2.8.1 Iteracions

Sabem que la linealització és vàlida *en un entorn de* x^0. Si aquest punt és una bona aproximació a la solució que busquem, aleshores la solució

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_h)$$

per mínims quadrats del sistema lineal en els increments ens proporcionarà una solució acceptable del problema:

$$x = x^0 + \Delta x$$

Si el punt x^0 no és una bona aproximació, aleshores **es pot iterar el mètode** fins a obtenir l'aproximació volguda. Partim del punt x^0 i anomenem $\Delta^0 x$ la solució per mínims quadrats del sistema lineal en els increments i $x^1 = x^0 + \Delta^0 x$ la solució del problema corresponent. Aleshores, si repetim el procés partint del punt x^1, obtenim la nova aproximació $x^2 = x^1 + \Delta^1 x$, i així successivament.

Aquesta iteració es pot considerar com una generalització, per a sistemes d'equacions, del mètode de Newton per trobar les arrels d'equacions $u = f(x)$ no lineals. La convergència de la successió (x^i) cap a la solució correcta dependrà del punt inicial x^0. Si aquest punt és més o menys raonable com a aproximació de la solució buscada, amb poques iteracions s'arribarà a una bona solució.

El problema resideix a establir el **nombre d'iteracions** o, el que és el mateix, a donar un criteri per aturar el procés iteratiu. El criteri més directe i intuïtiu consisteix [MIG81] a aturar el procés quan la correcció $\Delta^i x$ sigui d'un ordre de magnitud inferior a la tolerància prèviament establerta, o també quan el valor $f(x^i)$ dels observables calculat a partir de la solució x^i corresponent a la iteració i-èsima se sembla prou als valors observats u.

Tanmateix, no hem de perdre de vista que el mètode dels mínims quadrats empleat per obtenir la correcció $\Delta^i x$ de cada iteració es basa en el criteri de fer mínima la suma ponderada $v^T P v$ dels residus al quadrat. Per tant, si la iteració és convergent, aquesta magnitud ha de ser cada vegada més petita, i el criteri més consistent amb el mètode [LEI95] serà el d'aturar el procés quan $v^T P v$ pari de decréixer o s'estabilitzi.

El **test estadístic** més important per establir la bondat de l'ajust [KOC87], [LEI95] es basa en la proposició 12: si σ^2 és la variància de referència o de les observacions de pes unitat (variància de referència **a priori**) i $S^2 = v^T P v/(n-h)$ és el seu estimador (variància de referència **a posteriori**), aleshores el quocient $(n-h)S^2/\sigma^2 = v^T P v/\sigma^2$ és una variable aleatòria que segueix una llei χ^2 amb n-h graus de llibertat.

El test es basa en la suposició que, a l'hora de considerar la desviació tipus σ_i de les observacions i donar els pesos corresponents $P_i = \sigma^2/\sigma_i^2$, hem fet alguna hipòtesi sobre el valor de la variància de referència σ^2 corresponent a les observacions de pes unitat (variància de referència **a priori**). Acceptarem que l'ajust ha estat bo si, fixat un nivell de significació α, la magnitud $v^T P v/\sigma^2$ es manté entre els valors χ^2_a i χ^2_b de la variable χ^2 amb n-h graus de llibertat que deixen una àrea $\alpha/2$ a cada extrem de la distribució, essent la probabilitat $P(\chi^2_a < \chi^2 < \chi^2_b) = 1 - \alpha$.

2.8.2 Triangulació. Equacions d'angle

Es tracta de determinar les coordenades d'un conjunt de punts a partir d'observacions d'azimuts. És a dir que, en aquest cas, els observables són angles. No farem distincions innecessàries entre interseccions directes i inverses, de manera que, en principi, considerarem desconegudes les coordenades dels dos punts que intervenen, el punt d'estació $A(x_A, y_A)$ i el punt visat $B(x_B, y_B)$.

A més, també considerarem desconeguda la desorientació Σ_A del punt d'estació. Anomenant $\theta_{A,B}$ l'azimut de la recta AB (Fig. 2.8) i $L_{A,B}$ la lectura amb aparell desorientat, s'escriu

$$\theta_{A,B} = L_{A,B} + \Sigma_A \tag{2.40}$$

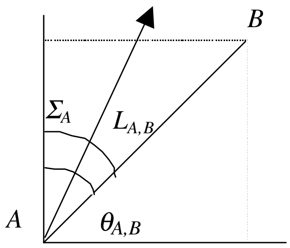

Fig. 2.8 Mesura d'angle

La relació que lliga l'observació $L_{A,B}$ amb les 5 incògnites x_A, y_A, x_B, y_B i Σ_A és

$$tg\ \theta_{A,B} = (x_B - x_A)/(y_B - y_A)$$

o bé

$$L_{A,B} = arctg \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - \Sigma_A \tag{2.41}$$

que és una expressió *no lineal* de la forma

$$L_{A,B} = f(x_A,\ y_A,\ x_B,\ y_B,\ \Sigma_A)$$

Per a linealitzar-la, considerarem un vector $x^0 = (x^0_A,\ y^0_A,\ x^0_B,\ y^0_B,\ \Sigma^0_A)$ de coordenades conegudes i anomenarem

$$\begin{aligned}
L^0_{A,B} &= f(x^0)\\
\Delta L_{A,B} &= L_{A,B} - L^0_{A,B}\\
\Delta x_A &= x_A - x^0_A\\
\Delta y_A &= y_A - y^0_A\\
\Delta x_B &= x_B - x^0_B\\
\Delta y_B &= y_B - y^0_B\\
\Delta\Sigma_A &= \Sigma_A - \Sigma^0_A\\
D^2_0 &= (x^0_B - x^0_A)^2 + (y^0_B - y^0_A)^2
\end{aligned}$$

Fent el desenvolupament de Taylor fins a ordre 1 s'obté l'*equació lineal en els increments amb l'observable al terme independent*

$$\Delta L_{A,B} = -\frac{y^0_B - y^0_A}{D^2_0}\Delta x_A + \frac{y^0_B - y^0_A}{D^2_0}\Delta x_B + \frac{x^0_B - x^0_A}{D^2_0}\Delta y_A - \frac{x^0_B - x^0_A}{D^2_0}\Delta y_B - \Delta\Sigma_A \qquad (2.42)$$

que també es pot escriure

$$\Delta L_{A,B} = -\frac{cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_A + \frac{cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_B + \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_A - \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_B - \Delta\Sigma_A \qquad (2.43)$$

Correcció d'orientació

En general es parteix d'unes coordenades $(x^0_A,\ y^0_A)$ i $(x^0_B,\ y^0_B)$ aproximades i es calcula l'azimut aproximat

$$\theta^0_{A,B} = \text{arctg}\ \frac{x^0_B - x^0_A}{y^0_B - y^0_A} \qquad (2.44)$$

L'orientació aproximada s'escriu

$$L^0_{AB} = \theta^0_{A,B} - \Sigma^0_A$$

Per tant, al introduir els increments

$$\Delta L_{A,B} = L_{A,B} - \theta^0_{A,B} + \Sigma^0_A$$

i

$$\Delta\Sigma_A = \Sigma_A - \Sigma^0_A$$

en les equacions linealitzades (2.42) o (2.43), es cancel·la la desorientació aproximada Σ^0_A i resulta el següent:

Si es tracta d'una **intersecció directa**, aleshores no intervenen les variables Δx_A , Δy_A i $\Delta\Sigma_A$, ja que les coordenades $x_A,\ y_A$ i la desorientació Σ_A són constants conegudes.

$$L_{A,B} - \theta^0_{AB} = \frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_B - \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_B \qquad (2.45)$$

Si es tracta d'una **intersecció inversa**, aleshores desapareixen les incògnites Δx_B i Δy_B corresponents al punt visat.

$$L_{A,B} - \theta^0_{AB} = -\frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_A + \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_A - \Sigma_A \qquad (2.46)$$

Observació

Hi ha altres mètodes per tractar la correcció d'orientació basats en, per exemple, corregir totes les lectures fetes des del punt A amb la magnitud $\Sigma^0_A = L_{A,B} - \theta^0_{A,B}$, o eliminar la desorientació Σ_A de les equacions utilitzant una mitjana de les desorientacions aproximades $\Sigma^0_{Ai} = L_{A,Bi} - \theta^0_{A,Bi}$ calculades a partir de totes les lectures fetes des del punt A [CHB96].

Quant a les unitats, el procés de càlcul (desenvolupament en sèrie de Taylor) que ha conduït a aquestes equacions lineals obliga que els angles $L_{A,B}$ i Σ_A estiguin expressats en radiants. En cas que les observacions es facin en segons sexagesimals (centesimals), caldrà dividir la lectura $L_{A,B}$ i la desorientació Σ_A pel factor de conversió fc = 180×3600/π = 206264.806 s/rad (fc = 200×10000/π = 636619.772 s/rad),

$$\frac{L_{A,B} - \theta^0_{AB}}{fc} rad = -\frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_A + \frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_B + \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_A - \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_B - \frac{\Sigma_A}{fc} rad \qquad (2.47)$$

o bé, si es vol treballar amb unitats de segons d'arc,

$$(L_{A,B} - \theta^0_{AB})s = -fc\frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_A + fc\frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_B + fc\frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_A - fc\frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_B - \Sigma_A s \qquad (2.48)$$

L'avantatge d'aquesta equació en front d'equacions del tipus (2.47) amb unitats de radiants és que, en aquell cas, per mantenir una precisió de, per exemple, dècimes de segon d'arc, s'ha de treballar amb molts decimals (1" = 1/fc = 0.000004848 rad; és a dir, que una dècima de segon és aproximadament 5 deumilionèsimes de radint). D'altra banda, les xifres en segons d'arc són més entenedores. Observem, a més, que, en tenir unitats d'angle, aquestes equacions són adimensionals.

Exemple 10 [LAU83] *Triangulació. Intersecció directa*

Es coneixen les coordenades de 4 estacions (en metres),

$P1$ [12875,273, 28679,604]
$P2$ [12273,916, 29612,311]
$P3$ [14117,387, 30999,974]
$P4$ [14717,693, 30168,703]

des de les quals es visa un punt P de coordenades desconegudes. Les orientacions observades de les visuals són, respectivament,

$$lo_1 = 34^\circ\ 47'\ 52'',3$$
$$lo_2 = 81^\circ\ \ 1'\ 22'',9$$
$$lo_3 = 200^\circ\ 40'\ 18'',5$$
$$lo_4 = 252^\circ\ \ 9'\ 42'',6$$

Es tracta d'estimar les coordenades de P partint dels valors aproximats:

$$P\ [13677{,}500,\ 29834{,}000]$$

Resolució amb MAPLE V

Carreguem llibreries:

```
> with(linalg):with(plots):with(stats):with(plottools):
```

Entrem les coordenades conegudes dels punts d'estació pi, les coordenades aproximades del punt visat p i les visuals [punt estació, punt visat]:

```
> p1:=[12875.273, 28679.604]: p2:=[12273.916, 29612.311]:
> p3:=[14117.387, 30999.974]: p4:=[14717.693, 30168.703]:
> p :=[13677.500, 29834.000]:
> vis1:=[p1,p]: vis2:=[p2,p]: vis3:=[p3,p]: vis4:=[p4,p]:
```

Dibuixem les visuals:

```
> plp:=polygonplot([vis1,vis2,vis3,vis4],axes=none):
> txp:=textplot([[12875.273, 28679.604, 'P1'], [12273.916, 29612.311
'P2'], [14117.387, 30999.974, 'P3'], [14717.693, 30168.703, 'P4'],
[13677.5, 29834, 'P']]):
> display({plp,txp});
```

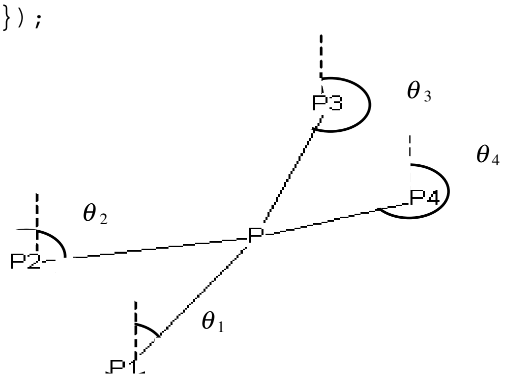

Fig. 2.9 Intersecció directa

Orientació calculada lc de cada visual. El dibuix ens permet veure en quins casos cal sumar 180º a l'arc tangent corresponent. Calculem també la diferència dl entre les lectures o orientacions observades *lo* i les calculades *lc*, en segons d'arc. *fc* = factor de conversió de radians a segons sexagesimals.

```
> fc:=evalf(180*3600/Pi):
> lc:=vector(4,[]): lo:=vector(4,[]): dl:=vector(4,[]):
> lc[1]:=arctan((p[1]-p1[1])/(p[2]-p1[2]))*fc:
> lo[1]:=34*3600 + 47*60 + 52.3:
> lc[2]:=arctan((p[1]-p2[1])/(p[2]-p2[2]))*fc:
> lo[2]:=81*3600 + 1*60 + 22.9:
> lc[3]:=evalf(arctan((p[1]-p3[1])/(p[2]-p3[2]))+Pi)*fc:
> lo[3]:=200*3600 + 40*60 + 18.5:
> lc[4]:=evalf(arctan((p[1]-p4[1])/(p[2]-p4[2]))+Pi)*fc:
> lo[4]:=252*3600 + 9*60 + 42.6:
> dl:=evalm(lo-lc);
```

$$dl := [4.2, -5.5, 6.5, -5.6]$$

Distàncies calculades *Dci* i coeficients de les equacions del tipus (2.48) en unitats de segons d'arc:

```
> Dc1:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
> a1:=cos(lc[1]/fc)*fc/Dc1: b1:=-sin(lc[1]/fc)*fc/Dc1:
> Dc2:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
> a2:=cos(lc[2]/fc)*fc/Dc2: b2:=-sin(lc[2]/fc)*fc/Dc2:
> Dc3:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
> a3:=cos(lc[3]/fc)*fc/Dc3: b3:=-sin(lc[3]/fc)*fc/Dc3:
> Dc4:=sqrt((p[1]-p4[1])^2+(p[2]-p4[2])^2):
> a4:=cos(lc[4]/fc)*fc/Dc4: b4:=-sin(lc[4]/fc)*fc/Dc4:
```

Matriu *A* del sistema i transposada *At*:

```
> A := matrix(4,2,[a1,b1,a2,b2,a3,b3,a4,b4]);
> At:=transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} 120.489 & -83.732 \\ 22.645 & -143.378 \\ -154.861 & 58.424 \\ -57.818 & 179.690 \end{bmatrix}$$

Matriu *N* del sistema normal i inversa *Qm*, cofactor de la solució:

```
> N:=evalm(At&*A);
> Qm:=inverse(N);
```

$$N := \begin{bmatrix} 42355.717 & -32773.040 \\ -32773.040 & 63270.644 \end{bmatrix}$$

$$Qm := \begin{bmatrix} .000039 & .000020 \\ .000020 & .000026 \end{bmatrix}$$

Solució m del sistema normal i coordenades pc del punt P corregides:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,dl));
> pc:=evalm(p+m);
```

$$m := [-.016, -.011]$$

$$pc := [13677.484, 29833.989]$$

Residus

```
> v:=evalm(A&*m-dl);
> vt:=transpose(v):
```

$$v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]$$

Els residus són correccions a les observacions. Comprovem si les observacions *lo2* corregides amb els residus coincideixen amb les direccions *lc2* calculades amb el punt P de coordenades pc corregides:

```
> lo2:=evalm((lo+v)/fc):
> lc2:=vector(4,[]):
> lc2[1]:=arctan((pc[1]-p1[1])/(pc[2]-p1[2])):
> lc2[2]:=arctan((pc[1]-p2[1])/(pc[2]-p2[2])):
> lc2[3]:=evalf(arctan((pc[1]-p3[1])/(pc[2]-p3[2]))+Pi):
> lc2[4]:=evalf(arctan((pc[1]-p4[1])/(pc[2]-p4[2]))+Pi):
> dl2:=evalm((lc2-lo2)*fc);
```

$$dl2 := [0, -.0004, -.0002, .0004]$$

Veiem que la diferència és de deumil·lèsimes de segon i podem donar l'ajust per bo. La correcció $m = (\Delta x, \Delta y)$ feta a les coordenades de P ha estat de prop d'1 cm.

Procedim, ara, a l'avaluació de l'error. Calculem la magnitud *vtv* que el procés ha fet mínima, l'estimador *s2* de la variància de referència, la desviació tipus (*sx*, *sy*) de m i, per tant, de les coordenades de P corregides i la seva covariància *sxy*. *gdl* = graus de llibertat.

```
> vtv:=evalm(vt&*v); gdl:= 4-2: s2:=vtv/gdl:
> sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2];
> sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$vtv := 115.725$$

$$sxy := .001$$

$$sx := .048$$

$$sy := .039$$

Podem dir, doncs, que les coordenades del punt P són

$$x = 13677.48 \text{ m amb desviació tipus } sx = 0.05 \text{ m}$$

$$y = 29833.99 \text{ m amb desviació tipus } sy = 0.04 \text{ m}$$

La desviació tipus o "error mitjà quadràtic" de les coordenades és de l'ordre dels centímetres. Per tant, la tercera xifra decimal no és significativa i no té sentit expressar les coordenades amb més precisió.

Calculem els semieixos i la inclinació de l'el·lipse d'error i la dibuixem:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
> elli := ellipse([0,0], smax, smin):
> display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$smax := .056$$

$$smin := .026$$

$$theta := .631$$

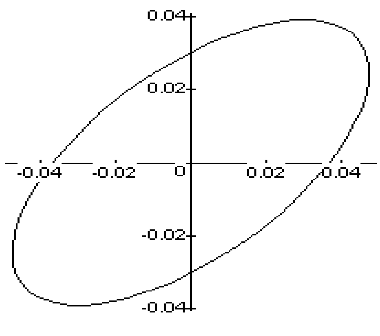

Fig. 2.10 El·lipse d'error

Intervals del 95% de confiança:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 4.302$$

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$ex := .205$$

$$ey := .168$$

L'estimació de les coordenades de P, amb un 95% de confiança, és doncs

$$x = 13677.5 \pm 0.2 \text{ m}$$

$$y = 29833.9 \pm 0.17 \text{ m}$$

Com que les coordenades de P que hem entrat eren prou aproximades, ha calgut una sola iteració del procés per obtenir un bon ajust.

Vegem, ara, com evolucionen els càlculs si entrem coordenades de P amb aproximació grollera i iterem. Fem

```
> p:=[13600, 29800]:
```

i repetim tots els càlculs des del principi. S'obtenen els resultats següents:

Diferència entre orientacions calculades i observades:

$$dl := [6843.9, -3315.8, -9547.9, -5.5]$$

Correccions $m = (\Delta x, \Delta y)$ i coordenades de P corregides:

$$m := [75.749, 28.573]$$

$$pc := [13675.749, 29828.573]$$

Residus i magnitud que el procés ha fet mínima:

$$v := [588.8, 593.5, 354.2, 706.2]$$

$$vtv := .132\ 10^7$$

Diferència entre orientacions calculades i observades després de la correcció:

$$dl2 := [-348.7, 151.8, -406.5, -1571.8]$$

Tornem a iterar. Aturarem les iteracions quan la correcció m a les coordenades sigui d'ordre inferior als mil·límetres, el valor vtv de la magnitud que el procés fa mínima es faci estable i la diferència $dl2$ entre orientacions calculades i observades després de la correcció sigui prou petita.

```
> p:=[13677.921, 29834.058]:
```

$$dl := [-41.6, -6.7, 68.4, 8.4]$$

$$m := [-.437, -.069]$$

$$pc := [13677.484, 29833.989]$$

$$v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]$$

$$vtv := 115.6$$

$$dl2 := [-.01, -.0002, -.01, -.005]$$

Tornem-hi

```
> p:=[13677.484, 29833.989]:
```

$$dl := [5.2, -6.7, 4.7, -4.5]$$

$$m := [.0003, .00006]$$

$$pc := [13677.484, 29833.989]$$

$$v := [-5.2, 6.7, -4.7, 4.5]$$

$$vtv := 115.7$$

$$dl2 := [-.0001, -.0002, 0, .0004]$$

Ens aturem perquè *vtv* s'ha estabilitzat i l'ordre de magnitud de les correccions (Δx, Δy) i de la diferència dl2 entre magnituds calculades i observades és prou petit. D'altra banda, observem que hem assolit la mateixa precisió iterant a partir d'una aproximació inicialment grollera que partint d'una bona aproximació i fent una sola iteració.

Exemple 11 [LAU83] *Triangulació. Intersecció inversa.*

Es coneixen les coordenades de 5 estacions,

$P1$ [90296,116, 80834,826]
$P2$ [97156,749, 81102,868]
$P3$ [98050,171, 75960,756]
$P4$ [94491,189, 73608,300]
$P5$ [88148,558, 76244,855]

que son visades des d'un punt P de coordenades desconegudes. Les orientacions observades de les visuals són, respectivament,

$lo_1 =$ 0º 0' 0'' ,00
$lo_2 =$ 77º 48' 9'' ,71
$lo_3 =$ 162º 42' 34'' ,19
$lo_4 =$ 243º 56' 03'' ,66
$lo_5 =$ 315º 51' 25'' ,56

Es tracta d'estimar les coordenades de *P* partint dels valors aproximats:

P [95202,300, 77027,000]

Resolució amb MAPLE V.

Carreguem llibreries, entrem les coordenades conegudes dels punts visats *pi* i aproximades del punt d'estació *p*, definim les visuals i les dibuixem, de manera anàloga a l'exercici 10.

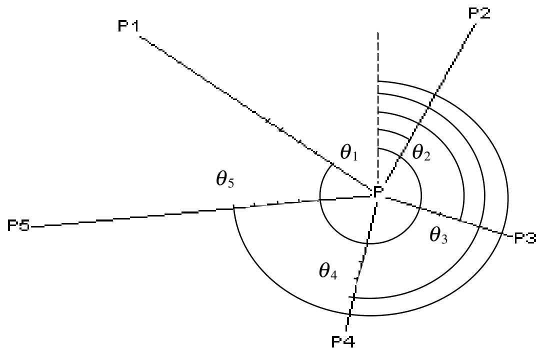

Fig. 2.11 Intersecció inversa

Azimut calculat *lc* de cada visual (el dibuix ens permet veure el múltiple de 90º que cal sumar, en cada cas, a l'arc tangent corresponent), orientació observada *lo* i diferència *dl* entre les lectures o orientacions observades *lo* i azimuts calculats *lc*, en segons d'arc. *fc* = factor de conversió de radiants a segons sexagesimals.

