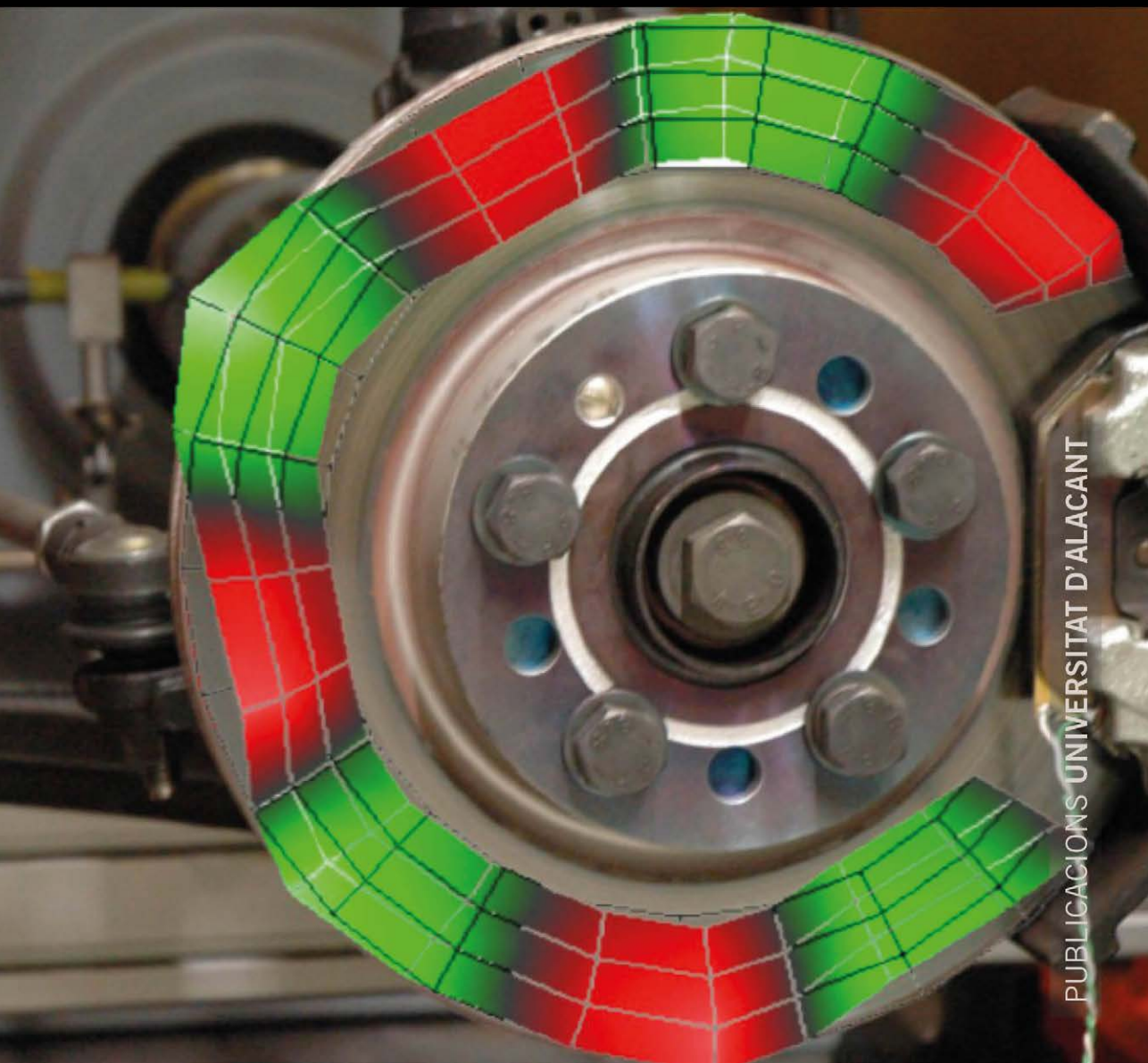


Principios y aplicaciones de la mecánica de contacto en tribología, fricción y adherencia

Valentin L. Popov

Edición de José Miguel Martín Martínez



PRINCIPIOS Y APLICACIONES DE LA MECÁNICA DE CONTACTO
EN TRIBOLOGÍA, FRICCIÓN Y ADHERENCIA

V.L. POPOV

PRINCIPIOS Y APLICACIONES
DE LA MECÁNICA DE CONTACTO
EN TRIBOLOGÍA, FRICCIÓN
Y ADHERENCIA

Traducción: Susana Moreno Flores
Edición: José Miguel Martín Martínez

PUBLICACIONES DE LA UNIVERSITAT D'ALACANT

La presente edición, que ha contado con el apoyo del Fondo de Publicaciones de Acceso Abierto de la Universidad Técnica de Berlín, está publicada bajo licencia Creative Commons (CC BY-NC-ND 4.0).