```
> lc:=vector(5,[]): lo:=vector(5,[]): dl:=vector(5,[]):
> fc:=evalf(180*3600/Pi):
> lc[1]:=evalf(arctan((p1[1]-p[1])/(p1[2]-p[2]))+2*Pi)*fc:
> lo[1]:=0.0
> lc[2]:=arctan((p2[1]-p[1])/(p2[2]-p[2]))*fc:
> lo[2]:=77*3600 + 48*60 + 9.71 - 1296000:
> lc[3]:=evalf(arctan((p3[1]-p[1])/(p3[2]-p[2]))+Pi)*fc:
> lo[3]:=162*3600 + 42*60 + 34.19 - 1296000:
> lc[4]:=evalf(arctan((p4[1]-p[1])/(p4[2]-p[2]))+Pi)*fc:
> lo[4]:=243*3600 + 56*60 + 3.66 - 1296000:
> lc[5]:=evalf(arctan((p5[1]-p[1])/(p5[2]-p[2]))+Pi)*fc:
> lo[5]:=315*3600 + 51*60 + 25.56 - 1296000:
> dl:=evalm(lo-lc);
```

dl := [-1108137.7, -1108137.0, -1108139.1, -1108137.5, -1108136.1]

Distàncies calculades *Dci*, i coeficients de les equacions del tipus (2.48), en unitats de segons d'arc:

```
> Dc1:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
> a1:=-cos(lc[1]/fc)*fc/Dc1: b1:=sin(lc[1]/fc)*fc/Dc1:

> Dc2:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
> a2:=-cos(lc[2]/fc)*fc/Dc2: b2:=sin(lc[2]/fc)*fc/Dc2:
> Dc3:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
> a3:=-cos(lc[3]/fc)*fc/Dc3: b3:=sin(lc[3]/fc)*fc/Dc3:
> Dc4:=sqrt((p[1]-p4[1])^2+(p[2]-p4[2])^2):
> a4:=-cos(lc[4]/fc)*fc/Dc4: b4:=sin(lc[4]/fc)*fc/Dc4:
> Dc5:=sqrt((p[1]-p5[1])^2+(p[2]-p5[2])^2):
> a5:=-cos(lc[5]/fc)*fc/Dc5: b5:=sin(lc[5]/fc)*fc/Dc5:
```

Matriu A del sistema i transposada At:

```
> A := matrix(5,3,[a1,b1,-1,a2,b2,-1,a3,b3,-1,a4,b4,-1,a5,b5,-1]);
> At:= transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} -20.363 & -26.237 & -1 \\ -41.145 & 19.730 & -1 \\ 23.783 & 63.523 & -1 \\ 57.832 & -12.029 & -1 \\ 3.203 & -28.887 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriu N del sistema normal i inversa Qm, cofactor de la solució:

```
> N:=evalm(At&*A); Qm:=inverse(N);
```

$$N := \begin{bmatrix} 6028.067 & 445.050 & -23.309 \\ 445.050 & 6092.022 & -16.100 \\ -23.309 & -16.100 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Qm := \begin{bmatrix} .00017 & -.00001 & .00076 \\ -.00001 & .00017 & .00049 \\ .00076 & .00049 & .20510 \end{bmatrix}$$

Solució m del sistema normal i coordenades pc del punt P corregides:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,dl));
> pc:=[p[1]+m[1],p[2]+m[2]];
```

$$m := [-.008, -.021, -1108137.4]$$

$$\mathrm{pc} := [95202.292, 77026.979]$$

Residus

```
> v:=evalm(A&*m-dl);
> vt:=transpose(v):
```

$$v := [1.04, -.51, .25, -.06, -.72]$$

Els residus són correccions a les observacions. Comprovem si les observacions *lo2* corregides d'orientació amb *m*[3] i compensades amb els residus coincideixen amb els azimuts *lc2* calculades amb el punt *P* de coordenades *pc* corregides.

```
> lc2:=vector(5,[]): lo2:=vector(5,[]): dl2:=vector(5,[]):
> lc2[1]:=evalf(arctan((p1[1]-pc[1])/(p1[2]-c[2]))+2*Pi)*fc:
> lo2[1]:=lo[1]+m[3]+v[1]:
> lc2[2]:=arctan((p2[1]-pc[1])/(p2[2]-pc[2]))*fc:
> lo2[2]:=lo[2]+m[3]+v[2]:
> lc2[3]:=evalf(arctan((p3[1]-pc[1])/(p3[2]-pc[2]))+Pi)*fc:
> lo2[3]:=lo[3]+m[3]+v[3]:
> lc2[4]:=evalf(arctan((p4[1]-pc[1])/(p4[2]-pc[2]))+Pi)*fc:
> lo2[4]:=lo[4]+m[3]+v[4]:
> lc2[5]:=evalf(arctan((p5[1]-pc[1])/(p5[2]-pc[2]))+Pi)*fc:
> lo2[5]:=lo[5]+m[3]+v[5]:
> dl2:=evalm(lo2-lc2);
```

$$dl2 := [.001, .0002, .0006, .0004, -.0002]$$

Veiem que la diferència és de l'ordre de les mil·lèsimes de segon i podem donar l'ajust per bo. La correcció (Δx, Δy) feta a les coordenades de *P* ha estat de prop de 2 cm.

Procedim, ara, a l'avaluació de l'error. Calculem la magnitud *vtv* que el procés ha fet mínima, l'estimador *s2* de la variància de referència, la desviació tipus (*sx*, *sy*) de les coordenades de *P* corregides i la seva covariància *sxy*. *gdl* = graus de llibertat:

```
> gdl:=5-3
> vtv:=evalm(vt&*v); s2:=vtv/gdl:
> sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2];
> sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$vtv := 1.926$$

$$\mathrm{sxy} := -.00001$$

$$sx := .01$$

$$sy := .01$$

Podem dir, doncs, que les coordenades del punt *P* són

$$x = 95202.29 \text{ m amb desviació tipus } sx := 0.01 \text{ m}$$

$$y = 77026.98 \text{ m amb desviació tipus } sy := 0.01 \text{ m}$$

La desviació tipus o "error mitjà quadràtic" és de l'ordre dels centímetres. Per tant, la tercera xifra decimal no és significativa i no té sentit expressar les coordenades amb més precisió.

Calculem els semieixos i la inclinació de l'el·lipse d'error i la dibuixem:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
> elli := ellipse([0,0], smax, smin):
> display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$smax := .013$$

$$smin := .012$$

$$theta := -.704$$

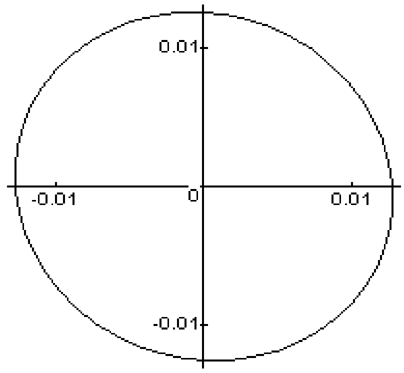

Fig. 2.12 El·lipse d'error

Intervals del 95% de confiança:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 4.302$$

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$ex := .05$$

$$ey := .05$$

Les coordenades de *P*, amb un 95% de confiança, són

$$x = 95202.29 \pm 0.05 \text{ m}$$

$$y = 77026.98 \pm 0.05 \text{ m}$$

Igual que en l'exemple 10, com que les coordenades de P que hem entrat eren prou aproximades, ha calgut una sola iteració del procés per obtenir un bon ajust. Vegem, ara, com evolucionen els càlculs si entrem coordenades de P amb aproximació grollera i iterem. Fem

```
> p:=[95150, 77000]:
```

i repetim tots els càlculs des del principi. S'obtenen els resultats següents:

Diferència entre orientacions calculades i observades:

$$dl := [-1109918.2, -1109739.5, -1105218.3, -1105408.9, -1108753.3]$$

Correccions m i coordenades de P corregides:

$$m := [52.219, 27.326, -1108137.3]$$

$$pc := [95202.219, 77027.326]$$

Residus i magnitud que el procés ha fet mínima:

$$v := [-13.5, 25.9, -17.3, 20.7, -15.8]$$

$$vtv := 1833.74$$

Diferència entre orientacions calculades i observades després de la correcció:

$$dl2 := [-6.9, 16.5, -37.9, 29.1, -4.9]$$

Tornem a iterar. Aturarem les iteracions quan la correcció m a les coordenades sigui d'ordre inferior als mil·límetres, el valor vtv de la magnitud que el procés fa mínima es faci estable i la diferència $dl2$ entre orientacions calculades i observades després de la correcció sigui prou petita.

```
> p:=[95202.219, 77027.326]:
```

$$dl := [-1108130.8, -1108146.7, -1108157.9, -1108128.9, -1108126.4]$$

$$m := [.073, -.346, -1108137.4]$$

$$pc := [95202.292, 77026.979]$$

$$v := [1.04, -.51, .25, -.06, -.72]$$

$$vtv := 1.93$$

$$dl2 := [0, -.0008, .002, -.0008, -.0008]$$

Tornem-hi:

```
> p:=[95202.292, 77026.979]:
```

$$dl := [-1108138.4, -1108136.9, -1108137.6, -1108137.3, -1108136.7]$$

$$m := [.0004, .0004, -1108137.4]$$

$$pc := [95202.292, 77026.979]$$

$$v := [1.04, -.51, .25, -.06, -.72]$$

$$vtv := 1.92$$

$$dl2 := [0, .001, .0002, -.0002, -.0002]$$

Ens aturem perquè *vtv* s'ha estabilitzat i l'ordre de magnitud de les correccions (Δx, Δy) i de la diferència *dl2* entre magnituds calculades i observades és prou petit. D'altra banda, observem que hem assolit la mateixa precisió iterant a partir d'una aproximació inicialment grollera que partint d'una bona aproximació i fent una sola iteració.

2.8.3 Trilateració. Equacions de distància

Es tracta de determinar les coordenades d'un conjunt de punts a partir d'observacions de distàncies. En aquest cas, doncs, els observables són longituds.

Igual que en la triangulació, no farem distincions innecessàries entre interseccions directes i inverses, de manera que, en principi, considerarem desconegudes les coordenades dels dos punts que intervenen, el punt d'estació $A(x_A, y_A)$ i el punt visat $B(x_B, y_B)$.

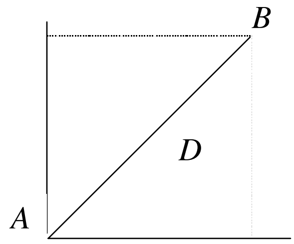

Fig. 2.14 Mesura de distància

La relació que lliga l'observació D amb les 4 incògnites x_A, y_A, x_B i y_B és

$$D^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

o bé

$$D = ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)^{1/2} \tag{2.49}$$

que és una expressió *no lineal* de la forma

$$D = f(x_A,\ y_A,\ x_B,\ y_B)$$

Per linealitzar-la, considerarem un vector de coordenades conegudes $x^0 = (x^0_A,\ y^0_A,\ x^0_B,\ y^0_B)$ i anomenarem

$$\begin{aligned} D_0 &= f(x^0) \\ \Delta D &= D - D_0 \\ \Delta x_A &= x_A - x^0_A, \\ \Delta y_A &= y_A - y^0_A \\ \Delta x_B &= x_B - x^0_B \\ \Delta y_B &= y_B - y^0_B \end{aligned}$$

Fent el desenvolupament de Taylor fins a l'ordre 1, s'obté l'*equació lineal en els increments amb l'observable al terme independent*

$$\Delta D = -\frac{x^0_B - x^0_A}{D_0}\Delta x_A + \frac{x^0_B - x^0_A}{D_0}\Delta x_B - \frac{y^0_B - y^0_A}{D_0}\Delta y_A + \frac{y^0_B - y^0_A}{D_0}\Delta y_B \qquad (2.50)$$

En cas que el punt A d'estació sigui conegut, no intervenen les incògnites corresponents i l'equació queda de la forma

$$\Delta D = \frac{x^0_B - x^0_A}{D_0}\Delta x_B + \frac{y^0_B - y^0_A}{D_0}\Delta y_B \qquad (2.51)$$

Exemple 12 [LAU83] *Trilateració*

Es coneixen les coordenades (en metres) de 3 estacions,

$P1$ [26433,372, 708901,235]
$P2$ [52854,609, 675108,449]
$P3$ [19113,597, 680721,885]

Des de les quals es visa un punt P de coordenades desconegudes. Les distàncies observades de les visuals són, respectivament,

D_{O1} = 19990,402 m
D_{O2} = 24630,764 m
D_{O3} = 17063,857 m

Es tracta d'estimar les coordenades de P partint dels valors aproximats

P [33345,200, 690143,700]

Resolució amb MAPLE V.

Carreguem llibreries, entrem les coordenades conegudes dels punts visats *pi* i les coordenades aproximades del punt d'estació *p* i dibuixem les visuals de manera anàloga als exercicis anteriors.

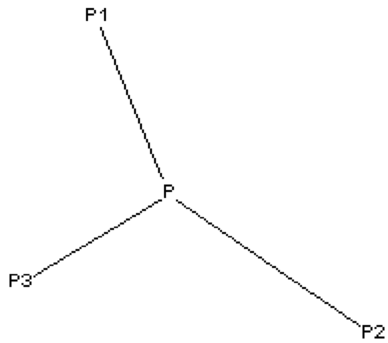

Fig. 2.13 Trilateració

Distància calculada *Dc* de cada visual i diferència *dD* entre les distàncies observades *Do* i les calculades *Dc*, en metres:

```
> Dc:=vector(3,[]): Do:=vector(3,[]):
> Dc[1]:=sqrt((p[1]-p1[1])^2+(p[2]-p1[2])^2):
> Do[1]:=19990.402:
> Dc[2]:=sqrt((p[1]-p2[1])^2+(p[2]-p2[2])^2):
> Do[2]:=24630.764:
> Dc[3]:=sqrt((p[1]-p3[1])^2+(p[2]-p3[2])^2):
> Do[3]:=17067.857:
> dD:=evalm(Do-Dc);
```

$$dD := [-.058, -.026, .077]$$

Coeficients de les equacions del tipus (2.51), en unitats de metres:

```
> a1:=(p[1]-p1[1])/Dc[1]: b1:=(p[2]-p1[2])/Dc[1]:
> a2:=(p[1]-p2[1])/Dc[2]: b2:=(p[2]-p2[2])/Dc[2]:
> a3:=(p[1]-p3[1])/Dc[3]: b3:=(p[2]-p3[2])/Dc[3]:
```

Matriu *A* del sistema i transposada *At*:

```
> A := matrix(3,2,[a1,b1,a2,b2,a3,b3]);
> At:=transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} .346 & -.938 \\ -.792 & .610 \end{bmatrix}$$

$$[\ .834 \quad .552]$$

Matriu *N* del sistema normal i inversa *Qm*, cofactor de la solució :

```
> N:=evalm(At&*A); Qm:=inverse(N);
```

$$N := \begin{bmatrix} 1.442 & -.348 \\ -.348 & 1.558 \end{bmatrix}$$

$$Qm = \begin{bmatrix} .733 & .163 \\ .163 & .678 \end{bmatrix}$$

Solució *m* del sistema normal i coordenades *pc* del punt *P* corregides:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,dD));
> pc:=evalm(p+m);
```

$$m := [.060, .065]$$

$$pc := [33345.260, 690143.765]$$

Residus:

```
> v:=evalm(A&*m-dD);
> vt:=transpose(v):
```

$$v := [.017, .018, .010]$$

Els residus són correccions a les observacions. Comprovem si les observacions *Do2* corregides amb els residus coincideixen amb les distàncies *Dc2* calculades amb el punt *P* de coordenades *pc* corregides:

```
> Do2:=evalm(Do+v):
> Dc2:=vector(3,[]): Dc2[1]:=sqrt((pc[1]-p1[1])^2+(pc[2]-p1[2])^2):
> Dc2[2]:=sqrt((pc[1]-p2[1])^2+(pc[2]-p2[2])^2):
> Dc2[3]:=sqrt((pc[1]-p3[1])^2+(pc[2]-p3[2])^2):
> dD2:=evalm(Do2-Dc2);
```

$$dD2 := [-.00001, 0, 0]$$

Veiem que la diferència és de l'ordre de les centèsimes de mil·límetre i podem donar l'ajust per bo. La correcció $m = (\Delta x, \Delta y)$ feta a les coordenades de *P* ha estat de prop de 6 cm.

Procedim, ara, a l'avaluació de l'error. Calculem la magnitud *vtv* que el procés ha fet mínima, l'estimador *s2* de la variància de referència, la desviació tipus (*sx*, *sy*) de les coordenades de *P* corregides i la seva covariància *sxy*. *gdl* = graus de llibertat:

```
> gdl:=3-2
> vtv:=evalm(vt&*v); s2:=vtv/gdl:
```

```
> sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2];
> sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$vtv := .0007$$

$$sx := .023$$
$$sy := .022$$

Podem dir, doncs, que les coordenades del punt P són

$$x = 33345.26 \text{ m amb desviació tipus } sx := 0.02 \text{ m}$$

$$y = 690143.76 \text{ m amb desviació tipus } sy := 0.02 \text{ m}$$

La desviació tipus o "error mitjà quadràtic" és de l'ordre dels centímetres Per tant, la tercera xifra decimal no és significativa i no té sentit expressar les coordenades amb més precisió.

Calculem els semieixos i la inclinació de l'el·lipse d'error i la dibuixem:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
> elli := ellipse([0,0], smax, smin):
> display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$smax := .025$$

$$smin := .0197$$

$$theta := .703$$

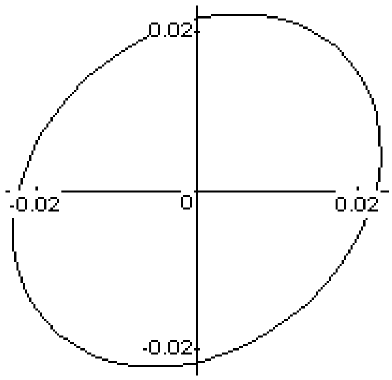

Fig. 2.14 El·lipse d'error

Intervals del 95% de confiança:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 12.706$$

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$ex := .29$$

$$ey := .28$$

Les coordenades de P, amb un 95% de confiança, són

$$x = 33345.26 \pm 0.29 \text{ m}$$

$$y = 690143.76 \pm 0.28 \text{ m}$$

Igual que en els exemples anteriors, com que les coordenades de P que hem entrat eren prou aproximades, ha calgut una sola iteració del procés per obtenir un bon ajust. Vegem, ara, com evolucionen els càlculs si entrem coordenades de P amb aproximació grollera i iterem. Fem

```
> p:=[33300, 690100]:
```

i repetim tots els càlculs des del principi. S'obtenen els resultats següents:

Diferència entre distàncies calculades i observades:

$$dD := [-25.517, -9.231, 61.885]$$

Correccions m i coordenades de P corregides:

$$m := [45.233, 43.742]$$

$$pc := [33345.233, 690143.742]$$

Residus i magnitud que el procés ha fet mínima:

$$v := [-.052, -.054, -.030]$$

$$vtv := .006$$

Diferència entre distàncies calculades i observades després de la correcció:

$$dl2 := [-.083, -.079, -.004]$$

Tornem a iterar. Aturarem les iteracions quan la correcció m a les coordenades sigui d'ordre inferior als mil·límetres, el valor vtv de la magnitud que el procés fa mínima es faci estable i la diferència $dl2$ entre distàncies calculades i observades després de la correcció sigui prou petita.

```
> p:=[33345.233, 690143.742]:
```

$$dD := [-.030, -.025, .026]$$

$$m := [.027, .023]$$
$$pc := [33345.260, 690143.765]$$

$$v := [.017, .0179, .010]$$

$$vtv := .0007$$

$$dD2 := [-.00001, 0, 0]$$

Tornem-hi:

```
> p:=[33345.260, 690143.765]:
```

$$dD := [-.018, -.018, -.009]$$

$$m := [.0005, .0004]$$

$$pc := [33345.260, 690143.765]$$

$$v := [.017, .018, .010]$$

$$vtv := .00072$$

$$dD2 := [-.00001, 0, 0]$$

Aturem les iteracions perquè *vtv* s'ha estabilitzat i l'ordre de magnitud de les correccions (Δx, Δy) i de la diferència dl2 entre magnituds calculades i observades és prou petit. D'altra banda, observem que hem assolit la mateixa precisió iterant a partir d'una aproximació inicialment grollera que partint d'una bona aproximació i fent una sola iteració.

2.8.4 Utilització d'equacions d'angle i de distància conjuntament

Les equacions de distància tenen dimensions de longitud. Si s'utilitzen barrejades amb equacions d'angle, com que aquestes darreres són adimensionals, caldrà multiplicar les unes o les altres per un factor que faci el conjunt coherent dimensionalment. Si no es fes així, el vector u d'observacions i, per tant, el vector v de residus tindrien unes components amb unitats d'angle i unes altres amb unitats de longitud.

El que farem serà prendre la variància de les observacions angulars com a variància de referència σ^2 o, el que és el mateix, donar pes unitat a les observacions angulars. D'aquesta forma, el pes

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

de les observacions de distàncies tindrà unitats de rad^2/m^2.

Ja hem observat que donar pes p_i a una observació u_i equival a multiplicar l'equació corresponent per $\sqrt{p_i}$. Per tant, les equacions d'angle i distància quedaran amb unitats de radiants,

$$\frac{L_{A,B} - \theta^0_{A,B}}{fc} rad = -\frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_A + \frac{\cos\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta x_B + \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_A - \frac{sin\theta^0_{A,B}}{D_0}\Delta y_B - \frac{\Sigma_A}{fc} rad \tag{2.52}$$

i

$$\sqrt{p}\Delta D \ rad = \sqrt{p}\left(-\frac{x^0_B - x^0_A}{D_0}\Delta x_A + \frac{x^0_B - x^0_A}{D_0}\Delta x_B - \frac{y^0_B - y^0_A}{D_0}\Delta y_A + \frac{y^0_B - y^0_A}{D_0}\Delta y_B \right) rad \tag{2.53}$$

respectivament.

De la mateixa forma, en calcular la variància de referència

$$S^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{n-h}$$

tots els termes del sumatori, i per tant el resultat, estaran en radiants al quadrat.

Exemple 12 *Utilització d'equacions d'angle i de distància conjuntament*

Amb les mateixes dades de l'exemple 9 estacionem, a més, en un punt *pe* de coordenades desconegudes i fem mesures angulars visant els punts *p*3, *pv* i *p*1 i mesures de distància visant els punts *p*4 i *pv*. A més, des de *p*1 fem una mesura de distància visant *pv*. Tenim, doncs, 10 observacions (les 4 interseccions directes de l'exemple 9, 3 interseccions inverses i 3 observacions de distància), que correspondran a 10 equacions, amb les coordenades dels punts *pe* i *pv* com a incògnites (4). Les dades són:

- Coordenades

Punts de referència *pi* (coordenades conegudes):

*p*1 [12875,273, 28679,604]
*p*2 [12273,916, 29612,311]
*p*3 [14117,387, 30999,974]
*p*4 [14717,693, 30168,703]

Punts de coordenades desconegudes (coordenades aproximades). Hi ha un punt visat *pv* i un punt d'estació *pe*:

pv [13677,500, 29834,000]

$$pe\ [13490{,}400,\ 30135{,}600]$$

- Observacions angulars directes:

$$lo_{1v} = 34^\circ\ 47'\ 52'',3$$
$$lo_{2v} = 81^\circ\ \ 1'\ 22'',9$$
$$lo_{3v} = 200^\circ\ 40'\ 18'',5$$
$$lo_{4v} = 252^\circ\ \ 9'\ 42'',6$$

- Observacions angulars inverses:

$$lo_{e1} = 187^\circ\ 46'\ 15'',3$$
$$lo_{e3} = 20^\circ\ 50'\ 13'',7$$
$$lo_{ev} = 133^\circ\ \ 5'\ 15'',2$$

La desviació tipus de les observacions angulars és de 15'', per a totes la mateixa, que prendrem com a desviació tipus de referència. Per tant, les observacions angulars tindran totes pes unitat.

- Observacions de distància:

$D_{1v} =$	1405,77 m	amb desviació tipus d'1 cm
$D_{e4} =$	1227,66 m	amb desviació tipus d'1.5 cm
$D_{ev} =$	354,979 m	amb desviació tipus de 0,5 cm

Resolució amb MAPLE V.

Carreguem llibreries, entrem les coordenades conegudes dels punts visats pi, les coordenades aproximades del punt d'estació pe i del punt visat pv i dibuixem les visuals, de manera anàloga als exercicis anteriors.

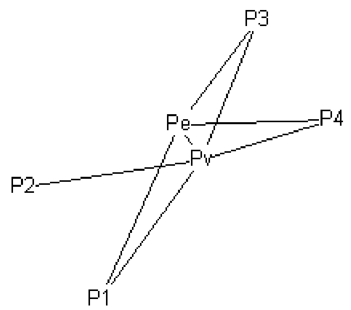

Fig. 2.15 Xarxa amb observacions d'angle i de distància

Entrada de dades observacionals (vector lo) amb la seva desviació tipus (vector so), avaluació de les corresponents dades calculades (vector lc), distàncies calculades (vector Dc) i elements de la matriu A del sistema sobredeterminat d'observacions indirectes linealitzat. fc = factor de conversió de radiants a segons sexagesimals. Desviació tipus de referència o de les observacions de pes unitat *s0* = 15 segons d'arc.

```
> Pin:=evalf(Pi): fc:=180*3600/Pin:
> lc:=vector(10,[]): lo:=vector(10,[]): Dc:=vector(10,[]):
> so:=vector(10,[]): s0:=15: s02:=s0^2:
```

Intersecció directa:

```
> lc[1]:=arctan((pv[1]-p1[1])/(pv[2]-p1[2]))*fc:
> Dc[1]:=sqrt((pv[1]-p1[1])^2+(pv[2]-p1[2])^2):
> lo[1]:=34*3600 + 47*60 + 42.3: so[1]:=s0:
> lc[2]:=arctan((pv[1]-p2[1])/(pv[2]-p2[2]))*fc:
> Dc[2]:=sqrt((pv[1]-p2[1])^2+(pv[2]-p2[2])^2):
> lo[2]:=81*3600 + 1*60 + 12.9: so[2]:=s0:
> lc[3]:=(arctan((pv[1]-p3[1])/(pv[2]-p3[2]))+Pin)*fc:
> Dc[3]:=sqrt((pv[1]-p3[1])^2+(pv[2]-p3[2])^2):
> lo[3]:=200*3600 + 40*60 + 8.5: so[3]:=s0:
> lc[4]:=(arctan((pv[1]-p4[1])/(pv[2]-p4[2]))+Pin)*fc:
> Dc[4]:=sqrt((pv[1]-p4[1])^2+(pv[2]-p4[2])^2):
> lo[4]:=252*3600 + 9*60 + 32.6: so[4]:=s0:
```

Elements de la matriu del sistema sobredeterminat corresponents a les observacions angulars directes:

```
> a11:=cos(lc[1]/fc)*fc/Dc[1]:a12:=-sin(lc[1]/fc)*fc/Dc[1]:
> a21:=cos(lc[2]/fc)*fc/Dc[2]:a22:=-sin(lc[2]/fc)*fc/Dc[2]:
> a31:=cos(lc[3]/fc)*fc/Dc[3]:a32:=-sin(lc[3]/fc)*fc/Dc[3]:
> a41:=cos(lc[4]/fc)*fc/Dc[4]:a42:=-sin(lc[4]/fc)*fc/Dc[4]:
```

Intersecció inversa. Valor aproximat inicial de la desorientació *co* = 0:

```
> lc[5]:=(arctan((p3[1]-pe[1])/(p3[2]-pe[2])))*fc:
> Dc[5]:=sqrt((p3[1]-pe[1])^2+(p3[2]-pe[2])^2):
> lo[5]:=20*3600 + 50*60 + 13.7:
> lc[6]:=(arctan((p1[1]-pe[1])/(p1[2]-pe[2]))+Pin)*fc:
> Dc[6]:=sqrt((p1[1]-pe[1])^2+(p1[2]-pe[2])^2):
> lo[6]:=187*3600 + 46*60 + 15.3: so[6]:=s0:
> lc[7]:=(arctan((pv[1]-pe[1])/(pv[2]-pe[2]))+Pin)*fc:
> Dc[7]:=sqrt((pv[1]-pe[1])^2+(pv[2]-pe[2])^2):
> lo[7]:=133*3600 + 5*60 + 15.2: so[7]:=s0:
> co:=0:
```

Elements de la matriu del sistema sobredeterminat corresponents a les observacions angulars inverses:

```
> a53:=-cos(lc[5]/fc)*fc/Dc[5]:a54:=sin(lc[5]/fc)*fc/Dc[5]:
> a63:=-cos(lc[6]/fc)*fc/Dc[6]:a64:=sin(lc[6]/fc)*fc/Dc[6]:
> a73:=-cos(lc[7]/fc)*fc/Dc[7]:a74:=sin(lc[7]/fc)*fc/Dc[7]:
> a71:=-a73:                    a72:=-a74:
```

Observacions de distància:

```
> lc[8]:=sqrt((p4[1]-pe[1])^2+(p4[2]-pe[2])^2):
> Dc[8]:=lc[8]:
> lo[8]:=1227.66: so[8]:=0.010:
> lc[9]:=sqrt((p1[1]-pv[1])^2+(p1[2]-pv[2])^2):
> Dc[9]:=lc[9]:
> lo[9]:=1405.77: so[9]:=0.010:
> lc[10]:=sqrt((pv[1]-pe[1])^2+(pv[2]-pe[2])^2):
> Dc[10]:=lc[10]:
> lo[10]:=354.979: so[10]:=0.005:
```

Elements de la matriu del sistema sobredeterminat corresponents a les observacions de distància:

```
> a83:=-(p4[1]-pe[1])/Dc[8]:  a84:=-(p4[2]-pe[2])/Dc[8]:
> a91:= (pv[1]-p1[1])/Dc[9]:  a92:= (pv[2]-p1[2])/Dc[9]:
> a101:=(pv[1]-pe[1])/Dc[10]: a102:=(pv[2]-pe[2])/Dc[10]:
> a103:=-a101:                a104:=-a102:
```

Diferència entre dades observades i calculades (vector *dl*) i vector d'incògnites *vin* (valors aproximats):

```
> dl:=evalm(lo-lc);
> vin:=vector([pv[1],pv[2],pe[1],pe[2],co]);
```

dl := [-5.757, -15.540, -3.449, -15.558, -54427.297, -54475.544, -54355.369, -.079, -.003, .058]

vin := [13677.500, 29834.000, 13490.400, 30135.600, 0]

Matriu A del sistema i transposada At:

```
> A := matrix(10,5,[
> a11 , a12 , 0   , 0   , 0 ,
> a21 , a22 , 0   , 0   , 0 ,
> a31 , a32 , 0   , 0   , 0 ,
> a41 , a42 , 0   , 0   , 0 ,
> 0   , 0   , a53 , a54 ,-1 ,
> 0   , 0   , a63 , a64 ,-1 ,
> a71 , a72 , a73 , a74 ,-1 ,
> 0   , 0   , a83 , a84 , 0 ,
> a91 , a92 , 0   , 0   , 0 ,
> a101, a102, a103, a104, 0 ]);
> At:=transpose(A):
```

$$
\begin{bmatrix}
120.489 & -83.732 & 0 & 0 & 0 \\
22.646 & -143.379 & 0 & 0 & 0 \\
-154.862 & 58.425 & 0 & 0 & 0 \\
-57.819 & 179.690 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -156.357 & 113.418 & -1
\end{bmatrix}
$$

A :=

[0	0	120.208	-50.786	-1]
[-493.847	-306.362	493.847	306.362	-1]
[0	0	-.999	-.027	0]
[.571	.821	0	0	0]
[.527	-.850	-.527	.850	0]

Matriu de pesos:

```
> P:=diag(1,1,1,1,1,1,1,(s0/so[8])^2,(s0/so[9])^2,(s0/so[10])^2);
```

P:=

[1	0	0	0	0	0	0	0	0	0]
[0	1	0	0	0	0	0	0	0	0]
[0	0	1	0	0	0	0	0	0	0]
[0	0	0	1	0	0	0	0	0	0]
[0	0	0	0	1	0	0	0	0	0]
[0	0	0	0	0	1	0	0	0	0]
[0	0	0	0	0	0	1	0	0	0]
[0	0	0	0	0	0	0	.225 10^7	0	0]
[0	0	0	0	0	0	0	0	.1 10^7	0]
[0	0	0	0	0	0	0	0	0	.9 10^7]

Matriu *N* del sistema normal i inversa *Qm*, cofactor de la solució:

```
> N:=evalm(&*(At,P,A)): Qm:=inverse(N);
```

Qm:=

[.276 10^-5	-.163 10^-5	.363 10^-6	-.307 10^-5	-.610 10^-3]
[-.163 10^-5	.229 10^-5	-.231 10^-6	.313 10^-5	.384 10^-3]
[.363 10^-6	-.231 10^-6	.426 10^-6	-.195 10^-6	.483 10^-5]
[-.307 10^-5	.313 10^-5	-.195 10^-6	.500 10^-5	.771 10^-3]
[-.610 10^-3	.384 10^-3	.483 10^-5	.771 10^-3	.490]

Solució *m* del sistema normal, vector d'incògnites *vinc* (valors corregits) i coordenades corregides *pvc* i *pec* dels punts *pv* i *pe*, respectivament:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,P,dl));
> vinc:=evalm(vin+m);
> pvc:=vector([vinc[1],vinc[2]]);
> pec:=vector([vinc[3],vinc[4]]);
> co:=vinc[5];
```

m := [-.040, .024, .073, .164, 54454.861]

vinc := [13677.460, 29834.024, 13490.474, 30135.764, 54454.861]

pvc := [13677.460, 29834.024]

pec := [13490.474, 30135.764]

$$co := 54454.861$$

Residus:

```
> v:=evalm(A&*m-dl); vt:=transpose(v):
```

$$v := [-1.116, 11.127, 11.082, 22.268, -20.504, 21.21620 -.712, .0014, .0004, .0005]$$

Els residus són correccions de les observacions. Comprovem si les observacions *lo2* corregides amb els residus coincideixen amb les magnituds *lc2* calculades amb els punts *pvc* i *pec* de coordenades corregides:

```
> lo2:=evalm((lo+v)):
> lc2:=vector(10,[]):
> lc2[1]:=arctan((pvc[1]-p1[1])/(pvc[2]-p1[2]))*fc:
> lc2[2]:=arctan((pvc[1]-p2[1])/(pvc[2]-p2[2]))*fc:
> lc2[3]:=(arctan((pvc[1]-p3[1])/(pvc[2]-p3[2]))+Pin)*fc:
> lc2[4]:=(arctan((pvc[1]-p4[1])/(pvc[2]-p4[2]))+Pin)*fc:
> lc2[5]:=(arctan((p3[1]-pec[1])/(p3[2]-pec[2])))*fc:
> lo2[5]:=lo2[5]+co:
> lc2[6]:=(arctan((p1[1]-pec[1])/(p1[2]-pec[2]))+Pin)*fc:
> lo2[6]:=lo2[6]+co:
> lc2[7]:=(arctan((pvc[1]-pec[1])/(pvc[2]-pec[2]))+Pin)*fc:
> lo2[7]:=lo2[7]+co:
> lc2[8]:=sqrt((p4[1]-pec[1])^2+(p4[2]-pec[2])^2):
> lc2[9]:=sqrt((p1[1]-pvc[1])^2+(p1[2]-pvc[2])^2):
> lc2[10]:=sqrt((pvc[1]-pec[1])^2+(pvc[2]-pec[2])^2):
> dl2:=evalm(lc2-lo2);
```

$$dl2 := [-.0002, -.0005, .0002, 0, .0013, -.0006, -.02, .00001, .2\ 10\text{^-}5, .00004]$$

Veiem que la diferència és, en el pitjor dels casos, de l'ordre dels centèsims de segon per a les observacions angulars i dels centèsims de mil·límetre per a les de distància, i podem donar l'ajust per bo. Les correccions fetes a les coordenades arriben als 16 cm i la correcció d'orientació és de prop de 15 graus.

Avaluació de l'error. Calculem l'estimador *s2* de la variància de referència i el comparem amb el valor *s02* proposat inicialment per a aquest paràmetre, basant-nos en que *vtpv/s02* segueix una llei χ^2 amb *gdl* graus de llibertat.

```
> vtpv:=evalm(&*(vt,P,v)); gdl:= 10-5: s2:=vtpv/gdl;
> s2-s02;
> jia:=statevalf[icdf,chisquare[gdl] ](0.025);
> vtpv/s02;
> jib:=statevalf[icdf,chisquare[gdl] ](0.975);
```

$$vtpv := 1621.358$$

$$s2 := 324.272$$

$$s2 - s02 = 99.2716936$$

$$jia := .832,\ vtpv/s02 = 7.206,\ jib := 12.832$$

Veiem que, encara que la diferència entre la variància de referència proposada *s02* i el seu estimador *s2* sigui aparentment gran, la magnitud *vtpv/s02* es manté entre els valors *jia* i *jib* de la variable χ^2 amb *gdl* graus de llibertat corresponents a un nivell de significació $\alpha = 0.05$.

Calculem els semieixos i la inclinació de les el·lipses d'error i dibuixem aquestes el·lipses. Calculem també els intervals del 95% de confiança.

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 2.571$$

Punt visat *pv*:

```
> sx2:=s2*Qm[1,1]: sy2:=s2*Qm[2,2]: sxy:=s2*Qm[1,2];
> sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$sxy := -.0005,\ sx := .030,\ sy := .028$$

Les coordenades del punt incògnita visat *pv* són

$$xpv = 13677.46 \pm 0.03 \text{ m}$$

i

$$ypv = 29834.02. \pm 0.03 \text{ m}$$

El·lipse d'error:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
> elli := ellipse([0,0], smax, smin):
> display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$smax := .037,\ smin := .017,\ theta := -.714$$

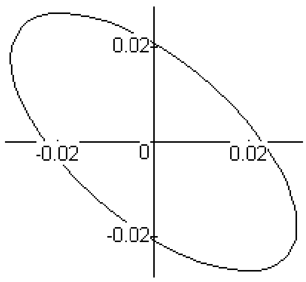

Fig. 2.16 El·lipse d'error

Intervals del 95% de confiança:

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$ex := .077,\ ey := .070$$

Amb un 95% de confiança, les coordenades del punt incògnita visat *pv* són

$$xpv = 13677.46 \pm 0.08 \text{ m}$$

i

$$ypv = 29834.02. \pm 0.07 \text{ m}$$

Punt d'estació *pe*:

```
> sx2:=s2*Qm[3,3]: sy2:=s2*Qm[4,4]: sxy:=s2*Qm[3,4];
> sx:=sqrt(sx2); sy:=sqrt(sy2); sxy2:=sxy^2:
```

$$sxy := -.00006,\ sx := .012,\ sy := .040$$

Les coordenades del punt d'estació incògnita *pe* són

$$xpe = 13490.47 \pm 0.01 \text{ m}$$

i

$$ype = 30135.76. \pm 0.04 \text{ m}$$

El·lipse d'error:

```
> smax:=sqrt((sx2+sy2)/2+sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> smin:=sqrt((sx2+sy2)/2-sqrt((sx2-sy2)^2/4+sxy2));
> theta:=arctan(2*sxy/(sx2-sy2))/2;
> elli := ellipse([0,0], smax, smin):
> display(rotate(elli, theta),xtickmarks=2,ytickmarks=2);
```

$$smax := .040,\ smin := .012,\ theta := .042$$

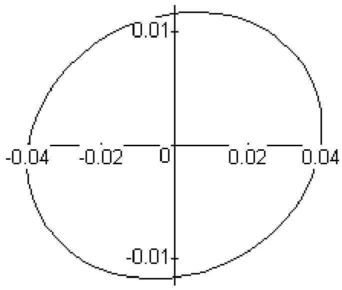

Fig. 2.17 El·lipse d'error

Intervals del 95% de confiança:

```
> ex:=t*sx; ey:=t*sy;
```

$$ex := .030,\ ey := .103$$

Amb un 95% de confiança, les coordenades del punt d'estació incògnita *pe* són

$$xpe = 13490.47 \pm 0.03 \text{ m}$$

i

$$ype = 30135.8. \pm 0.1 \text{ m}$$

Igual que en els exemples anteriors, una bona aproximació inicial ha permès un bon ajust amb una sola iteració. Vegem com evolucionen els càlculs si entrem coordenades de *pv* i *pe* amb aproximació grollera i iterem:

```
> pv:=[13600.000, 29800.000]: pe:=[13400.000, 30100.000]:
```

$$dl := [6833.9, -3325.7, -9557.9, 1496.4, 0, 18782.7, 16198.2, -91.8, 71.4, -5.5]$$

$$pvc := [13676.911, 29835.067]$$

$$pec := [13490.123, 30137.179]$$

$$co := -8912.759$$

$$v := [204.455, -361.660, 601.618, 117.314, 436.012, -109.280, -326.732, -.113, -.193, .005]$$

$$dl2 := [-358.953, 210.786, -444.525, 124.027, -672.096, -414.696, 106.449, .428, .737, .208]$$

$$vtpv := 923636.434$$

$$s2 := 184727.287$$

$$jia := .831,\ vtpv\ /\ s02 := 4105.051,\ jib := 12.832$$

Tornem-hi:

```
> pv:=[13676.911, 29835.067]: pe:=[13490.123, 30137.179]:
```

$$dl := [154.\ 5, 150.8, -157.1, -241.3, 236.1, 523.9, 220.0, -.3, -.5, -.2]$$

$$pvc := [13677.461, 29834.026]$$

$$pec := [13490.471, 30135.764]$$

$$co := -9343.179$$

$$v := [-1.245, 10.890, 10.978, 22.634, -28.753, 26.529, 2.224, .002, .002, .0006]$$

$$dl2 := [.059, -.044, .092, -.040, 7.835, -6.389, -5.655, .0008, .0004, .0002]$$

$$vtpv := 2311.696$$

$$jia := .831,\ vtpv\ /\ s02 := 10.274,\ jib := 12.832$$

Tornem-hi:

```
> pv := [13677.461, 29834.026]: pe := [13490.471, 30135.764]:
```

dl := [1.119, -10.928, -11.008, -22.485, 20.864, -20.089,3.706, -.004, -.002, -.001]

pvc := [13677.459, 29834.025]

pec := [13490.474, 30135.765]

co := -9343.782

v := [-1.267, 11.002, 11.238, 22.445,-20.55059387, 20.94963584, -.399, .001,.0006, .0005]

$dl2$:= [-.0002, -.0005, .0002, .0007, -.0208, .0116, -.0211, -.4 10^-5 ,.4 10^-5, -.58 10^-5]

$vtpn$:= 1620.735

jia := .831, $vtpv$ / $s02$:= 7.203, jib := 12.832

Tornem-hi:

```
> pv := [13677.459, 29834.025]: pe := [13490.474, 30135.765]:
```

dl := [1.276, -11.027, -11.259, -22.421, 20.617, -21.001, .023,-.001, -.0003, -.0005]

pvc := [13677.459, 29834.025]

pec := [13490.474, 30135.765]

co := -9343.785

v := [-1.272, 10.999, 11.243, 22.451,-20.565, 20.964, -.399, .001, .0006, .0005]

$dl2$:= [-.0004, -.0007, .0005, .0008, .0035, -.0019, -.0011, .4 10^-5, .3 10^-5, .3 10^-5]

$vtpv$:= 1622.230

jia := .831, $vtpv$ / $s02$:= 7.210, jib := 12.832

2.9 Transformacions de semblança

En geodèsia, per canviar, per exemple, d'un sistema de referència global al sistema de referència local de la cartografia, en topografia i cartografia, per canviar, per exemple, de coordenades en un sistema local de treball a coordenades UTM o, en fotogrametria, per canviar, per exemple, de coordenades instrumentals en el sistema intern de l'aparell a coordenades en el sistema extern del terreny, es fan servir transformacions de semblança, bidimensionals o tridimensionals, compostes d'una rotació d'eixos, una homotècia o canvi d'escala i una translació.

El problema que es presenta, en general, en tots aquests àmbits, i que es resol pel criteri de mínims quadrats, mitjançant sistemes sobredeterminats d'observacions indirectes, és el de determinar els paràmetres de la transformació a partir de les coordenades, en ambdós sistemes de referència, d'uns quants punts de control.

Encara que, conceptualment, es tracta del mateix problema, la tècnica de resolució varia substancialment segons es tracti de transformacions bidimensionals o tridimensionals.

2.9.1 Transformacions de semblança bidimensionals

L'expressió d'una transformació de semblança bidimensional composta d'una rotació d'eixos d'angle α, una homotècia de raó λ i una translació de vector $t = (tx, ty)$ és

$$\lambda\begin{pmatrix} \cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Per a cada punt de control de coordenades (x, y), del qual coneixem les coordenades (x', y') del punt transformat, tenim les dues equacions no lineals

$$\begin{aligned} x\ \ \lambda cos\alpha + y\ \ \lambda sin\alpha + tx\ \ \ \ &= x' \\ y\ \ \lambda cos\alpha\ -\ x\ \ \lambda sin\alpha +\ \ \ \ ty &= y' \end{aligned} \tag{2.55}$$

en les 4 incògnites α, λ, tx i ty. En aquest cas no cal linealitzar aquestes expressions mitjançant un desenvolupament de Taylor d'ordre 1 perquè, anomenant

$$a = \lambda cos\alpha$$

i (2.56)

$$b = \lambda sin\alpha$$

el sistema (2.55) es transforma en el sistema lineal de dues equacions

$$\begin{aligned} xa + yb + tx\ \ \ \ &= x' \\ ya - xb +\ \ \ \ ty &= y' \end{aligned} \tag{2.57}$$

en les 4 incògnites a, b, tx i ty que, matricialment, s'escriu

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ tx \\ ty \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

Amb dos punts de control obtindríem un sistema lineal determinat de 4 equacions i 4 incògnites. Però, per compensar els errors en les observacions i els càlculs que porten a l'avaluació de les coordenades

(x', y') del punt transformat (les coordenades (x, y) del punt de control se suposen sense error), convé prendre més de dos punts i treballar amb un sistema sobredeterminat.

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \ldots & & & \\ x_k & y_k & 1 & 0 \\ y_k & -x_k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ tx \\ ty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \ldots \\ x'_k \\ y'_k \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

Els paràmetres a, b, tx i ty s'estimaran, mitjançant el criteri dels mínims quadrats, aplicant l'expressió (2.19), i la desviació tipus corresponent aplicant l'expressió (2.29).

Un cop estimats els 4 paràmetres a, b, tx i ty, els paràmetres α i λ s'avaluen invertint (2.56):

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Per estimar les variàncies S^2_α i S^2_λ de α i λ, respectivament, i la seva covariància $S_{\alpha\lambda}$, haurem d'aplicar la llei (1.48) de propagació de la matriu de variància-covariància en expressions no lineals a (2.60):

$$\begin{pmatrix} S^2_\alpha & S_{\alpha\lambda} \\ S_{\alpha\lambda} & S^2_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\lambda^2} & \frac{a}{\lambda^2} \\ \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^2_a & S_{ab} \\ S_{ab} & S^2_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-b}{\lambda^2} & \frac{a}{\lambda^2} \\ \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} \end{pmatrix}^T$$

Observació

Per la particular distribució de zeros en la matriu del sistema (2.59), resulta que $S_{ab} = 0$ sempre (vegeu-ne un cas concret a continuació, a l'exemple 13).

En particular,

$$\begin{aligned} S^2_\alpha &= \left(\frac{b}{\lambda^2}\right)^2 S^2_a + \left(\frac{a}{\lambda^2}\right)^2 S^2_b \\ S^2_\lambda &= \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 S^2_a + \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 S^2_b \end{aligned} \tag{2.61}$$

Exemple 13 *Paràmetres d'una transformació de semblança bidimensional*

Es tracta de determinar els 4 paràmetres α, λ, tx i ty d'una transformació de semblança bidimensional a partir de les coordenades de 5 punts de control.

Coordenades vi dels 5 punts en el sistema inicial:

$$v1[1.036,\ 1.301]$$

$v2[1.265, 1.305]$
$v3[1.703, 1.054]$
$v4[1.561, 0.427]$
$v5[0.915, 1.040]$

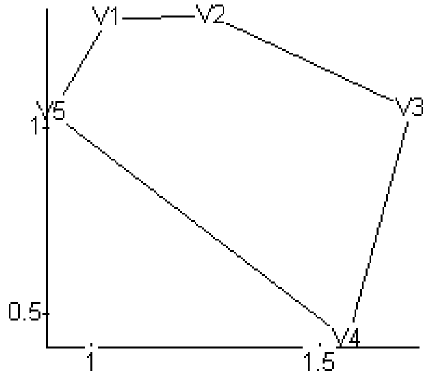

Fig. 2.18 Polígon de punts de control

Coordenades vti dels 5 punts en el sistema transformat:

$vt1[14995.345, 39995.261]$
$vt2[14994.434, 39995.343]$
$vt3[14992.773, 39996.520]$
$vt4[14993.621, 39998.962]$
$vt5[14995.933, 39996.251]$

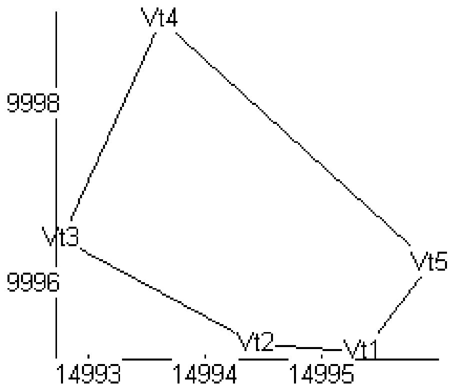

Fig. 2.19 Polígon de punts de control transformats

Matriu A del sistema sobredeterminat i transposada At:

```
> A:=matrix(10,4,[v1[1],v1[2],1,0,v1[2],-v1[1],0,1,
                  v2[1],v2[2],1,0,v2[2],-v2[1],0,1,
                  v3[1],v3[2],1,0,v3[2],-v3[1],0,1,
                  v4[1],v4[2],1,0,v4[2],-v4[1],0,1,
                  v5[1],v5[2],1,0,v5[2],-v5[1],0,1]);
> At:=transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} 1.036 & 1.301 & 1 & 0 \\ 1.301 & -1.036 & 0 & 1 \\ 1.703 & 1.054 & 1 & 0 \\ 1.054 & -1.703 & 0 & 1 \\ 1.561 & .427 & 1 & 0 \\ .427 & -1.561 & 0 & 1 \\ .915 & 1.040 & 1 & 0 \\ 1.040 & -.915 & 0 & 1 \\ 1.265 & 1.305 & 1 & 0 \\ 1.305 & -1.265 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vector u de termes independents del sistema sobredeterminat:

```
> u:=vector(10,[  vt1[1],vt1[2],
                  vt2[1],vt2[2],
                  vt3[1],vt3[2],
                  vt4[1],vt4[2],
                  vt5[1],vt5[2]      ]):
```

Matriu del sistema normal i inversa, cofactor de la solució:

```
> N:=evalm(At&*A);Qm:=inverse(N);
```

$$N := \begin{bmatrix} 14.618 & 0 & 6.480 & 5.127 \\ 0 & 14.618 & 5.127 & -6.480 \\ 6.480 & 5.127 & 5 & 0 \\ 5.127 & -6.480 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Qm := \begin{bmatrix} 1.038 & 0 & -1.346 & -1.065 \\ 0 & 1.038 & -1.065 & 1.346 \\ -1.346 & -1.065 & 3.036 & 0 \\ -1.065 & 1.346 & 0 & 3.036 \end{bmatrix}$$

Solució m del sistema normal:

```
> m:=evalm(&*(Qm,At,u));
```

$$m := [-3.988, -.4167, 15000.018, 40000.016]$$

Vector de translació t:

```
> t[1]:=m[3];t[2]:=m[4];
```

$$t[1] := 15000.018$$

$$t[2] := 40000.016$$

Angle α de rotació:

```
> alpha:=evalf(arctan(m[2]/m[1])+Pi);
```

$$\alpha := 3.245687395 \text{ radiants}$$

$$\alpha = 185º\ 57'\ 51.''08$$

Factor d'escala λ:

```
> lam2:=m[1]^2+m[2]^2:
> lambda:=sqrt(lam2);
```

$$\lambda := 4.010$$

Avaluació de l'error.

Residus:

```
> v:=evalm(A&*m-u);vt:=transpose(v):
```

$$v := [-.001, -.002, .013, .002, -.007, .002, .002, -.001, -.005, -.004]$$

Variància de referència:

```
> gdl:=10-4:
> s02:=evalm(vt&*v)/gdl;
```

$$s02 := .000049$$

Matriu de variància-covariància dels paràmetres Σ:

```
> Sigma:=evalm(s02*Qm);
```

$$\Sigma := \begin{bmatrix} .00005 & 0 & -.00006 & -.00005 \\ 0 & .00005 & -.00005 & .00006 \\ -.00006 & -.00005 & .00015 & 0 \\ -.00005 & .00006 & 0 & .00015 \end{bmatrix}$$

Observem que els paràmetres a i b són independents entre si, així com els paràmetres tx i ty.

Desviació tipus st del vector de traslació

```
> st[1]:=sqrt(Sigma[3,3]); st[2]:=sqrt(Sigma[4,4]);
```

$$st[1] := .012$$

$$st[2] := .012$$

Desviació tipus sl del factor d'escala λ:

```
> sl2:=(m[1]/lambda)^2*Sigma[1,1]+(m[2]/lambda)^2*Sigma[2,2]:
> sl:=sqrt(sl2);
```

$$sl := .007$$

Desviació tipus sal de l'angle de gir α:

```
> sal2:=(m[2]/lam2)^2*Sigma[1,1]+(m[1]/lam2)^2*Sigma[2,2]:
> sal:=sqrt(sal2);
```

$$sal := .001778333876 \text{ radiants}$$

$$sal = 6'\ 6.''8$$

2.9.2 Transformacions de semblança tridimensionals

L'expressió d'una transformació de semblança tridimensional composta de tres rotacions d'angles ω, φ i κ respecte dels eixos x, y i z, respectivament, una homotècia de raó λ i una translació de vector $t = (tx, ty, tz)$ és

$$\lambda \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

que també escriurem

$$\lambda R\, X + t = X'$$

Per a cada punt de control $X_i = (x_i, y_i, z_i)$, del qual coneixem les coordenades $X'_i = (x_i', y_i', z_i')$ del punt transformat, tenim les tres equacions no lineals (2.62)

$$\begin{aligned} x_i\lambda\cos\varphi\cos\kappa + y_i\lambda\cos\omega\sin\kappa + y_i\lambda\sin\omega\sin\varphi\cos\kappa + z_i\lambda\sin\omega\sin\kappa - z_i\lambda\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa + tx &= x_i' \\ -x_i\lambda\cos\varphi\sin\kappa + y_i\lambda\cos\omega\cos\kappa - y_i\lambda\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa + z_i\lambda\sin\omega\cos\kappa + z_i\lambda\cos\omega\sin\varphi\sin\kappa + ty &= y_i' \\ x_i\lambda\sin\varphi - y_i\lambda\sin\omega\cos\varphi + z_i\lambda\cos\omega\cos\varphi + tz &= z_i' \end{aligned} \quad (2.62)$$

en les 7 incògnites ω, φ, κ, tx, ty, tz i λ.

Linealitzant aquestes expressions mitjançant un desenvolupament de Taylor en un entorn dels valors $\omega^o = \varphi^o = \kappa^o = tx^o = ty^o = tz^o = 0$, λ^o, s'obté el sistema (2.63) de tres equacions lineals en els increments.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{\circ} z_i & \lambda^{\circ} y_i & 1 & 0 & 0 & x_i \\ \lambda^{\circ} z_i & 0 & -\lambda^{\circ} x_i & 0 & 1 & 0 & y_i \\ -\lambda^{\circ} y_i & \lambda^{\circ} x_i & 0 & 0 & 0 & 1 & z_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ tx \\ ty \\ tz \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_i - x_i^0 \\ y'_i - y_i^0 \\ z'_i - z_i^0 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

on

$$\begin{pmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \\ z_i^0 \end{pmatrix} = \lambda^0 \begin{pmatrix} \cos\varphi^0 \cos\kappa^0 & \cos\omega^0 \sin\kappa^0 + \sin\omega^0 \sin\varphi^0 \cos\kappa^0 & \sin\omega^0 \sin\kappa^0 - \cos\omega^0 \sin\varphi^0 \cos\kappa^0 \\ -\cos\varphi^0 \sin\kappa^0 & \cos\omega^0 \cos\kappa^0 - \sin\omega^0 \sin\varphi^0 \sin\kappa^0 & \sin\omega^0 \cos\kappa^0 + \cos\omega^0 \sin\varphi^0 \sin\kappa^0 \\ \sin\varphi^0 & -\sin\omega^0 \cos\varphi^0 & \cos\omega^0 \cos\varphi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx^0 \\ ty^0 \\ tz^0 \end{pmatrix}$$

És a dir,

$$\begin{pmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \\ z_i^0 \end{pmatrix} = \lambda^0 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Es pren $\omega^{\circ} = \varphi^{\circ} = \kappa^{\circ} = 0$ per raons de simplicitat de les equacions lineals resultants. D'altra banda, malgrat que $tx^{\circ} = ty^{\circ} = tz^{\circ} = 0$ puguin no ser valors aproximats, el fet que el sistema sigui lineal en les tres variables tx, ty i tz ens permet partir de valors allunyats d'aquests paràmetres.

El nombre mínim de punts de control necessari per a la determinació dels paràmetres és 3 (i = 1, 2, ..., $m \geq 3$), que dóna lloc a un sistema sobredeterminat de, com a mínim, 9 equacions amb 7 incògnites (amb 2 punts tindríem 6 equacions i, per tant, un sistema indeterminat).

Els paràmetres ω, φ, κ, tx, ty, tz i $\lambda = \lambda^{\circ}+\Delta\lambda$ s'estimaran, mitjançant el criteri dels mínims quadrats, aplicant l'expressió (2.19), i la desviació tipus corresponent aplicant l'expressió (2.29).

Com que el sistema sobredeterminat del tipus (2.63) és una linealització i, per tant, només una aproximació del vertader sistema (2.62), l'estimació minimoquadràtica dels paràmetres donada per (2.29) serà, en principi, només una primera aproximació ω^1, φ^1, κ^1, tx^1, ty^1, tz^1 i λ^1. Correspondria, doncs, iterar el procés desenvolupant per Taylor en un entorn d'aquest nou punt aproximat. Tanmateix, el desenvolupament de Taylor en l'entorn d'un punt amb valors de ω, φ i κ diferents de zero dóna lloc a unes equacions excessivament complicades de manejar.

No obstant això, el fet que es tracti de determinar els paràmetres d'una transformació ens permet emprar una altra estratègia iterativa: calcular una successió de transformacions la composició de les quals sigui la transformació buscada.

Per a cada punt de control (x_i, y_i, z_i) anomenem (x_i^1, y_i^1, z_i^1) el punt transformat amb la primera aproximació ω^1, φ^1, κ^1, tx^1, ty^1, tz^1 i λ^1 dels paràmetres

$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ y_i^1 \\ z_i^1 \end{pmatrix} = \lambda^1 \begin{pmatrix} \cos\varphi^1 \cos\kappa^1 & \cos\omega^1 \sin\kappa^1 + \sin\omega^1 \sin\varphi^1 \cos\kappa^1 & \sin\omega^1 \sin\kappa^1 - \cos\omega^1 \sin\varphi^1 \cos\kappa^1 \\ -\cos\varphi^1 \sin\kappa^1 & \cos\omega^1 \cos\kappa^1 - \sin\omega^1 \sin\varphi^1 \sin\kappa^1 & \sin\omega^1 \cos\kappa^1 + \cos\omega^1 \sin\varphi^1 \sin\kappa^1 \\ \sin\varphi^1 & -\sin\omega^1 \cos\varphi^1 & \cos\omega^1 \cos\varphi^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tx^1 \\ ty^1 \\ tz^1 \end{pmatrix}$$

Una segona aproximació dels paràmetres serà la solució minimoquadràtica del sistema sobredeterminat del tipus (2.63) amb equacions

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_i^1 & y_i^1 & 1 & 0 & 0 & x_i^1 \\ z_i^1 & 0 & -x_i^1 & 0 & 1 & 0 & y_i^1 \\ -y_i^1 & x_i^1 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_i^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ tx \\ ty \\ tz \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_i - x_i^1 \\ y'_i - y_i^1 \\ z'_i - z_i^1 \end{pmatrix}$$

per a cada punt de control. Observem que, a partir d'aquest segon pas, el desenvolupament de Taylor es fa en un entorn dels valors $\omega^o = \varphi^o = \kappa^o = tx^o = ty^o = tz^o = 0$, $\lambda^o = 1$. Aquest procés s'iterarà fins arribar a una aproximació $X^k = (x_i^k, y_i^k, z_i^k) \cong (x_i', y_i', z_i')$ raonable per als m punts de control. La transformació definitiva serà

$$F(X) = \lambda^k R^k(...(\lambda^2 R^2 (\lambda^1 R^1(X) + t^1) + t^2)...+ t^{k-1}) + t^k$$

que escriurem

$$F(X) = \lambda R(X) + t$$

on

$$\lambda = \lambda^1 \lambda^2 ... \lambda^k$$

$$R = R^k R^{k-1}...R^2 R^1$$

i

$$t = t^k + \lambda^k R^k t^{k-1} +...+ \lambda^k \lambda^{k-1}... \lambda^2 R^k R^{k-1}... R^2 t^1$$

Exemple 14 *Paràmetres d'una transformació de semblança tridimensional*

En una restitució fotogramètrica es disposa de les coordenades instrumentals vi de 4 punts de control,

$v1$ [.46284, .64835, .07781]
$v2$ [.57028, .66257, .08612]
$v3$ [.35203, .34150, .04791]
$v4$ [.55893, .31123, .06371]

i de les corresponents coordenades de camp Vi dels mateixos punts, totes expressades en metres:

$V1$ [432014.31, 507430.31, 901.40]
$V2$ [433087.09, 507568.62, 907.16]
$V3$ [430886.87, 504372.59, 868.92]
$V4$ [432951.16, 504068.16, 911.77]

Es tracta de calcular els paràmetres de la transformació de semblança tridimensional corresponent. La resolució està feta en MAPLE V.

Definim la transformació de semblança F.
Angles de rotació: rx, ry, rz
Matriu de rotació: R
Factor d'escala: l
Vector de translació: $t=(tx, ty, tz)$

```
> R:=matrix(3,3,[
> cos(ry)*cos(rz),
> cos(rx)*sin(rz)+sin(rx)*sin(ry)*cos(rz),
> sin(rx)*sin(rz)-cos(rx)*sin(ry)*cos(rz),
> -cos(ry)*sin(rz),
> cos(rx)*cos(rz)-sin(rx)*sin(ry)*sin(rz),
> sin(rx)*cos(rz)+cos(rx)*sin(ry)*sin(rz),
> sin(ry),
> -sin(rx)*cos(ry),
> cos(rx)*cos(ry)
> ]):
> t:=vector(3,[tx,ty,tz]):
> v:=vector(3,[x,y,z]):
> F:=v->evalm(l*(R&*v)+t);
```

$$F := v \text{ -> } \mathrm{evalm}(l\ (R \ \&^*\ v) + t)$$

Calculem el seu jacobià JF respecte dels paràmetres:

```
> JF:=jacobian(F(v),[rx,ry,rz,tx,ty,tz,l]):
```

Valors inicials dels paràmetres $P0=(rx0, ry0, rz0, tx0, ty0, tz0, l0)$, transformació $F0$ per a aquests valors i jacobià $JF0$ en aquest punt:

```
> rx0:=0:ry0:=0:rz0:=0:
> tx0:=0:ty0:=0:tz0:=0:
> l0:=10000:
> R0:=value(subs([
> rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
> tx=tx0,ty=ty0,tz=tz0,
> l=l0],
> evalm(R))):
> t0:=value(subs([tx=tx0,ty=ty0,tz=tz0],evalm(t))):
> F0:=v->evalm(l0*(R0&*v)+t0):
> JF0:=value(subs([
> rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
> tx=tx0,ty=ty0,tz=tz0,
> l=l0],
> evalm(JF)));
```

$$JF0 := \begin{bmatrix} 0 & -10000\,z & 10000\,y & 1 & 0 & 0 & x \\ 10000\,z & 0 & -10000\,x & 0 & 1 & 0 & y \\ -10000\,y & 10000\,x & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Coordenades instrumentals transformades per $F0$ i termes independents $U0$ del sistema lineal sobredeterminat:

```
> V01:=F0(v1):V02:=F0(v2):V03:=F0(v3):V04:=F0(v4):
> u1:=evalm(V1-V01):u2:=evalm(V2-V02):
> u3:=evalm(V3-V03):u4:=evalm(V4-V04):
> U0:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

$U0 :=$ [427385.91, 500946.81, 123.30, 427384.29, 500942.92, 45.96, 427366.57, 500957.59, 389.82, 427361.86, 500955.86, 274.67]

Matriu del sistema lineal sobredeterminat:

```
> JF01:=value(subs([x=v1[1],y=v1[2],z=v1[3]],evalm(JF0))):
> JF02:=value(subs([x=v2[1],y=v2[2],z=v2[3]],evalm(JF0))):
> JF03:=value(subs([x=v3[1],y=v3[2],z=v3[3]],evalm(JF0))):
> JF04:=value(subs([x=v4[1],y=v4[2],z=v4[3]],evalm(JF0))):
> A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04);
> At:=transpose(A):
```

A :=
[0 ,-778.1 ,6483.5 ,1 ,0 ,0 ,.463]
[778.1 ,0 ,-4628.4 ,0 ,1 ,0 ,.648]
[-6483.5 ,4628.4 ,0 ,0 ,0 ,1 ,.078]
[0 ,-861.2 ,6625.7 ,1 ,0 ,0 ,.570]
[861.2 ,0 ,-5702.8 ,0 ,1 ,0 ,.662]
[-6625.7 ,5702.8 ,0 ,0 ,0 ,1 ,.086]
[0 ,-479.1 ,3415.0 ,1 ,0 ,0 ,.352]
[479.1 ,0 ,-3520.3 ,0 ,1 ,0 ,.341]
[-3415.0 ,3520.3 ,0 ,0 ,0 ,1 ,.048]
[0 ,-637.1 ,3112.3 ,1 ,0 ,0 ,.559]
[637.1 ,0 ,-5589.3 ,0 ,1 ,0 ,.311]
[-3112.3 ,5589.3 ,0 ,0 ,0 ,1 ,.064]

Matriu N del sistema d'equacions normals i inversa Qm:

```
> N:=evalm(At&*A):
> Qm:=inverse(N):
```

Solució del sistema normal:

```
> m0:=evalm(&*(Qm,At,U0));
```

$$m0 := [.063, -.064, .003, 427350.920, 500962.985, 831.901, -77.592]$$

Primers valors aproximats dels paràmetres i transformació $F1$ per a aquests valors.
Angles de rotació: $rx1$, $ry1$, $rz1$
Matriu de rotació: $R1$
Factor d'escala: $l1$
Vector de translació: $t1$=($tx1$, $ty1$, $tz1$)

```
> rx1:=rx0+m0[1]:ry1:=ry0+m0[2]:rz1:=rz0+m0[3]:
> tx1:=tx0+m0[4]:ty1:=ty0+m0[5]:tz1:=ty0+m0[6]:
> l1:=l0+m0[7]:
> R1:=value(subs([
> rx=rx1,ry=ry1,rz=rz1,
> tx=tx1,ty=ty1,tz=tz1,
> l=l1],
> evalm(R))):
> t1:=value(subs([tx=tx1,ty=ty1,tz=tz1],evalm(t))):
> F1:=v->evalm(l1*(R1&*v)+t1):
```

Coordenades instrumentals dels punts de control transformades per $F1$: nous punts objecte.