Publicacions de la Universitat d'Alacant
03690 Sant Vicent del Raspeig
publicacions@ua.es
<https://publicaciones.ua.es>
Teléfono: 965 903 480

© Valentin L. Popov
Institut für Mechanik
Technische Universität Berlin
© de la traducción: Susana Moreno Flores
© de esta edición: Universitat d'Alacant

DOI: <https://doi.org/10.14198/pua.2020.meccon>

Diseño de cubierta: candela ink
Composición: Marten Kwinkelenberg



https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es_ES


UNIÓN DE EDITORIALES
UNIVERSITARIAS ESPAÑOLAS
www.une.es

Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización nacional e internacional de sus publicaciones.

Algunos derechos reservados. Este trabajo solo se puede convertir con el permiso del propietario, con la excepción de la ley. Visitas CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) necesita fotocopiar o escanear un fragmento de este trabajo.



El profesor Valentin L. Popov

se licenció y obtuvo su Doctorado en Física por la Universidad Estatal Lomonosow de Moscú. Posteriormente se habilitó en el Instituto de Física de Resistencia Mecánica y Ciencia de Materiales de la Academia de Ciencias de Rusia. Tras una estancia como profesor visitante de Física Teórica en la Universidad Paderborn, lidera, desde 2002, el departamento «Dinámica de Sistemas y Física del Rozamiento» del Instituto de Mecánica de la Technische Universität Berlin. Sus áreas de interés incluyen, entre otras, las disciplinas de Tribología, Nanotribología, Tribología de bajas temperaturas, Biotribología, el efecto de los ultrasonidos en la fricción, la simulación numérica de los procesos de fricción, la investigación de terremotos, así como temas relacionados con la Ciencia de Materiales, entre los cuales figuran la Mecánica de medios viscoelásticos y su dependencia con la microestructura, la resistencia mecánica de metales y aleaciones, y las aleaciones con efecto de memoria térmico. Es coeditor de revistas científicas internacionales y organizador de conferencias internacionales periódicas, así como de jornadas sobre diversos temas relacionados con la Tribología.

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

La tercera edición de «Mecánica de Contacto y Fricción» ha sido sustancialmente revisada y ampliada en relación a las dos ediciones anteriores. En particular, los capítulos concernientes al contacto mecánico (contacto normal con y sin adherencia, contacto tangencial, contacto con elastómeros) se han completado con problemas resueltos en sistemas con simetría axial, así como con numerosos ejemplos. El capítulo dedicado al desgaste incluye en esta edición una discusión sobre *fretting*. Las secciones dedicadas a la lubricación elasto-hidrodinámica han sido redactadas de nuevo y completadas con varios ejercicios. Asimismo, se ha reestructurado el capítulo dedicado a los métodos numéricos de simulación en la Mecánica de Contacto, el cual incluye los fundamentos para la aplicación de los métodos de elementos de frontera en el contacto adhesivo.

Quisiera agradecer a los Drs. M. Heß y R. Pohrt por su ayuda en la elaboración de las nuevas secciones y ejercicios; al Dr. M. Heß y a M. Popov por revisar el texto; a la Sra. Wallendorf por la elaboración de las nuevas figuras y a la Dra. J. Starcevic por su enorme apoyo en la preparación del libro.

Berlín, Mayo de 2015

V. L. Popov

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

La segunda edición de «Mecánica de Contacto y Fricción» contiene un capítulo adicional denominado «Terremotos y rozamiento». De esta manera, el libro pretende abarcar los fenómenos de rozamiento a todas las escalas, desde la atómica hasta la geológica, lo cual se refleja en el nuevo subtítulo «De la Nanotribología a la Sismología». Otros cambios en el contenido afectan sobre todo al capítulo 14, que ahora incluye una sección sobre Elasto-hidrodinámica, y a varios de los capítulos restantes, que se han completado añadiendo nuevos ejercicios.