```
> v11:=F1(v1):v12:=F1(v2):v13:=F1(v3):v14:=F1(v4):
```

Termes independents del nou sistema sobredeterminat: diferència entre les coordenades dels nous punts objecte i les coordenades de camp dels punts de control.

```
> u1:=evalm(V1-v11):u2:=evalm(V2-v12):
> u3:=evalm(V3-v13):u4:=evalm(V4-v14):
> U1:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

$$U1 := [33.839, 14.818, -4.220, 37.529, 10.945, -3.720, 21.246, 10.451, -1.702, 26.63, 3.284, -2.736]$$

Jacobià de la transformació amb factor d'escala aproximat = 1:

```
> l0:=1:
> JF0:=value(subs([
> rx=rx0,ry=ry0,rz=rz0,
> tx=tx0,ty=ty0,tz=tz0,
> l=l0],
```

```
> evalm(JF)));
```

$$JF0 := \begin{bmatrix} 0 & -z & y & 1 & 0 & 0 & x \\ z & 0 & -x & 0 & 1 & 0 & y \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

Matriu del nou sistema sobredeterminat:

```
> JF01:=value(subs([x=v11[1],y=v11[2],z=v11[3]],evalm(JF0))):
> JF02:=value(subs([x=v12[1],y=v12[2],z=v12[3]],evalm(JF0))):
> JF03:=value(subs([x=v13[1],y=v13[2],z=v13[3]],evalm(JF0))):
> JF04:=value(subs([x=v14[1],y=v14[2],z=v14[3]],evalm(JF0))):
> A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
> At:=transpose(A):
```

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(At&*A):
> Qm:=inverse(N):
```

Solució del sistema normal:

```
> m1:=evalm(&*(Qm,At,U1));
```

$$m1 := [.00046, -.00040, .00315, -2664.764, 84.686, 398.847, .002]$$

Valors aproximats dels paràmetres, correcció i elements de la transformació per a aquests valors:

```
> rx2:=rx0+m1[1]:ry2:=ry0+m1[2]:rz2:=rz0+m1[3]:
> tx2:=tx0+m1[4]:ty2:=ty0+m1[5]:tz2:=ty0+m1[6]:
> l2:=l0+m1[7]:
> R2:=value(subs([
> rx=rx2,ry=ry2,rz=rz2,
> tx=tx2,ty=ty2,tz=tz2,
> l=l2],
> evalm(R))):
> t2:=value(subs([tx=tx2,ty=ty2,tz=tz2],evalm(t))):
> F2:=v->evalm(l2*(R2&*v)+t2):
```

Punts transformats per $F2$: nous punts objecte.

```
> v21:=F2(v11):v22:=F2(v12):v23:=F2(v13):v24:=F2(v14):
```

Termes independents del nou sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v21):u2:=evalm(V2-v22):
> u3:=evalm(V3-v23):u4:=evalm(V4-v24):
> U2:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

*U*2 := [-2.129, 6.293, .5194, -1.60, 5.433, 1.499, -2.228,6.172, 1.278, -1.149, 6.245, .820]

Matriu del nou sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v21[1],y=v21[2],z=v21[3]],evalm(JF0))):
> JF02:=value(subs([x=v22[1],y=v22[2],z=v22[3]],evalm(JF0))):
> JF03:=value(subs([x=v23[1],y=v23[2],z=v23[3]],evalm(JF0))):
> JF04:=value(subs([x=v24[1],y=v24[2],z=v24[3]],evalm(JF0))):
> A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
> At:=transpose(A):
```

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(At&*A):
> Qm:=inverse(N):
```

Solució del sistema normal:

```
> m2:=evalm(&*(Qm,At,U2));
```

*m*2 := [-.107 10^-5, .114 10^-5, -.786 10^-5,.021, .093, -.011, .503 10^-5]

Valors aproximats dels paràmetres, correcció i elements de la transformació per a aquests valors:

```
> rx3:=rx0+m2[1]:ry3:=ry0+m2[2]:rz3:=rz0+m2[3]:
> tx3:=tx0+m2[4]:ty3:=ty0+m2[5]:tz3:=ty0+m2[6]:
> l3:=l0+m2[7]:
> R3:=value(subs([
> rx=rx3,ry=ry3,rz=rz3,
> tx=tx3,ty=ty3,tz=tz3,
> l=l3],
> evalm(R))):
> t3:=value(subs([tx=tx3,ty=ty3,tz=tz3],evalm(t))):
> F3:=v->evalm(l3*(R3&*v)+t3):
```

Punts transformats per *F*3: nous punts objecte.

```
> v31:=F3(v21):v32:=F3(v22):v33:=F3(v23):v34:=F3(v24):
```

Termes independents del nou sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v31):u2:=evalm(V2-v32):
> u3:=evalm(V3-v33):u4:=evalm(V4-v34):
> U3:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

*U*3 := [-.3371, .251, -.511, .182, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .212, -.208]

Matriu del nou sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v31[1],y=v31[2],z=v31[3]],evalm(JF0))):
> JF02:=value(subs([x=v32[1],y=v32[2],z=v32[3]],evalm(JF0))):
> JF03:=value(subs([x=v33[1],y=v33[2],z=v33[3]],evalm(JF0))):
> JF04:=value(subs([x=v34[1],y=v34[2],z=v34[3]],evalm(JF0))):
> A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04);
> At:=transpose(A):
```

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(At&*A):
> Qm:=inverse(N):
```

Solució del sistema normal:

> m3:=evalm(&*(Qm,At,U3));

*m*3 := [.911 10^-10 , .185 10^-9 , .959 10^-8 , -.009,-.001, -.00006, .112 10^-7]

Valors aproximats dels paràmetres, correcció i elements de la transformació per a aquests valors:

```
> rx4:=rx0+m3[1]:ry4:=ry0+m3[2]:rz4:=rz0+m3[3]:
> tx4:=tx0+m3[4]:ty4:=ty0+m3[5]:tz4:=ty0+m3[6]:
> l4:=l0+m3[7]:
> R4:=value(subs([
> rx=rx4,ry=ry4,rz=rz4,
> tx=tx4,ty=ty4,tz=tz4,
> l=l4],
> evalm(R))):
> t4:=value(subs([tx=tx4,ty=ty4,tz=tz4],evalm(t))):
> F4:=v->evalm(l4*(R4&*v)+t4):
Punts de l'aparell transformats per F4: nous punts objecte.
> v41:=F4(v31):v42:=F4(v32):v43:=F4(v33):v44:=F4(v34):
```

Termes independents del nou sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v41):u2:=evalm(V2-v42):
> u3:=evalm(V3-v43):u4:=evalm(V4-v44):
> U4:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

*U*4 := [-.337, .251, -.511, .182, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .213, -.208]

Matriu del nou sistema inicial:

```
> JF01:=value(subs([x=v41[1],y=v41[2],z=v41[3]],evalm(JF0))):
> JF02:=value(subs([x=v42[1],y=v42[2],z=v42[3]],evalm(JF0))):
> JF03:=value(subs([x=v43[1],y=v43[2],z=v43[3]],evalm(JF0))):
> JF04:=value(subs([x=v44[1],y=v44[2],z=v44[3]],evalm(JF0))):
> A:=stack(JF01,JF02,JF03,JF04):
> At:=transpose(A):
```

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(At&*A):
> Qm:=inverse(N):
```

Solució del sistema normal:

```
> m4:=evalm(&*(Qm,At,U4));
```

$m4$:= [.336 10^-10 , .725 10^-9 , -.314 10^-7 , .0277,.00026, -.00026, -.271 10^-7]

Valors aproximats dels paràmetres, correcció i elements de la transformació per a aquests valors.

```
> rx5:=rx0+m4[1]:ry5:=ry0+m4[2]:rz5:=rz0+m4[3]:
> tx5:=tx0+m4[4]:ty5:=ty0+m4[5]:tz5:=ty0+m4[6]:
> l5:=l0+m4[7]:
> R5:=value(subs([
> rx=rx5,ry=ry5,rz=rz5,
> tx=tx5,ty=ty5,tz=tz5,
> l=l5],
> evalm(R))):
> t5:=value(subs([tx=tx5,ty=ty5,tz=tz5],evalm(t))):
> F5:=v->evalm(l5*(R5&*v)+t5):
```

Punts de l'aparell transformats per $F5$: nous punts objecte.

```
> v51:=F5(v41):v52:=F5(v42):v53:=F5(v43):v54:=F5(v44):
```

Termes independents del nou sistema inicial:

```
> u1:=evalm(V1-v51):u2:=evalm(V2-v52):
> u3:=evalm(V3-v53):u4:=evalm(V4-v54):
> U5:=convert(matrix(4,3,[u1,u2,u3,u4]),vector);
```

$U5$:= [-.337, .251, -.511, .181, -.618, .467, -.455, .154, .252, .611, .212, -.208]

Transformació definitiva FD.

Matriu de rotació RD:

```
> RD:=evalm(&*(R4,R3,R2,R1));
```

$$RD := \begin{bmatrix} .99791 & .00266 & .06452 \\ -.00671 & .99801 & .06266 \\ -.06422 & -.06296 & .99595 \end{bmatrix}$$

Factor d'escala lD:

```
> lD:=l4*l3*l2*l1;
```

$$lD := 9947.705$$

Vector de translació tD:

```
> tD:=evalm(
> t4+
> l4*R4&*t3+
> l4*l3*R4&*R3&*t2+
> l4*l3*l2*R4&*R3&*R2&*t1);
```

$$tD := [427352.9497, 500975.6959, 832.808]$$

Transformació en llenguatge MAPLE:

```
> FD:=v->evalm(lD*(RD&*v)+tD):
```

Comprovació de la transformació definitiva sobre un punt de control:

```
> evalm(FD(v1)-V1);
```

$$[.337, -.251, .511]$$

Una altra manera d'expressar la transformació definitiva en llenguatge MAPLE: com a composició de les transformacions parcials.

```
> FD:=v->F4(F3(F2(F1(v))));
```

2.10 Exercicis

1. [MIG81] En una observació del pas del Sol pel meridià superior amb un teodolit s'han obtingut els resultats que es mostren a la taula 2.2.

Hora	Altura del Sol
$T_1 = 11^h\ 40^{min}\ 45.5^s$	$h_1 = 51°\ 51'\ 09''$
$T_2 = 11^h\ 46^{min}\ 18.5^s$	$h_2 = 51°\ 56'\ 42''$
$T_3 = 11^h\ 50^{min}\ 03.0^s$	$h_3 = 52°\ 00'\ 30''$
$T_4 = 11^h\ 56^{min}\ 53.0^s$	$h_4 = 52°\ 02'\ 24''$
$T_5 = 12^h\ 05^{min}\ 34.5^s$	$h_5 = 52°\ 01'\ 06''$
$T_6 = 12^h\ 12^{min}\ 12.0^s$	$h_6 = 51°\ 55'\ 45''$
$T_7 = 12^h\ 16^{min}\ 04.5^s$	$h_7 = 51°\ 51'\ 30''$

Taula 2.2

Per al petit interval de temps de les observacions fetes, es pot considerar que la altura h és una funció parabòlica del temps horari T:

$$h = aT^2 + bT + c$$

a) Suposant que els temps T_i són exactes i que només les altures h_i estan sotmeses a error, estimeu, amb un interval de confiança del 95%, el valor dels paràmetres a, b i c.

b) Calculeu quina és l'altura màxima en aquest interval de temps i a quina hora es dóna.

NOTA: Considereu un sistema de coordenades cartesianes amb l'origen a $T_0 = 12^h\ 00^{min}\ 00^s$ i $h_0 = 51°\ 50'\ 00''$. Fent aquest canvi d'origen, les dades de la taula 2.3, expressades en segons horaris i segons d'arc, respectivament, es converteixen en les que es mostren a la taula 2.3.

Hora	Altitud observada
$T_1 = -1154.5^s$	$h_1 = 69''$
$T_2 = -821.5^s$	$h_2 = 402''$
$T_3 = -597.0^s$	$h_3 = 630''$
$T_4 = -187.0^s$	$h_4 = 744''$
$T_5 = 334.5^s$	$h_5 = 666''$
$T_6 = 732.0^s$	$h_6 = 345''$
$T_7 = 964.5^s$	$h_7 = 90''$

Taula 2.3

2. Es vol ajustar la trajectòria d'un mòbil per a una paràbola

$$y = ax^2 + bx + c$$

mesurant la coordenada y corresponent als valors de x = 0, 3, 6 i 9 m amb els resultats y = 2.81, 5.03, 4.75 i 3.01 m, respectivament.

a) Estimeu els valors dels paràmetres a, b i c amb un 95% de confiança.

b) Quin és el valor màxim de y i per a quin valor de x?

3. Determineu, amb un nivell de significació 0.05, els paràmetres d'una transformació de semblança composta de rotació d'eixos, translació i factor d'escala, donades les coordenades (en metres) de 4 punts de control vi i les transformades corresponents vti.

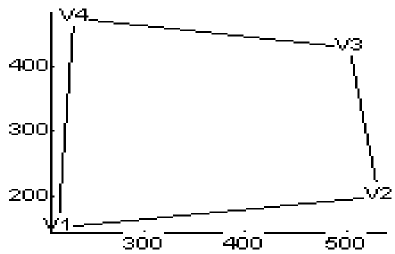

Fig. 2.20 Punts objecte de la transformació

$v1$ [215,36, 150,44], $vt1$ [1654,32, 2056,51]
$v2$ [531,21, 200,15], $vt2$ [2400,29, 1769,32]
$v3$ [501,10, 430,21], $vt3$ [2622,67, 2305,06]
$v4$ [230,57, 475,18], $vt4$ [2093,17, 2740,58]

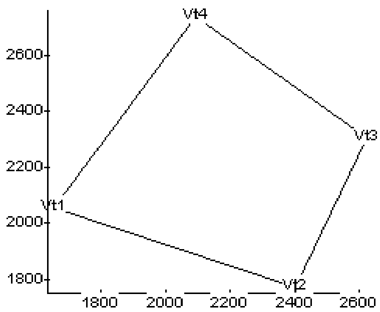

Fig. 21. Punts transformats

4. Estimeu, amb un 95% de confiança, el vertader valor dels tres angles A, B i C (Fig. 2.22) a partir de les mesures

$$A = 100^\circ\ 21'\ 36''$$
$$B = 115^\circ\ 35'\ 14''$$
$$C = 144^\circ\ \ 5'\ 12''$$
$$D = 259^\circ\ 40'\ 30''$$

amb pesos 1, 1, 1 i 2, respectivament.

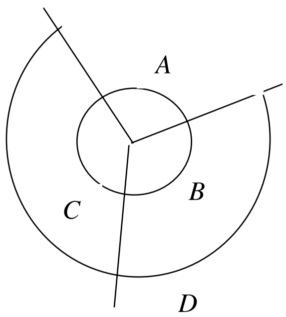

Fig. 2.22 Mesures angulars

5. Es coneix la distància d = 100 m entre dos punts A i B. Un tercer punt, C, està situat sobre la perpendicular al segment AB que passa per B (Fig. 2.23). S'observa la distància entre C i A amb el resultat u_1 =131.20 m amb desviació tipus σ_1 = 0.005 m, i l'angle CAB amb el resultat u_2 = 40º 20' 0'' amb desviació tipus σ_2 = 20''. Estimeu la distància x entre C i B seguint els següents passos:

a) Escriure els observables u_1 i u_2 en funció de la incògnita x i linealitzar aquestes dues relacions al voltant d'un valor aproximat x^0.

b) Estimar el valor de la incògnita x pel criteri dels mínims quadrats, mitjançant el mètode de les observacions indirectes, prenent σ_2^2 com a variància de referència.

c) Calcular l'interval de confiança per al vertader valor de la incògnita x amb nivell de significació $\alpha = 0.05$.

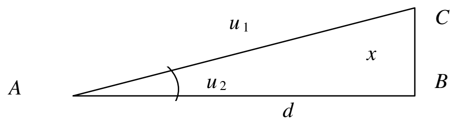

Fig. 2.23 Mesures angular i de distància

6. Triangulació. Intersecció directa. Es coneixen les coordenades (en metres) de 3 estacions (Fig. 2.24),

P1 [10578,235, 25376,375], P2 [11256,739, 20615,254], P3 [12987,658, 28563,437]

des de les quals es visa un punt P de coordenades desconegudes. Les orientacions observades de les visuals són, respectivament,

$lo_1 = 35^\circ\ 32'\ \ 5'',3$
$lo_2 = \ \ 7^\circ\ \ 7'\ 20'',6$
$lo_3 = 220^\circ\ \ 9'\ 48'',7$

Es tracta d'estimar les coordenades de P partint dels valors aproximats P [12121,400, 27537,100].

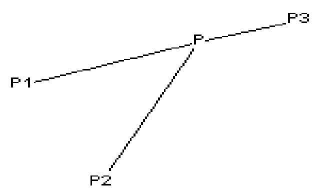

Fig. 2.24 Intersecció directa

7. Triangulació. Intersecció inversa. Es coneixen les coordenades (en metres) de 4 estacions (Fig. 2.25),

P1 [10512,256, 8314,847], P2 [12614,415, 9512,413]
P3 [14320,536, 7114,358] , P4 [12150,435, 7001,124]

que són visades des d'un punt P de coordenades desconegudes. Les orientacions observades de les visuals són, respectivament,

$lo_1 = 278^\circ\ 34'\ \ 7''\ ,9$, $\quad lo_3 = \ 78^\circ\ \ \ 1'\ 26''\ ,6$
$lo_2 = \ 13^\circ\ 54'\ 52'',1$, $\quad lo_4 = \ 107^\circ\ \ 28'\ 49''\ ,6$

Es tracta d'estimar les coordenades de P partint dels valors aproximats P [11251,500, 7824,200].

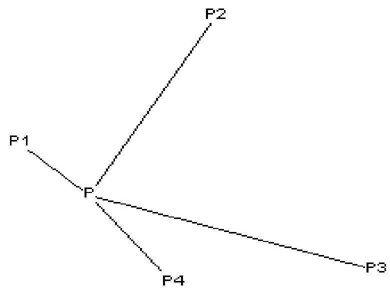

Fig. 2.25 Intersecció inversa

8. Trilateració. Es coneixen les coordenades (en metres) de 3 estacions (Fig. 2.26),

$P1$ [5234,475, 7365,739], $P2$ [7735,264, 8845,648], $P3$ [9157,483, 6256,354]

des de les quals es visa un punt P de coordenades desconegudes. Les distàncies observades de les visuals són, respectivament,

$$Do_1 = 1797{,}360 \text{ m}$$
$$Do_2 = 2149{,}325 \text{ m}$$
$$Do_3 = 2280{,}083 \text{ m}$$

Es tracta d'estimar les coordenades de P partint dels valors aproximats P [6954,200, 6843,200].

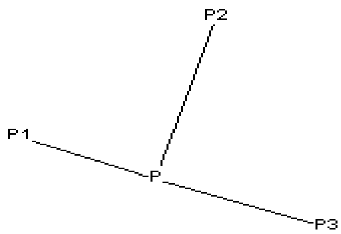

Fig. 2.26 Trilateració

9. Utilització d'equacions d'angle i de distància conjuntament. Es coneixen les coordenades (en metres) de 3 estacions (Fig. 2.27),

$P1$ [10578,235, 25376,375], $P2$ [11256,739, 20615,254], $P3$ [12987,658, 28563,437]

des de les quals es visa un punt P_v de coordenades desconegudes. Les orientacions observades de les visuals són, respectivament,

$$lo_{1v} = 35^\circ\ 32'\ 5'',3, \qquad \sigma_{1vl} = 15''$$
$$lo_{2v} = 7^\circ\ 7'\ 20'',6, \qquad \sigma_{2vl} = 15''$$

$$lo_{3v} = 220^{\circ}\ \ 9'\ 48'',7, \qquad \sigma_{3vl} = 15''$$

Des del punt $P3$ també s'observa la distància a Pv amb el resultat

$$D3v = 1342{,}980 \text{ m}, \qquad \sigma_{3vd} = 1 \text{ cm}$$

A més, s'estaciona en un punt Pe, de coordenades també desconegudes, des del qual es fan observacions angulars visant els punts $P1$, $P2$ i Pv, amb els resultats

$$lo_{e1} = 307^{\circ}\ \ 7'\ 22'',2, \qquad \sigma_{e1l} = 15''$$
$$lo_{e2} = 171^{\circ}\ 20'\ 16'',3, \qquad \sigma_{e2l} = 15''$$
$$lo_{ev} = \ \ 4^{\circ}\ 29'\ 27'',5, \qquad \sigma_{evl} = 15''$$

i observacions de distància als punts $P1$ i Pv amb els resultats

$$De1 = 1132{,}102 \text{ m}, \qquad \sigma_{e1d} = 1 \text{ cm}$$
$$Dev = 3088{,}676 \text{ m}, \qquad \sigma_{evd} = 1 \text{ cm}$$

Es tracta d'estimar les coordenades de Pv i Pe partint dels valors aproximats

$$Pv\ [12121{,}400,\ 27537{,}100],\ Pe\ [11348{,}500,\ 24546{,}700]$$

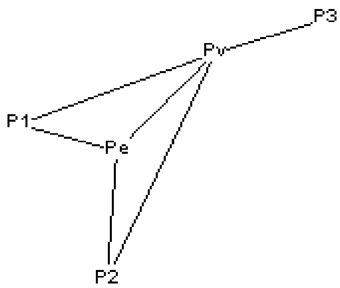

Fig. 2.27 Xarxa amb observacions d'angle i de distància

10. Estimeu, amb un 95% de confiança, els paràmetres de la transformació de semblança tridimensional que transforma coordenades en el sistema WGS84 a coordenades en el sistema ED50, a partir dels punts de control següents:

x (WGS84)	y (WGS84)	z (WGS84)	x (ED50)	y (ED50)	z (ED50)
4789399,0	176724,7	4194551,7	4789480,69	176824,01	4194672,30
4789104,1	176577,3	4194924,0	4789185,80	176676,61	4195044,60
4788980,0	176756,1	4195057,4	4789061,70	176855,41	4195177,99

3 Observacions condicionades

3.1 Introducció

En aquest capítol es tracta el problema de l'*ajust d'observacions en sentit estricte*. El plantejament general del problema és el següent:

1. Volem esbrinar el *vertader valor* de n magnituds observables $x_1, x_2, ..., x_n$.

2. Hem fet n observacions directes $u_1, u_2, ..., u_n$, que, com a tals observacions, constitueixen *n valors aproximats*.

3. Es tracta, per tant, d'*ajustar les observacions*, és a dir, de corregir cada observació $u_i \rightarrow u_i + v_i$ de manera que s'aproximi el màxim possible al "vertader valor" de la magnitud x_i.

4. Per fer-ho disposarem de *h condicions* sobre les magnituds x_i, amb $h<n$, que s'expressen en forma de h equacions,

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
... \\
f_h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0
\end{gathered}
$$

   en general no lineals, que constitueixen l'anomenat **model matemàtic** del problema d'observacions condicionades. Evidentment, aquestes equacions no seran satisfetes per les observacions a causa de la seva imprecisió:

$$
\begin{gathered}
f_1(u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0 \\
f_2(u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0 \\
... \\
f_n(u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0
\end{gathered}
$$

Com és habitual, començarem estudiant el cas més senzill, corresponent a un model d'equacions de condició lineals, i després abordarem el cas general mitjançant la linealització de les equacions.

El capítol anterior, d'observacions indirectes, comença amb el cas d'observacions equiprecises i a continuació tracta el cas d'observacions ponderades. Això permet establir l'equivalència entre diferents formes d'introduir pesos en les equacions. Ara ja no val la pena fer la distinció entre observacions ponderades i observacions equiprecises, perquè aquestes segones no són més que un cas particular de les primeres amb pesos unitat.

En aquest capítol, doncs, considerarem directament que cada observació és acompanyada de l'error o el pes corresponent (model estocàstic), i que aquests no són necessàriament iguals.

Exemple 1 [MIG81] *Ajust d'observacions angulars* (1)
Plantejament del problema

Es mesuren 6 angles (Fig. 3.1) amb un teodolit.

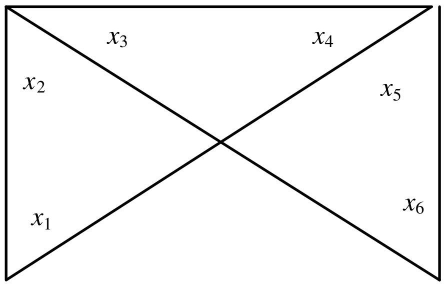

Fig. 3.1 Observacions angulars

Els resultats són els que es mostren en la taula 3.1, on també apareixen els diferents pesos.

Angle	Lectura	Pes
x_1	$u_1 = 44°50'44''$	1
x_2	$u_2 = 46°10'25''$	3
x_3	$u_3 = 45°55'12''$	3
x_4	$u_4 = 43°04'03''$	3
x_5	$u_5 = 48°32'45''$	3
x_6	$u_6 = 42°27'42''$	1

Taula 3.1

Es tracta d'ajustar les observacions u_i considerant les dues equacions de condició

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180°$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 180°$$

que no són satisfetes per les observacions

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 180° + 24''$$
$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 180° - 18''$$

3.2 Estimació de paràmetres mitjançant equacions de condició en un model lineal

Suposem que volem esbrinar el *vertader valor* de n magnituds $x_1, x_2, ..., x_n$, de les quals hem fet n observacions directes $u_1, u_2, ..., u_n$. És a dir, tenim n valors aproximats i a més, disposem de h condicions, amb $h<n$, que s'expressen en forma de h equacions lineals,

$$\begin{cases} c_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ c_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad .... \\ c_h + a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + ... + a_{hn}x_n = 0 \end{cases}$$

que, matricialment, escriurem

$$c + Ax = 0 \tag{3.1}$$

Algebraicament és un *sistema indeterminat* amb infinites solucions x possibles. Es tracta d'establir un criteri que ens permeti escollir una d'aquestes solucions partint de les següents

Hipòtesis:

1. La matriu A es de rang h; és a dir, no hi ha cap condició supèrflua.

2. Les magnituds observables

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

són variables aleatòries normals i independents de mitjana

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$$

i desviació típica respectiva

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$$

Evidentment, la mitjana μ, que és *el vertader valor de x*, satisfà les condicions (3.1):

$$c + A\mu = 0 \tag{3.2}$$

En aquests termes, *esbrinar el vertader valor de x* s'ha de traduir per *estimar els paràmetres* μ_i i σ_i .

3. A més, disposem d'un conjunt d'observacions

$$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$$

amb pesos respectius

$$p_1, p_2, ..., p_n$$

on

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$$

i on σ^2 és la variància de referència o estàndard de les observacions de pes unitat.

Anomenarem P

$$W_u = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

la matriu de pesos de les observacions. Per tant, la matriu cofactor del conjunt d'observacions s'escriurà

$$Q_u = P^{-1}$$

i la matriu de variància-covariància,

$$\Sigma_u = \sigma^2 P^{-1}$$

4. Suposarem coneguts els pesos p_i. La variància de referència σ^2 no és sempre coneguda i pot ser un paràmetre que s'ha d'estimar per avaluar les desviacions típiques σ_i.

3.3 Mínims quadrats i màxima versemblança

Definició 1 *Residus condicionals o errors de tancament*

Anomenarem *residus condicionals* les quantitats r_i que es generen en substituir les observacions u en el sistema de condicions (3.1) a causa que aquestes observacions no són exactes. En alguns contextos s'acostuma a anomenar aquests residus *errors de tancament*.

$$\begin{cases} c_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = r_1 \\ c_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n = r_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_h + a_{h1}u_1 + a_{h2}u_2 + \dots + a_{hn}u_n = r_h \end{cases}$$

Hi ha, doncs, tants residus condicionals com equacions de condició. En notació matricial escriurem

$$c + Au = r \tag{3.3}$$

Definició 2 *Residus* o *correccions*

Anomenarem *residus* o *correccions* les quantitats v_i que s'han de sumar a les observacions per tal que se satisfacin les equacions de condició

$$c + A(u+v) = 0 \tag{3.4}$$

Dit d'una altra manera, per a cada solució x del sistema (3.1) hi ha un vector de correccions $v(x)$ definit per

$$v = x - u \tag{3.5}$$

El criteri dels mínims quadrats en observacions condicionades

La següent consideració estableix, a partir del criteri de màxima versemblança, el criteri de mínims quadrats que cal seguir per a l'estimació dels paràmetres μ_i .

Com que les observacions u_i són variables aleatòries $N(\mu_i\ ,\ \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}})$ independents, la seva funció de versemblança és el producte de les funcions de densitat

$$L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \prod_{i=1}^{n} p_i e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_p (u_i - \mu_i)^2}$$

que serà màxima quan el sumatori de l'exponent sigui mínim. Seguint el criteri de màxima versemblança, prendrem, com a estimadors de les mitjanes μ_i , les variables x_i que facin mínima la suma ponderada $v^T Pv$ dels quadrats de les correccions

$$v^T Pv = \sum_{i=1}^{n} p_i (u_i - x_i)^2$$

Es tracta, doncs, d'un estimador en el sentit minimoquadràtic.

3.3.1 El problema d'extrems condicionats

Aquest mínim és trivialment nul per a $x_i = u_i$, però en realitat es tracta d'un mínim condicionat amb les equacions (3.1).

D'altra banda, de (3.3) i (3.4) es dedueix el següent *sistema d'equacions de condició per a les correccions* o *residus*:

$$r + Av = 0 \tag{3.6}$$

A cada vector v que satisfaci (3.6), li correspondrà un vector $x = u + v$ que satisfà (3.1). El problema, doncs, es pot replantejar en els termes següents: es tracta de trobar el mínim de la funció

$$f(v_1,\ v_2,\ ...,v_n) = v^T Pv = p_1 v^2_1 + p_2 v^2_2 + ... + p_n v^2_n$$

amb les h condicions donades per les equacions (3.6)

$$\begin{cases} g_1(v_1, v_2, \ldots, v_n) = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n + r_1 = 0 \\ g_2(v_1, v_2, \ldots, v_n) = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n + r_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_h(v_1, v_2, \ldots, v_n) = a_{h1}v_1 + a_{h2}v_2 + \ldots + a_{hn}v_n + r_h = 0 \end{cases}$$

La solució d'aquest problema es resumeix en la proposició següent:

Proposició 1

El vector v que fa mínima la funció $f(v) = v^T P v$ amb les condicions $r + A^T v = 0$, és determinat per l'expressió

$$v = -P^{-1} A^T (AP^{-1} A^T)^{-1} r \tag{3.7}$$

Demostració

Segons el mètode dels multiplicadors de Lagrange, existeixen h nombres reals λ_i tals que

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_1} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial g_h}{\partial v_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_2} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial g_h}{\partial v_2} = 0$$

....

$$\frac{\partial f}{\partial v_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial v_n} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial g_h}{\partial v_n} = 0$$

o, en notació matricial,

$$(df)^T + (dg)^T \lambda = 0$$

Fent els càlculs,

$$(df)^T = 2Pv \quad \text{i} \quad (dg)^T = A^T$$

Escrivint $k = -\lambda/2$, s'obté l'expressió

$$Pv = A^T k \tag{3.8}$$

que, substituïda en l'equació (3.6) de condicions, dóna el següent sistema determinat de h equacions en les h incògnites k_i:

$$(AP^{-1}A^T)k = -r \tag{3.9}$$

Substituint la solució

$$k = -(AP^{-1}A^T)^{-1} r \tag{3.10}$$

en l'expressió (3.8) del sistema de Lagrange, s'obté el resultat proposat.

Observació

L'anterior demostració només estableix que el vector proposat satisfà les condicions necessàries de Lagrange. Es pot demostrar formalment que es tracta d'un mínim condicionat (per exemple, LIN63 teorema 9.3.1, p. 229), però és suficient la justificació intuïtiva induïda per les condicions del problema: el sistema (3.9) és determinat, ja que la matriu A es de rang h i, per tant, el candidat a extrem és únic. D'altra banda, sembla natural l'existència d'un mínim condicionat, mentre que un màxim no té cap sentit; sempre podrem trobar vectors x que satisfacin (3.1) i estiguin allunyats de u tant com vulguem.

Definició 3 *Sistema d'equacions normals*

En el problema d'observacions condicionades definit pel sistema de h condicions lineals $c + A^T x = 0$, el vector u d'observacions i la matriu P de pesos, anomenem *sistema d'equacions normals* al sistema determinat d'ordre h

$$Nk = -r \qquad (3.11)$$

on

$$N = AP^{-1}A^T$$

i r és el vector de residus condicionals

$$r = Au + c$$

Conseqüència de la proposició 1

L'estimador minimoquadràtic del *vertader valor* μ de les magnituds observables x és

$$m = (I - P^{-1} A^T (AP^{-1} A^T)^{-1} A)u - P^{-1} A^T (AP^{-1} A^T)^{-1} c \qquad (3.12)$$

Efectivament, només cal fer $m = u + v$ i considerar les expressions (3.7) de v i (3.3) de r.

Tanmateix, habitualment, per calcular m no s'aplica directament l'expressió (3.12) sinó que es segueix la seqüència d'operacions següent:

1. Plantejament del sistema indeterminat per a les correccions:

$$r + Av = 0$$

2. Plantejament del sistema d'equacions normals

$$Nk = -r$$

Càlcul de la matriu del sistema

$$N = AP^{-1}A^T$$

(guardant el resultat parcial $P^{-1}A^T$), i de la seva inversa N^{-1}.

3. Càlcul dels multiplicadors de Lagrange:

$$k = - N^{-1} r$$

4. Càlcul dels residus:

$$v = P^{-1}A^T k$$

5. Càlcul de les observacions ajustades:

$$m = u + v$$

Exemple 2 [MIG81] *Ajust d'observacions angulars* (2)
Càlcul de les observacions ajustades

Anem a resoldre el problema d'ajust d'observacions angulars plantejat a l'exemple 1 aplicant la seqüència d'operacions que acabem de descriure.

1. El sistema d'equacions $r + Av = 0$ per a les correccions v s'escriu

$$\begin{pmatrix} 24'' \\ -18'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com que les observacions són independents, la matriu P de pesos és la matriu diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu cofactor de les observacions serà la seva inversa,

$$Q_u = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matriu $P^{-1}A^T$ és

$$P^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu $N = AP^{-1}A^T$ del sistema d'equacions normals resulta

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 2/6 \\ 2/6 & 2 \end{pmatrix}$$

i la seva inversa,

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.562 & -0.187 \\ -0.187 & 0.562 \end{pmatrix}$$

3. Multiplicadors de Lagrange:

$$k = -\begin{pmatrix} 0.562 & -0.187 \\ -0.187 & 0.562 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.9 \\ 14.6 \end{pmatrix}$$

4. Residus:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16.9 \\ 14.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17'' \\ -5'' \\ -1'' \\ -1'' \\ 5'' \\ 15'' \end{pmatrix}$$

5. Observacions ajustades:

$$m = \begin{pmatrix} 44^o50'44'' \\ 46^o10'25'' \\ 45^o55'12'' \\ 43^o04'03'' \\ 48^o32'45'' \\ 42^o27'42'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17'' \\ -5'' \\ -1'' \\ -1'' \\ 5'' \\ 15'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44^o50'27'' \\ 46^o10'20'' \\ 45^o55'11'' \\ 43^o04'02'' \\ 48^o32'50'' \\ 42^o27'57'' \end{pmatrix}$$

Comprovem que les observacions ajustades satisfan les equacions de condició

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 180^o \ , \ m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 180^o$$

3.4 Precisió en l'estimació per mínims quadrats

Anem a estudiar l'error associat a l'estimador minimoquadràtic m determinat a (3.12) i a establir la forma d'estimar la variància de referència o de les observacions de pes unitat.

3.4.1 Errors associats a l'estimador per mínims quadrats

Proposició 2

L'esperança matemàtica i la matriu cofactor de l'estimador m són, respectivament,

$$E(m) = \mu \tag{3.13}$$

i

$$Q_m = P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1} \tag{3.14}$$

Demostració

$$E(m) = (I - P^{-1} A^T (AP^{-1} A^T)^{-1} A)E(u) - P^{-1} A^T (AP^{-1} A^T)^{-1} c$$

Però, atès que, per hipòtesi, $E(u) = \mu$ i $c = -A\mu$, s'obté $E(m) = \mu$.

Per calcular Q_m només cal tenir en compte que $Q_u = P^{-1}$ i aplicar la llei de propagació de la matriu cofactor a l'equació (12), que dóna m a partir de u:

$$m = (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A)u - Q_u A^T (AQ_u A^T)^{-1} c \Rightarrow$$

$$Q_m = (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A)Q_u (I - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A)^T =$$

$$= Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u - [Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u] A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u =$$

$$= Q_u - Q_u A^T (A Q_u A^T)^{-1} A Q_u$$

Com a **conseqüència** de la proposició 2 tenim:

1. El vector m donat per l'expressió (3.12) és un estimador puntual no esbiaixat del "vertader valor" μ de les magnituds observables.

2. La matriu de variància-covariància de l'estimador m és

$$\Sigma_m = \sigma^2 Q_m \tag{3.15}$$

En particular, la variància σ_{mi}^2 de l'estimador m_i és determinada per l'expressió

$$\sigma_{mi}^2 = \sigma^2 Q_{mii} = \sigma^2 \{P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1}\}_{ii}.$$

3. Atesa l'expressió (3.14) de la matriu cofactor Q_m de les observacions ajustades, i com que P^{-1} és la matriu cofactor Q_u de les observacions inicials, podem assegurar que ***l'error de les observacions ajustades és sempre inferior a l'error de les observacions inicials***.

3.4.2 L'error en les observacions. Càlcul de la variància de referència

Proposició 3

La variable aleatòria

$$Y = \frac{v^T P v}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(u_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \tag{3.16}$$

té una distribució de probabilitat que segueix una llei χ_h^2 *khi quadrat* amb h graus de llibertat.

Demostració

S'ha de demostrar que Y es pot escriure com a suma de h variables $N(0,\sigma)$ al quadrat. El procés corresponent (per exemple, LIN63, teorema 9.5.2, p. 235) és bastant llarg i suposa, a més de càlculs complicats, resultats d'estadística matemàtica l'estudi dels quals ens conduiria massa lluny dels nostres propòsits.

Tanmateix, aquest és un resultat intuïtivament raonable. L'expressió (3.16) és la suma de quadrats d'un valor observat u_i menys el seu valor "mitjà" m_i calculat segons el model proposat, dividit per la seva desviació típica σ_i. És un típic escenari khi quadrat. Quant al nombre de graus de llibertat, pensem que Y és una variable aleatòria ja que hi ha equacions de condició; sense aquestes condicions, el mínim de Y seria trivialment 0 en $m = u$. Per tant, sembla lògic que el nombre de graus de llibertat sigui el d'equacions de condició, que constitueixen la "redundància" o l' "excés d'informació" del problema.

Com a **conseqüència** de la proposició 3, i atès que l'esperança matemàtica d'una variable khi quadrat és el nombre de graus de llibertat, tenim que $E(Y) = h$ i, per tant,

$$E\left(\frac{v^T P v}{h}\right) = \sigma^2$$

amb la qual cosa

$$S^2 = \left(\frac{v^T P v}{h}\right) \tag{3.17}$$

és un *estimador puntual no esbiaixat de la variància de referència.*

Com a **conseqüència** d'aquest resultat, tenim que, si la variància de referència σ^2 és desconeguda, aleshores la matriu de variància-covariància de l'estimador m es pot avaluar a partir de l'expressió

$$\Sigma_m \sim S^2 Q_m \tag{3.18}$$

En particular,

$$\sigma_{mi}^2 \sim S^2 Q_{mii} = S^2\{P^{-1} - P^{-1} A^T (A P^{-1} A^T)^{-1} A P^{-1}\}_{ii}$$

3.4.3 Estimació per intervals

Fins ara hem fet una estimació puntual del vertader valor μ dels observables per l'estadístic m que es calcula segons l'equació (3.12), i del vertader valor de la variància de referència σ^2 per l'estadístic S^2 que es calcula segons l'equació (3.17). Anem a veure com es calcules els intervals de confiança corresponents.

També com a **conseqüència** de la proposició 3 tenim que, fixat un nivell de significació α, l'*interval de confiança de probabilitat* (*1-* α) *per al vertader valor de la desviació tipus* σ és

$$\frac{\sqrt{v^T P v}}{\sqrt{\chi_b^2}} < \sigma < \frac{\sqrt{v^T P v}}{\sqrt{\chi_a^2}} \qquad (3.19)$$

on χ_a^2 i χ_b^2 són els valors de la variable χ^2 amb h graus de llibertat tals que

$$P(\chi^2 < \chi_a^2) = P(\chi^2 > \chi_b^2) = \alpha/2$$

Per establir l'interval de confiança dels estimadors m_i, és necessària la proposició següent:

Proposició 4

La variable aleatòria

$$t_i = \frac{m_i - \mu_i}{S\sqrt{Q_{mii}}}$$

té una distribució de probabilitat que segueix una llei *t de Student* amb h graus de llibertat.

Demostració

Es tracta de veure que t_i es pot escriure de la forma

$$t_i = \sqrt{h}\,\frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

on Z_i és $N(0,1)$ i Y és χ^2 amb h graus de llibertat.

Segons les equacions (3.13) i (3.15) que estableix la proposició 2, la variable aleatòria

$$Z_i = \frac{m_i - \mu_i}{\sigma\sqrt{Q_{mii}}}$$

és $N(0,1)$. D'altra banda, considerant l'expressió (3.16) de Y i (3.17) de S^2, podem escriure

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{Y}} = \frac{\sigma}{S}$$

i, per tant,

$$t_i = \sqrt{h}\,\frac{Z_i}{\sqrt{Y}}$$

la qual cosa, i tenint en compte la proposició 3, demostra el resultat proposat.

Com a **conseqüència** de la proposició 4, estem en condicions d'establir que, fixat un nivell de significació α, l'*interval de confiança de probabilitat* (*1-* α) *per als vertaders valors dels paràmetres* μ_i és

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \mu_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \tag{3.20}$$

on T_α és el valor de la variable t_h de *Student* amb *h* graus de llibertat tal que

$$P(-t_\alpha < t_h < t_\alpha) = 1 - \alpha$$

Exemple 3 [MIG81] *Ajust d'observacions angulars* (3)
Estimació per intervals

A continuació calcularem la matriu cofactor i els intervals del 95% de confiança per a les observacions ajustades dels exercicis 1 i 2. El procés s'ha executat amb MAPLE V amb els paquets d'àlgebra lineal i estadística com és habitual.