Quisiera agradecer especialmente a los profesores G. G. Kocharyan y S. Sobolev por las discusiones tan enriquecedoras y la crítica constructiva al capítulo sobre terremotos, y al Dr. R. Heise y a la ingeniera E. Teidelt por su contribución a la realización y a la corrección de la nueva edición. Mi más profundo agradecimiento a la Dra. Ingeniera J. Starcevic por su inmenso apoyo en la elaboración del libro. Y no quisiera terminar sin agradecer a la Sra. Ch. Koll por la elaboración de las nuevas figuras y a R. Heise, M. Popov, M. Heß, S. Kürschner y B. Grzemba por su apoyo en la revisión del texto.

Berlín, Julio de 2010

V.L. Popov

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

Todo aquél que se adentra en la Mecánica de Contacto y la Física de Fricción, se da pronto cuenta de que hay pocos campos interdisciplinarios tan fascinantes como apasionantes. Y no es para menos; las disciplinas conectan los conceptos de la teoría de la elasticidad y la plasticidad, la viscoelasticidad, la ciencia de los materiales, la dinámica de fluidos –incluidos los no newtonianos–, la termodinámica, la electrodinámica y la dinámica de sistemas, entre otros. Además, las aplicaciones que de ellas se derivan son numerosas y su uso se extiende desde la nanoescala, a través de la medida experimental e ingeniería de sistemas, a la macroescala, mediante el estudio de la dinámica de terremotos (geodinámica interna), pasando por el vasto dominio de la tribología clásica. Por consiguiente, todo aquél que estudie y comprenda la Mecánica de Contacto y la Física de la Fricción, conseguirá adquirir una amplísima visión de conjunto sobre diversos métodos, que además son de uso amplio y común en Ingeniería.

El libro pretende, entre sus principales objetivos, presentar en una sola obra los aspectos más importantes de ambas disciplinas, contacto y fricción, y analizar su interdependencia de una manera clara y general. Dichos aspectos comprenden, en primer lugar, los derivados de la Mecánica de Contacto «clásica», incluyendo la capilaridad y la adherencia, así como los asociados a la teoría del rozamiento en la macroescala, la lubricación, los fundamentos de la nanotribología moderna, la dinámica de sistemas en máquinas con rozamiento (vibraciones inducidas por rozamiento), y los asociados al rozamiento de elastómeros y al desgaste. Sin embargo, la interrelación de estos aspectos puede ser muy complicada y diferente en cada caso. Por tanto, no existe una manera sencilla que permita resolver todos los problemas tribológicos, aunque sí existe un procedimiento universal basado en *comprender*, en primer lugar, el sistema desde el punto de vista tribológico. Una de las metas del libro consiste en transmitir esa *comprensión*.

Tengo la firme convicción de que los aspectos fundamentales de la Mecánica de Contacto y la Física de la Fricción, o del Rozamiento, son más sencillos de lo que parecen con frecuencia. Incluso si nos limitamos a la pura estimación cualitativa, es posible alcanzar una comprensión muy amplia de ambos campos

en sus muy distintas facetas. En consecuencia, la *estimación cualitativa* tiene una especial importancia en este libro.

Los *cálculos analíticos* limitan el estudio a unos pocos ejemplos clásicos, si bien permiten, basándose en el principio de modularidad, entender y calcular una multitud de problemas cercanos a la aplicación. Sin embargo, existe un gran número de cuestiones tribológicas que no se pueden resolver de manera analítica, particularmente las que requieren la optimización de sistemas tribológicos. En estos casos, el libro ofrece una visión general de los *métodos numéricos de simulación* en la Mecánica de Contacto y la Física de la Fricción. Entre estos cabe destacar uno, el cual se describe con especial detalle, que permite integrar distintos procesos del contacto mecánico a distintas escalas en un único modelo de simulación.

Aunque este libro ha sido concebido ante todo como un *libro de texto*, puede servir como manual de consulta en las materias que se tratan. Por ello se tratan tanto los fundamentos teóricos como numerosos casos particulares, los cuales aparecen en la sección *Problemas* al final de cada capítulo. Todos ellos están resueltos, lo cual permite conocer tanto el planteamiento de resolución como el resultado numérico.

La base sobre la que se asienta este libro de texto es la asignatura «Mecánica de Contacto y Física de Fricción» que imparto en la Universidad Técnica de Berlín. El libro se concibe de forma tal que permite trabajar y entender todo su contenido en uno o dos semestres, en función de la profundidad con la que se imparta la materia.