Matriu del sistema inicial de condicions i transposada:

```
> A:=matrix(2,6,[1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> At:=transpose(A):
```

Graus de llibertat:

```
> gdl:=2:
```

Vector de residus:

```
> v:=vector(6,[-17,-5,-1,-1,5,15]):
> vt:=transpose(v);
```

Matriu de pesos:

```
> P:=diag(1,3,3,3,3,1);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriu de pesos = matriu cofactor de les observacions:

```
> Qu:=inverse(P);
```

$$Qu := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(&*(A,Qu,At));
```

$$N := \begin{bmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Ninv:=inverse(n);
```

$$Ninv := \begin{bmatrix} 9/16 & -3/16 \\ -3/16 & 9/16 \end{bmatrix}$$

Matriu cofactor *Qm* de les observacions ajustades:

```
> qq:=evalm(&*(Qu,At,Ninv,A,Qu)):
> Qm:=evalm(Qu-qq);
```

$$Qm := \begin{bmatrix} 7/16 & -3/16 & -1/8 & -1/8 & 1/16 & 3/16 \\ -3/16 & 13/48 & -1/24 & -1/24 & 1/48 & 1/16 \\ -1/8 & -1/24 & 1/4 & -1/12 & -1/24 & -1/8 \\ -1/8 & -1/24 & -1/12 & -1/12 & -1/24 & -1/8 \\ 1/16 & 1/48 & -1/24 & -1/24 & 13/48 & -3/16 \\ 3/16 & 1/16 & -1/8 & -1/8 & -3/16 & 7/16 \end{bmatrix}$$

Variància de referència:

```
> S2:=evalm(&*(vt,P,v))/gdl;
```

$$S2 := 335$$

Desviació tipus *Su* de les observacions sense ajustar (en segons d’arc):

```
> Su:=array(1..6):
```

```
> for i from 1 to 6 do
> Su[i]:=evalf(sqrt(S2*Qu[i,i]))
> od;
```

$$
\begin{aligned}
Su[1] &:= 18.3\\
Su[2] &:= 10.6\\
Su[3] &:= 10.6\\
Su[4] &:= 10.6\\
Su[5] &:= 10.6\\
Su[6] &:= 18.3
\end{aligned}
$$

Desviació tipus *Sm* de les observacions ajustades (en segons d'arc):

```
> Sm:=array(1..6):
> for i from 1 to 6 do
> Sm[i]:=evalf(sqrt(S2*Qm[i,i]))
> od;
```

$$
\begin{aligned}
Sm[1] &:= 12.1\\
Sm[2] &:= 9.5\\
Sm[3] &:= 9.1\\
Sm[4] &:= 9.1\\
Sm[5] &:= 9.5\\
Sm[6] &:= 12.1
\end{aligned}
$$

Observem que les desviacions tipus *Sm* de les observacions ajustades són més petites que les desviacions tipus *Su* de les desviacions inicials sense ajustar.

Calculem, ara, els intervals del 95% de confiança:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 4.3026$$

Errors amb el 95% de confiança (en segons d'arc):

```
> dm:=array(1..6):
> for i from 1 to 6 do
> dm[i]:=evalf(t*sm[i])
> od;
```

$$
\begin{aligned}
dm[1] &:= 52.1\\
dm[2] &:= 41.0\\
dm[3] &:= 39.4\\
dm[4] &:= 39.4\\
dm[5] &:= 41.0\\
dm[6] &:= 52.1
\end{aligned}
$$

3.5 Equacions de condició no lineals

Suposem, ara, que les h condicions a què estan sotmeses les n incògnites $x_1, x_2, ..., x_n$ són determinades per h equacions **no lineals** (model matemàtic) que podem representar de la forma $F(x) = 0$, on F es una funció no lineal de R^n sobre R^h:

$$F:\Omega \subset R^n \quad \rightarrow \quad R^h$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Establirem un paral·lelisme entre els diferents passos que cal seguir per a plantejar i resoldre el cas lineal ja estudiat i el cas no lineal (vegeu, com a exemple, l'exercici 2).

1. Plantejament de les equacions de condició

$$c + Ax = 0 \quad \leftrightarrow \quad F(x) = 0$$

o bé

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ f_h(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

2. Càlcul dels residus condicionals o errors de tancament r introduint les observacions u en les condicions

$$c + Au = r \quad \leftrightarrow \quad F(u) = r$$

o bé

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, ..., u_n) &= r_1 \\ f_2(u_1, u_2, ..., u_n) &= r_2 \\ &\cdots \\ f_h(u_1, u_2, ..., u_n) &= r_h \end{aligned} \tag{3.22}$$

3. Definició de les correccions v

$$c + A(u+v) = 0 \quad \leftrightarrow \quad F(u+v) = 0$$

o bé

$$\begin{aligned} f_1(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n) &= 0 \\ f_2(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n) &= 0 \\ &\cdots \\ f_h(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Podem **linealitzar** aquesta expressió fent un desenvolupament de Taylor fins a ordre 1 en un entorn del punt $x = u$ que representa els valors observats

$$F(u+v) = F(u) + dF_u\, v + ... \qquad (3.24)$$

o bé

$$f_1(u+v) = f_1(u) + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_n} v_n$$

$$f_2(u+v) = f_2(u) + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_n} v_n$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$f_h(u+v) = f_h(u) + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_n} v_n$$

Tenint en compte que

$$f_i\,(u+v) = 0,\ i = 1, 2, ..., h$$

i que

$$f_i\,(u) = r_i\,,\ i = 1, 2, ..., h$$

matricialment escriurem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(u)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(u)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_h(u)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_h \end{pmatrix}$$

o bé

$$0 = r + dF_u\, v \qquad (3.25)$$

4. Hem obtingut unes **equacions de condició lineals per a les correccions** anàlogues a les del cas lineal:

$$Av = -r \;\leftrightarrow\; dF_u\, v = -r$$

La diferència entre els dos casos és que, en el cas lineal, les equacions de condició per a les correccions surten directament d'aplicar les definicions de correccions i residus condicionals a les equacions de condició inicials,

$$\{c + A(u+v) = 0,\ c + Au = r\} \Leftrightarrow Av = -r$$

mentre que, en el cas no lineal, les equacions de condició per a les correccions surten de linealitzar les equacions de condició inicials,

$$F(u+v) = 0 \rightarrow \textit{linealitzant} \rightarrow dF_u\, v = -r$$

A partir d'aquest punt, el procés és el mateix que el corresponent al cas lineal, identificant la matriu del sistema amb el jacobià de la funció F en el punt u:

$$A \equiv dF_u$$

Fent aquesta adaptació, el procés descrit a l'apartat 3.3 quedarà de la forma següent:

- Plantejament del sistema per a les correccions:

$$(dF_u)\ v = -r \tag{3.26}$$

- Plantejament del sistema $Nk = -r$ d'equacions normals, càlcul de la seva matriu:

$$N = (dF_u)P^{-1}(dF_u)^T \tag{3.27}$$

(guardant el resultat parcial $P^{-1}(dF_u)^T$), i de la seva inversa:

$$N^{-1} = [(dF_u)P^{-1}(dF_u)^T]^{-1} \tag{3.28}$$

- Càlcul dels multiplicadors de Lagrange:

$$k = -N^{-1}\ r \tag{3.29}$$

- Càlcul dels residus:

$$v = P^{-1}(dF_u)^T k \tag{3.30}$$

- Càlcul de les observacions ajustades:

$$m = u + v \tag{3.31}$$

Quant a l'avaluació dels errors, tindrem el següent:

- Matriu cofactor de les observacions ajustades:

$$Q_m = P^{-1} - P^{-1}(dF_u)^T N^{-1}(dF_u)\ P^{-1} \tag{3.32}$$

- Estimador S^2 de la variància de referència σ^2:

$$S^2 = \left(\frac{v^T P v}{h}\right) \tag{3.33}$$

- Estimadors $S_{mi}{}^2$ de les variàncies $\sigma_{mi}{}^2$ de les observacions ajustades :

$$S_{mi}{}^2 = S^2\ Q_{m\,ii} \tag{3.34}$$

- Interval de confiança per als paràmetres μ_i o vertaders valors de les magnituds observades:

$$m_i - t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} < \mu_i < m_i + t_\alpha S\sqrt{Q_{mii}} \tag{3.35}$$

Observació

Igual com s'ha especificat en el capítol anterior a propòsit dels sistemes no lineals d'observacions indirectes, el procés de linealització implica que la resolució del problema és aproximada.

La qüestió resideix en si l'aproximació és suficientment bona. En qualsevol cas, ***el procés es pot iterar tantes vegades com es consideri necessari***, tot considerant les observacions ajustades com a noves observacions inicials susceptibles de ser ajustades pel mateix mètode.

A continuació veurem l'aplicació més freqüent en topografia de l'ajust d'observacions mitjançant equacions de condició.

3.6 Càlcul de coordenades pel mètode dels itineraris

Considerem la següent situació (Fig. 3.2), molt freqüent a la pràctica dels aixecaments topogràfics.

Les dades
Coneixem les coordenades de dos punts $A(x_A\ ,\ y_A)$ *i* $B(x_B\ ,\ y_B)$, així com les referències Φ_1 i Φ_2 d'orientació respecte d'altres dues estacions C i D.

Les incògnites
Es tracta de calcular les coordenades de n punts P_1, P_2, ..., P_n (per facilitar el plantejament del problema, inicialment en considerarem només 3), distribuïts al voltant del segment que uneix A i B.

Les magnituds observables
Les 4 (en general n+1) distàncies, L_i , dels 4 (en general n+1) trams que van de A a B i els 5 (en general n+2) angles, θ_i, entre cada tram i l'immediatament anterior.

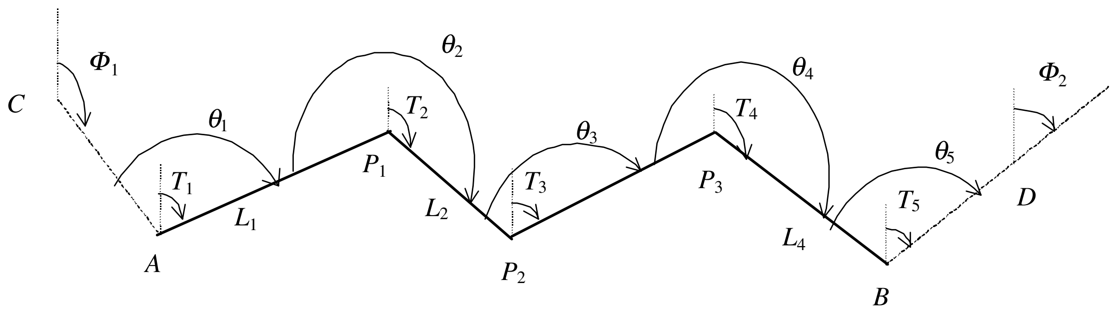

Fig. 3.2 Itinerari

Vegem com podem calcular les coordenades dels 3 (en general n) punts P_1, P_2 i P_3 mitjançant les 9 (en general 2n+3) magnituds observables L_i, i = 1, 2, 3, 4, i θ_k, k = 1, 2, ..., 5.
Només cal calcular prèviament les 4 (en general n+1) orientacions, T_1, T_2, T_3 i T_4, dels 4 (en general n +1) trams que van de A a B. Les coordenades que busquem es podran trobar a partir de les relacions

$$x_i = x_{i-1} + L_i \sin T_i \text{ i } y_i = y_{i-1} + L_i \cos T_i \tag{3.36}$$

Però entre les orientacions T_i i els angles observats θ_i es verifiquen les relacions (Fig. 3.3)

$$T_1 = \Phi_1 + \theta_1 - \pi \ , \ T_i = T_{i-1} + \theta_i - \pi \tag{3.37}$$

i podem escriure les orientacions T_i en funció dels angles observats θ_i:

$$T_1 = \Phi_1 + \theta_1 - \pi = T_1(\theta_1)$$
$$T_2 = \Phi_1 + \theta_1 + \theta_2 - 2\pi = T_2(\theta_1, \theta_2)$$

En general,

$$T_k = \Phi_1 - k\pi + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = T_k(\theta_1, \ldots, \theta_k),\ k = 1, 2, \ldots, n+2 \tag{3.38}$$

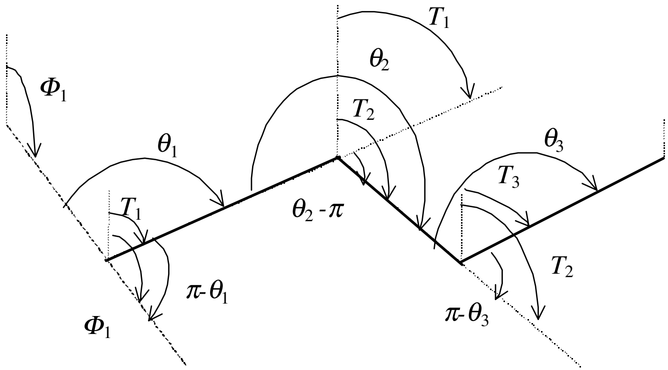

Fig. 3.3 Relació entre orientacions T_i i angles observables θ_i

Amb això, el problema quedaria resolt *si les observacions fossin exactes*!

3.6.1 La vertadera naturalesa del problema: l'ajust estadístic de les observacions

L'autèntic problema matemàtic no és el càlcul de les coordenades a partir de les observacions d'angles i distàncies, que és trivial com acabem de veure, sinó el de *l'ajust d'aquestes observacions*.

En els mètodes de la "topografia clàssica" es proposen diversos tipus de correccions de caràcter empíric (vegeu els mètodes de Bowditch i Crandall a [CHU82]) als valors de les magnituds observables, deduïts a partir de la pràctica repetida en l'experiència professional.

Independentment de la major o menor correcció del resultat final, el vertader inconvenient d'aquests mètodes és que no permeten fer una anàlisi rigorosa de la precisió obtinguda.

El punt de vista matemàticament correcte comença considerant que els observables L_i i θ_i són variables aleatòries normals i independents. Per tant, constitueixen un vector aleatori normal

$$Z = (L_1, ..., L_{n+1}, \theta_1, ..., \theta_{n+2})$$

de dimensió $2n+3$ del qual coneixem una realització

$$U = (L^0_1, ..., L^0_{n+1}, \theta^0_1, ..., \theta^0_{n+2})$$

Es tracta d'*estimar* el *vertader valor* de l'observable Z, que no és altre que la seva *esperança matemàtica*

$$\mu_Z = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{2n+3})$$

així com la matriu de covariància Σ_Z, per poder establir els intervals de confiança corresponents i, en conseqüència, una anàlisi de l'error correcta. Per a això, es disposa de la realització U i de les condicions de tancament.

Condicions de tancament

- L'orientació del tram BD coincideix amb la referència d'orientació de l'estació D (Fig. 2):

$$T_{n+2} = \Phi_2 \tag{3.39}$$

- La suma de les projeccions horitzontals de les distàncies dels trams entre $A(x_0, y_0)$ i $B(x_{n+1}, y_{n+1})$ és igual a la coordenada x del vector B-A (Fig. 2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i \sin T_i = x_{n+1} - x_0 \tag{3.40}$$

- El mateix per a les coordenades y:

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i \cos T_i = y_{n+1} - y_0 \tag{3.41}$$

Tenim, doncs, 3 *equacions de condició, en general no lineals,* per a les 9 (en general $2n+3$) *variables* $Z = (L_1, ..., L_{n+1}, \theta_1, ..., \theta_{n+2})$:

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - 5\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_4 + L_1 \sin T_1(\theta_1) + L_2 \sin T_1(\theta_1, \theta_2) + L_3 \sin T_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \\ + L_4 \sin T_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + L_5 \sin T_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_4 + L_1 \cos T_1(\theta_1) + L_2 \cos T_1(\theta_1, \theta_2) + L_3 \cos T_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + \\ + L_4 \cos T_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + L_5 \cos T_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0$$

En general,

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i = 0 \tag{3.42}$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \, sinT_i(\theta_1,\ldots,\theta_i) = 0 \tag{3.43}$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \, cos\,T_i(\theta_1,\ldots,\theta_i) = 0 \tag{3.44}$$

Evidentment, les observacions U no verifiquen les equacions de condició a causa del seu caràcter aleatori

$$f_i(U) \neq 0,\ \ i = 1,2,3$$

La vertadera naturalesa del problema és, per tant, la de l'*estimació dels paràmetres (esperança matemàtica i matriu de covariància) d'un vector aleatori normal* de m components independents (=9 en el nostre exemple), sotmeses a h (= 3 en nostre cas) equacions de condició, amb $h < m$.

3.6.2 Compensació d'itineraris pel mètode dels mínims quadrats

Anem a resoldre el problema de compensar les observacions d'un itinerari per mínims quadrats. El primer que s'ha de fer és plantejar les equacions de condició i linealitzar-les. Això es farà en 3 passos:

1. Plantejament de les *equacions de condició per a les variables* $Z = (L_1, \ldots, L_{n+1}, \theta_1, \ldots, \theta_{n+2})$:

$$f_1(Z) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i = 0 \tag{3.45}$$

$$f_2(Z) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \, sinT_i(\theta_1,\ldots,\theta_i) = 0 \tag{3.46}$$

$$f_3(Z) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L_i \, cos\,T_i(\theta_1,\ldots,\theta_i) = 0 \tag{3.47}$$

2. Càlcul dels *residus condicionals* substituint les observacions U en les equacions de condició:

$$f_1(U) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i^0 = r_1 \tag{3.48}$$

$$f_2(U) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L^0{}_i \; sen\,T_i(\theta^0{}_1,\ldots,\theta^0{}_i) = r_2 \tag{3.49}$$

$$f_3(U) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} L^0{}_i \cos T_i(\theta^0{}_1, \ldots, \theta^0{}_i) = r_3 \quad (3.50)$$

3. Definició de les *correccions* o *residus* com un vector $V = (v_1, ..., v_{n+1}, w_1, ..., w_{n+2})$ tal que

$$f_1(U+V) = \Phi_1 - \Phi_2 - (n+2)\pi + \sum_{i=1}^{n+2} \theta_i^0 + w_i = 0 \quad (3.51)$$

$$f_2(U+V) = x_0 - x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} (L^0{}_i + v_i)\, sen\, T_i(\theta^0{}_1 + w_1, \ldots, \theta^0{}_i + w_i) = 0 \quad (3.52)$$

$$f_3(U+V) = y_0 - y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} (L^0{}_i + v_i) \cos T_i(\theta^0{}_1 + w_1, \ldots, \theta^0{}_i + w_i) = 0 \quad (3.53)$$

4. Càlcul de les *equacions de condició per a les correccions V*, linealitzant les equacions de condició per a les variables *Z*, mitjançant un desenvolupament de Taylor fins a ordre 1 al voltant del punt *U* d'observacions:

$$f_i(U+V) = f_i(U) + df_{iu}V + \ldots = 0,\ i = 1,2,3 \quad (3.54)$$

És a dir,

$$r_i + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f_i(U)}{\partial L_k} v_k + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\partial f_i(U)}{\partial \theta_k} w_k = 0,\ i = 1,2,3 \quad (3.55)$$

Fent els càlculs s'obté

$$r_1 + \sum_{k=1}^{n+2} w_k = 0 \quad (3.56)$$

$$r_2 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[sinT_i^0 \right] v_i + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\sum_{k=i}^{n+1} L_k^0 \cos T_k^0 \right] w_i = 0 \quad (3.57)$$

$$r_3 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\cos T_i^0 \right] v_i + \sum_{i=1}^{n+1} \left[- \sum_{k=i}^{n+1} L_k^0\, sinT_k^0 \right] w_i = 0 \quad (3.58)$$

que, matricialment, s'escriu

$$r + (dF_u)V = 0$$

on el jacobià de *F* és la matriu

$$dF_u \equiv A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ sinT^0{}_1 & sinT^0{}_2 & \ldots & sinT^0{}_{n+1} & ly_1^0 & ly_2^0 & \ldots & ly_{n+1}^0 & 0 \\ \cos T^0{}_1 & \cos T^0{}_2 & \ldots & \cos T^0{}_{n+1} & lx_1^0 & lx_2^0 & \ldots & lx_{n+1}^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

i on s'ha anomenat

$$
\begin{aligned}
T^0{}_i &= T_i(\theta^0{}_1,\ldots,\theta^0{}_i) \\
ly_i^0 &= \sum_{k=i}^{n+1} L^0{}_k \cos T^0{}_k \\
lx_i^0 &= -\sum_{k=i}^{n+1} L^0{}_k \sin T^0{}_k
\end{aligned}
\qquad (3.60)
$$

La resta del procés és el descrit a l'apartat anterior per les equacions de (3.26) a (3.35).

Observació

Cada element lx_i^0 o ly_i^0 de la matriu A és una derivada parcial $\dfrac{\partial f_j(U)}{\partial\theta_i}$. Com que f_1 i f_2 tenen dimensió de longitud i, en general, unitats de metres, i els angles θ_i estan en radiants, els elements lx_i^0 i ly_i^0 tenen unitats de m/rad. Si els residus w_i, com és habitual, estan expressats en segons d'arc, aleshores caldrà dividir cada element lx_i^0 i ly_i^0 pel factor de conversió fc de radiants a segons d'arc, per tal que el productes $lx_i^0 w_i$ i $ly_i^0 w_i$ estiguin expressats en metres i les equacions linealitzades siguin coherents en les unitats.

3.6.3 Avaluació de l'error en les coordenades

Amb les equacions (3.34) s'avaluen els errors $\sigma_{\theta i}$ i σ_{Li} de les observacions angulars i de distància. Tanmateix, la finalitat de l'itinerari és calcular les coordenades dels punts incògnita a partir de les observacions ajustades i, per tant, haurem d'avaluar la propagació dels errors de les observacions als errors en les coordenades calculades a partir d'aquestes observacions.

Tenint en compte la llei de propagació de la variància

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{xi}^2 + 2\sum_{i\neq j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\sigma_{xixj}$$

i les equacions (3.36) per al càlcul de les coordenades dels punts incògnita, s'en poden avaluar els seus errors mitjançant les equacions

$$\sigma_{xi}^2 = \sigma_{xi-1}^2 + (\sin T_i)^2 \sigma_{Li}^2 + (L_i \cos T_i)^2 \sum_{k=1}^{i} \sigma_{\theta k}^2 + \text{termes covariants} \qquad (3.61)$$

i

$$\sigma_{yi}^2 = \sigma_{yi-1}^2 + (\cos T_i)^2 \sigma_{Li}^2 + (L_i \sin T_i)^2 \sum_{k=1}^{i} \sigma_{\theta k}^2 + \text{termes covariants} \qquad (3.62)$$

Observació

L'error en les coordenades es propaga de manera que augmenta en cada tram de l'itinerari. Per això no convé fer itineraris de molts trams ni emprar aquest mètode en determinació de coordenades per a les quals es necessiti molta precisió.

D'altra banda, les observacions d'angle i distancia pròpies d'un itinerari també es poden emprar per al càlcul de coordenades amb les tècniques de triangulació i trilateració descrites al capítol anterior.

Exemple 4 [LAU83] *Itinerari*

Es tracta de compensar, pel mètode dels mínims quadrats exposat més amunt, les observacions angulars i de distància de l'itinerari de tres trams representat en la figura 4, amb dos punts incògnita, amb les dades següents:

Punts extrems:

$$A = (x_0, y_0) = (21406{,}293,\ 46739{,}687)$$
$$B = (x_3, y_3) = (23420{,}248,\ 44126{,}829)$$

Referències d'orientació:

$$\Phi_1 = 206^\circ\ 37'\ 43''$$
$$\Phi_2 = 80^\circ\ 16'\ 20''$$

I amb les observacions angulars següents:

$$\theta_1^0 = 50^\circ\ 29'\ 46'' \text{ amb desviació típica } \sigma_1 = 4'',2$$
$$\theta_2^0 = 237^\circ\ 56'\ 14'' \text{ amb desviació típica } \sigma_2 = 4'',2$$
$$\theta_3^0 = 206^\circ\ 27'\ 51'' \text{ amb desviació típica } \sigma_3 = 4'',2$$
$$\theta_4^0 = 98^\circ\ 44'\ 35'' \text{ amb desviació típica } \sigma_4 = 4'',2$$

i observacions de distància següents:

$$L_1^0 = 647{,}277 \text{ m amb desviació típica } \sigma_5 = 0{,}025 \text{ m}$$
$$L_2^0 = 983{,}104 \text{ m amb desviació típica } \sigma_6 = 0{,}049 \text{ m}$$
$$L_3^0 = 2137{,}245 \text{ m amb desviació típica } \sigma_7 = 0{,}087 \text{ m}$$

Calculem les orientacions T_i i les coordenades dels punts incògnita en primera aproximació mitjançant les equacions (3.36) i (3.37):

$$T_1^0 = \Phi_1 + \theta_1 - \pi = 77^\circ\ 07'\ 29''$$
$$x_1^0 = x_0 + L_1 \sin T_1^0 = 22037{,}296 \text{ m}$$
$$y_1^0 = y_0 + L_1 \cos T_1^0 = 46883{,}919 \text{ m}$$

$$T_2^0 = T_1^0 + \theta_2 - \pi = 135^\circ\ 03'\ 43''$$
$$x_2^0 = x_1^0 + L_2 \sin T_2^0 = 22731{,}703 \text{ m}$$
$$y_2^0 = y_1^0 + L_2 \cos T_2^0 = 46188{,}009 \text{ m}$$

$$T_3^0 = T_2^0 + \theta_3 - \pi = 161^\circ\ 31'\ 34''$$
$$x_3^0 = x_2^0 + L_3 \sin T_3^0 = 23420{,}345 \text{ m}$$
$$y_3^0 = y_2^0 + L_3 \cos T_3^0 = 44126{,}755 \text{ m}$$

$$T_4^0 = T_3^0 + \theta_4 - \pi = 80^\circ\ 16'\ 09''$$

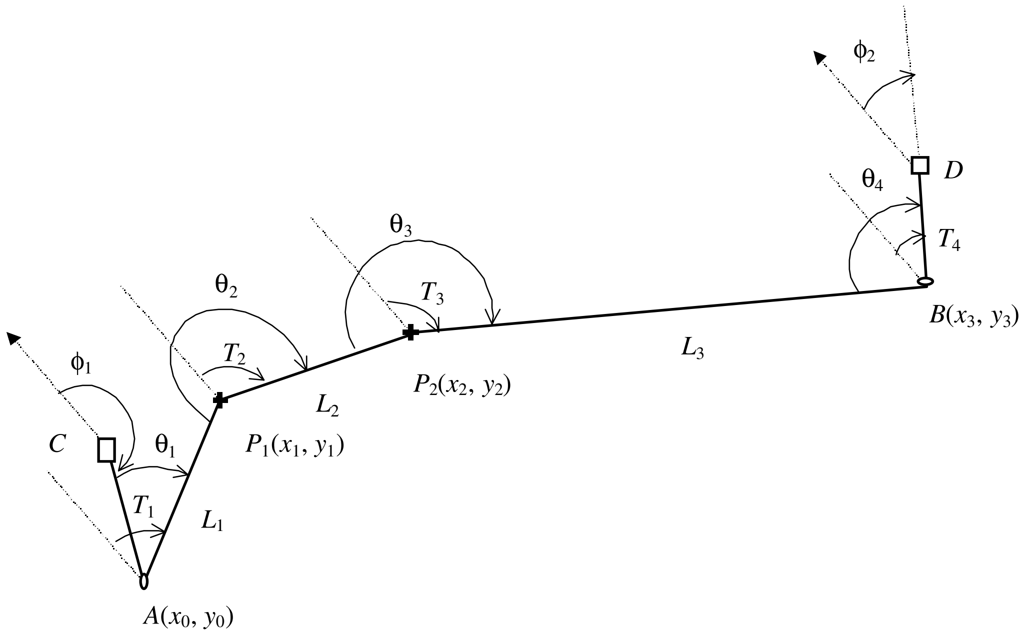

Fig. 3.4 Itinerari de 3 trams

Errors de tancament:

$$r_1 = T_4^0 - \Phi_2 = -11''$$
$$r_2 = x_3^0 - x_3 = 0{,}097 \text{ m}$$
$$r_3 = y_3^0 - y_3 = -0{,}074 \text{ m}$$

Fem els càlculs amb MAPLE V amb els paquets d'àlgebra lineal i estadística, com és habitual.

Matriu del sistema inicial de condicions i transposada:

```
> A:=matrix(3,7,[
  0,0,0,1,1,1,1,
  0.9749,0.7063,0.3169,-0.0126678,-0.0133671,-0.0099932,0,
  0.2228,-0.7079,-0.9485,-0.0097644,-0.0067052,-0.0033386,0
]); At:=transpose(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ .9749, & .7063, & .3169, & -.0126, & -.0133, & -.0099, & 0 \\ .2228, & -.7079, & -.9485, & -.0097, & -.0067, & -.0033, & 0 \end{bmatrix}$$

Graus de llibertat:

```
> gdl:=3:
```

Matriu de pesos:

```
> P:=diag((4.2/.025)^2,(4.2/.049)^2,(4.2/.087)^2,1,1,1,1);
```

$$P := \begin{bmatrix} 28224, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 7347, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2331, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriu de pesos = matriu cofactor de les observacions:

```
> Qu:=inverse(P):
```

Matriu del sistema d'equacions normals i inversa:

```
> N:=evalm(&*(A,Qu,At)); Ninv:=inverse(N):
```

$$N := \begin{bmatrix} 4. & -.036081 & -.019808 \\ -.036081 & .000583 & .000057 \\ -.019808 & .000057 & .000607 \end{bmatrix}$$

Errors de tancament o residus condicionals:

```
> r:=vector(3,[-11,.097,-.074]);
```

$$r := [-11'', 0.097\text{m}, -0.074\text{m}]$$

Vector de residus:

```
> v:=-evalm(&*(Qu,At,Ninv,r));
```

$$v := -[-0.007\text{m}, 0.014\text{m}, 0.097\text{m}, -0''.86, -1''.63, -3''.07, -5''.44]$$

Matriu cofactor *Qm* de les observacions ajustades:

```
> qq:=evalm(&*(Qu,At,Ninv,A,Qu)):
> Qm:=evalm(Qu-qq):
```

$$Qm = \begin{bmatrix} .29e\text{-}4, & -.10e\text{-}4, & .10e\text{-}6, & .83e\text{-}3, & .78e\text{-}3, & .70e\text{-}4, & -.16e\text{-}2 \\ -.10e\text{-}4, & & .94e\text{-}4, & -.89e\text{-}4, & .61e\text{-}3, & .11e\text{-}2, & .49e\text{-}3, & -.23e\text{-}2 \\ .10e\text{-}6, & -.89e\text{-}4, & .97e\text{-}4, & -.30e\text{-}2, & -.58e\text{-}3, & .13e\text{-}2, & .22e\text{-}2 \\ .83e\text{-}3, & .61e\text{-}3, & -.30e\text{-}2, & .60, & -.36, & -.24, & .91e\text{-}2 \\ .78e\text{-}3, & .11e\text{-}2, & -.58e\text{-}3, & -.36, & .64, & -.25, & -.21e\text{-}1 \\ .70e\text{-}4, & .49e\text{-}3, & .13e\text{-}2, & -.24, & -.25, & .74, & -.23 \end{bmatrix}$$

$$[-.16e-2, \quad -.23e-2, \ .22e-2, \ .91e-2, \ -.21e-1, \ -.23, \quad .25 \ ]$$

Variància de referència o de les observacions de pes unitat:

```
> Vref:=4.2^2;
```

$$Vref := 17.64$$

Desviació tipus *Sm* de les observacions ajustades:

```
> Sm:=array(1..7):
   for i from 1 to 7 do
   Sm[i]:=evalf(sqrt(Vref*Qm[i,i]))
   od;
```

$$Sm[1] := .023$$
$$Sm[2] := .041$$
$$Sm[3] := .041$$
$$Sm[4] := 3.2$$
$$Sm[5] := 3.4$$
$$Sm[6] := 3.6$$
$$Sm[7] := 2.1$$

Observem que les desviacions ajustades tenen un error inferior a les observacions inicials.

Calculem, ara, els intervals del 95% de confiança:

```
> t:=statevalf[icdf,studentst[gdl]](0.975);
```

$$t := 3.1824$$

Errors amb el 95% de confiança:

```
> dm:=array(1..7):
> for i from 1 to 7 do
> dm[i]:=evalf(t*sm[i])
> od;
```

$$dm[1] := .072$$
$$dm[2] := .130$$
$$dm[3] := .132$$
$$dm[4] := 10$$
$$dm[5] := 11$$
$$dm[6] := 12$$
$$dm[7] := 7$$

Tornem a calcular les coordenades amb les observacions ajustades:

$$T_1^{\,1} = \Phi_1 + \theta_1 + v_4 - \pi = 77^{\circ}\ 07'\ 29'',86$$
$$x_1^{\,1} = x_0 + (L_1 + v_1)\ sin\ T_1^{\,1} = 22037{,}303\ \text{m}$$
$$y_1^{\,1} = y_0 + (L_1 + v_1)\ cos\ T_1^{\,1} = 46883{,}918\ \text{m}$$

$$T_2^1 = T_1^1 + \theta_2 + v_5 - \pi = 135^\circ\ 03'\ 45'',49$$
$$x_2^1 = x_1^1 + (L_2 + v_2)\ sin\ T_2^1 = 22731{,}692 \text{ m}$$
$$y_2^1 = y_1^1 + (L_2 + v_2)\ cos\ T_2^1 = 46188{,}009 \text{ m}$$

$$T_3^1 = T_2^1 + \theta_3 + v_6 - \pi = 161^\circ\ 31'\ 39'',56$$
$$x_3^1 = x_2^1 + (L_3 + v_3)\ sin\ T_3^1 = 23420{,}248 \text{ m}$$
$$y_3^1 = y_2^1 + (L_3 + v_3)\ cos\ T_3^1 = 44126{,}829 \text{ m}$$

$$T_4^1 = T_3^1 + \theta_4 + v_7 - \pi = 80^\circ\ 16'\ 20''$$

Errors de tancament:

$$r_1 = T_4^1 - \Phi_2 = 0''$$
$$r_2 = x_3^1 - \text{x}_3 = 0\text{m}$$
$$r_3 = y_3^1 - \text{y}_3 = 0\text{m}$$

Si l'itinerari no hagués tancat bé, hauríem hagut d'iterar el procés partint de les observacions ajustades com a noves observacions inicials.

3.7 Exercicis

1. Es mesuren, de forma no massa precisa, els tres angles d'un triangle. Els resultats són

$$\alpha_1 = 51^\circ, \text{ amb pes } p_1 = 3$$
$$\alpha_1 = 59^\circ, \text{ amb pes } p_2 = 2$$
$$\alpha_1 = 71^\circ, \text{ amb pes } p_3 = 1$$

a) Calculeu els valors de les observacions compensades i comproveu que satisfan la condició de tancament.
b) Calculeu els residus i avalueu la variància de referència.
c) Calculeu la matriu cofactor de les observacions compensades i avalueu-ne variància i la covariància. Compareu la desviació tipus de les observacions compensades amb la corresponent desviació tipus de les observacions sense compensar.
d) Doneu els intervals de confiança per al vertader valor dels angles amb nivell de significació 0,05.

2. [MIG81] En un triangle rectangle (Fig. 3.5) es mesuren la hipotenusa, un catet i l'angle oposat. Els resultats són els següents:

$$a = 352{,}14 \text{ m}, \sigma_a = 0{,}03 \text{ m}$$
$$b = 236{,}76 \text{ m}, \sigma_a = 0{,}02 \text{ m}$$
$$B = 42^\circ\ 15'\ 20'', \sigma_B = 15''$$

a) Expresseu una lligadura entre les tres variables a, b i B i linealitzeu-la.
b) Calculeu els valors de les observacions compensades i comproveu que satisfan la lligadura.
c) Calculeu els residus i avalueu la variància de referència.
d) Calculeu la matriu cofactor de les observacions compensades i avalueu-ne la variància i la covariància. Compareu la desviació tipus de les observacions compensades amb la corresponent desviació tipus de les observacions sense compensar.

e) Doneu els intervals de confiança per al vertader valor de les magnituds observades amb nivell de significació 0.05.

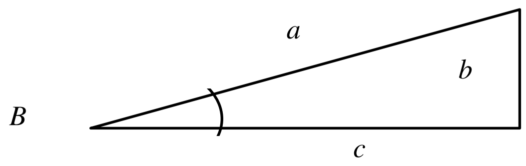

Fig. 3.5 Mesures angular i de distància

3. Resoleu l'exercici 4 del capítol 2. Ara feu-ho pel mètode de les observacions condicionades i considerant l'angle D com una dada exempta d'error en comptes de com una observació.

a) Expresseu dues lligadures entre les tres variables A, B i C.
b) Calculeu els valors de les observacions compensades i comproveu que satisfan la lligadura.
c) Calculeu els residus i avalueu la variància de referència.
d) Calculeu la matriu cofactor de les observacions compensades i avalueu-ne la variància i la covariància. Compareu la desviació tipus de les observacions compensades amb la corresponent desviació tipus de les observacions sense compensar.
e) Doneu els intervals de confiança per al vertader valor de les magnituds observades amb nivell de significació 0.05.
f) Compareu aquests resultats amb els obtinguts en el capítol 2 pel mètode de les observacions indirectes.

4. Resoleu l'exercici 5 del capítol 2. Ara feu-ho pel mètode de les observacions condicionades, compensant les observacions u_1 i u_2 i calculant la incògnita x, directament, a partir dels valors compensats.

a) Expresseu una lligadura entre les variables u_1 i u_2 i linealitzeu-la.
b) Calculeu els valors de les observacions compensades i comproveu que satisfan la lligadura.
c) Calculeu els residus i avalueu la variància de referència.
d) Calculeu la matriu cofactor de les observacions compensades i avalueu-ne la variància i la covariància. Compareu la desviació tipus de les observacions compensades amb la corresponent desviació tipus de les observacions sense compensar.
e) Calculeu la incògnita x directament a partir dels valors compensats de les observacions u_1 i u_2 i avalueu l'error corresponent.
f) Compareu aquests resultats amb els obtinguts en el capítol 2 pel mètode de les observacions indirectes.

5. Compenseu, pel mètode dels mínims quadrats, les observacions angulars i de distància de l'itinerari de tres trams (Fig. 3.6) amb dos punts incògnita, amb les dades següents:

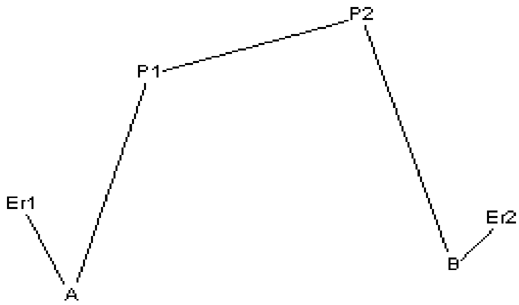

Fig. 3.6 Itinerari obert

Punts extrems:

$$A = (x_0,\ y_0) = (808{,}552,\ 2546{,}753)$$
$$B = (x_3,\ y_3) = (2356{,}739,\ 2615{,}254)$$

Orientació de les estacions de referència Er1 i Er2:

$$\Phi_1 = 135^\circ$$
$$\Phi_2 = 63^\circ\ 26'\ 5''$$

I amb les observacions angulars

$$\theta_1^0\ (A) = 77^\circ\ 32'\ 3'' \text{ amb desviació típica } \sigma_1 = 6''$$
$$\theta_2^0\ (P1) = 229^\circ\ 10'\ 17'' \text{ amb desviació típica } \sigma_2 = 6''$$
$$\theta_3^0\ (P2) = 244^\circ\ 20'\ 25'' \text{ amb desviació típica } \sigma_3 = 6''$$
$$\theta_4^0\ (B) = 97^\circ\ 23'\ 20'' \text{ amb desviació típica } \sigma_4 = 6''$$

i de distància

$$L_1^0\ (A\text{-}\ P1) = 581{,}70 \text{ m amb desviació típica } \sigma_5 = 0{,}03 \text{ m}$$
$$L_2^0\ (P1\text{-}\ P2) = 857{,}33 \text{ m amb desviació típica } \sigma_6 = 0{,}05 \text{ m}$$
$$L_3^0\ (P2\text{-}\ B) = 660{,}81 \text{ m amb desviació típica } \sigma_7 = 0{,}03 \text{ m}$$

6. Compenseu, pel mètode dels mínims quadrats, les observacions angulars i de distància de l’itinerari tancat (Fig. 3.7), amb tres punts incògnita, amb les dades següents:

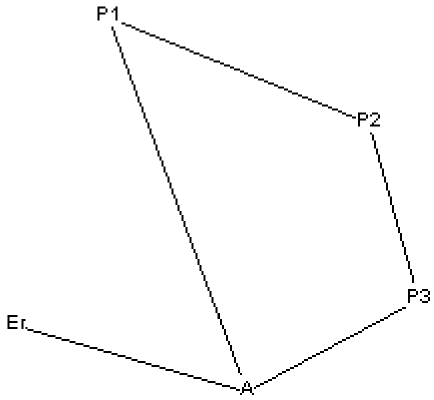

Fig. 3.7 Itinerari tancat

Punt de sortida i arribada:

$$A = (x_0, y_0) = (1578{,}235,\ 2376{,}375)$$

Orientació de l'estació de referència Er:

$$\Phi = 102º\ 28'\ 54''$$

I amb les observacions angulars

$\theta_1^0\,(A) = 52º\ 5'\ 27''$ amb desviació típica $\sigma_1 = 5''$
$\theta_2^0\,(P1) = 312º\ 57'\ 50''$ amb desviació típica $\sigma_2 = 5''$
$\theta_3^0\,(P2) = 231º\ 47'\ 45''$ amb desviació típica $\sigma_3 = 5''$
$\theta_4^0\,(P3) = 268º\ 13'\ 50''$ amb desviació típica $\sigma_3 = 5''$
$\theta_5^0\,(A) = 214º\ 55'\ 12''$ amb desviació típica $\sigma_4 = 5''$

i de distància

$L_1^0\,(A\text{-}P1) = 1063{,}80$ m amb desviació típica $\sigma_5 = 0{,}05$ m
$L_2^0\,(P1\text{-}P2) = 908{,}51$ m amb desviació típica $\sigma_6 = 0{,}05$ m
$L_3^0\,(P2\text{-}P3) = 479{,}03$ m amb desviació típica $\sigma_7 = 0{,}02$ m
$L_4^0\,(P3\text{-}A) = 625{,}84$ m amb desviació típica $\sigma_8 = 0{,}03$ m

Bibliografia

[BOG89] BOLSHAKOV, V.; GAIDÁIEV, P. *Teoría de la elaboración matemática de mediciones geodésicas*. Moscou, MIR, 1989

[CHB96] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNE, J. L. *Tratado de Topografía. Tomo II. Métodos Topográficos.* Madrid, Ed. Paraninfo, 1996

[KOC87] KOCH, K. R. *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models.* Nova York, Springer Verlag, 1987

[LAU83] LAUF, G. B. *The method of Least Squares with applications in surveying.* Hawtorn, TAFE Pub. Unit., 1983

[LEI95] LEICK, A. *GPS Satellite Surveying*. Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1995

[LHA74] LAWSON, C. L.; HANSON, R. J. *Solving Least Squares Problems.* New Jersey, Prentice Hall, 1974

[LIN63] LINNIK, Y. V. *Métode des Moindres Carrés.* París, Dunod, 1963

[MIG81] MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. *Analysis and Adjustment of Survey Measurements.* Nova York, Van Nostrand, 1981

[SLA80] SLAMA, C. (Editor) *Manual of Photogrametry*. Falls Church, American Society of Photogrametry, 1980

[STB97] STRANG, G., BORRE, K. *Linear Algebra, Geodesy and GPS.* Wellesley, Wellesley-Cambridge Press, 1997

[WOG97] WOLF, P. R., GHILANI, C. D. *Adjustment computations.* Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 1997

Índex alfabètic