Agradecimientos

Este libro no habría salido a la luz sin el apoyo entusiasta de mis colegas. En particular, de varios miembros del departamento «Dinámica de Sistemas y Física del Rozamiento» del Instituto de Mecánica de la Universidad Técnica de Berlín, los doctores M. Schargott y T. Geike, así como de los ingenieros M. Heß y J. Starcevic, los cuales contribuyeron a la elaboración de los problemas. A J. Starcevic dirijo mi más profundo agradecimiento por su inmenso apoyo en la elaboración del libro, además de a M. Heß por comprobar todas las ecuaciones del libro y corregir incontables errores. Además, agradezco a la Sra. Ch. Koll por su paciencia y por la elaboración de las figuras, y a M. Popov y al Dr. Ingeniero G. Putzar por su ayuda en la revisión del texto.

No quisiera terminar sin agradecer al decano de la Facultad V de Sistemas de transporte y maquinaria, profesor V. Schindler, por la concesión de un semestre sabático, durante el cual se pudo finalizar este libro.

Berlín, Octubre de 2008

V.L. Popov

PRÓLOGO DEL EDITOR

Cuando el profesor Valentin Popov de la TUB (Universidad Técnica de Berlín) de Alemania me propuso editar su obra *Contact Mechanics and Friction* traducida al castellano, me sorprendió. Mi campo de trabajo es la adherencia y, marginalmente, he necesitado emplear los principios de la mecánica del contacto en mi trabajo. Sin embargo, en los últimos años estoy desarrollando nuevos adhesivos sensibles a la presión (entiéndase cintas adhesivas y vendajes médicos) que requieren poder pegarse y despegarse sin dolor, lo que requiere controlar los procesos de contacto con la piel y con distintos sustratos. Por ello, leí la edición inglesa del libro y, tras terminarla, me di cuenta de que estaba capacitado para revisar la traducción del libro al castellano y que era extraordinariamente útil para asentar los conceptos básicos que gobiernan la adherencia, incluyendo la mojabilidad y la viscoelasticidad, entre otros. No sé las razones por las que el profesor Popov contactó conmigo para esta aventura, pero le agradezco enormemente la oportunidad que me ha brindado ya que me ha permitido aprender, divertirme y emprender una tarea que nunca había hecho anteriormente.

La aventura de traducir un libro del alemán al castellano no es una tarea fácil, aún más cuando se trata de un libro científico en un campo poco avanzado científicamente en España, pero con notables aplicaciones en ingeniería y maquinaria. La traducción del alemán al español de la Dra. Susana Moreno Flores ha sido impecable y mi labor de revisión ha sido también laboriosa pero muy instructiva. Agradezco enormemente el trabajo realizado por la Dra. Moreno Flores y su paciencia con mis muchas observaciones sobre su traducción.

Este libro sobre mecánica del contacto es multidisciplinar y constituye una herramienta muy útil para los ingenieros, los físicos y los investigadores en el campo de los adhesivos. La existencia de una obra en castellano sobre esta temática constituye una novedad que abre el campo de trabajo de los hispanohablantes a una disciplina raramente tratada en las obras actuales en castellano y que, hasta donde conozco, no tiene antecedentes.

El título del libro original se ha cambiado para adaptarlo a sus contenidos. Por supuesto, lo he consensuado con el Prof. Popov que lo ha aceptado. Este libro constituye un excelente compendio de aspectos teóricos y aplicados, ilustrado con problemas resueltos, lo que lo hace especialmente interesante para los estudiantes de las facultades de ingeniería, física y geología. No obstante, este libro resulta útil también para los investigadores y profesionales que se ocupan de los aspectos del rozamiento y fricción en maquinaria.

La obra *Principios y aplicaciones de la mecánica de contacto en tribología, fricción y adherencia* constituye una rigurosa y actualizada visión de los conceptos fundamentales de este campo de conocimiento. Ha sido actualizada y revisada hasta el año 2019, por lo que constituye un texto de consulta y de referencia en su área. El libro cubre aspectos tan diversos como la viscoelasticidad, la mojabilidad o la predicción de terremotos, además de aspectos más clásicos de la tribología y la fricción. El libro es particularmente útil para los ingenieros y científicos que se inician en el campo de la Tribología, la fricción y la adherencia, incluso podría ser considerado como un libro de texto riguroso, actualizado y sin errores conceptuales. En consecuencia, el libro es multidisciplinar y, siendo ampliamente didáctico, supone una aportación excepcional en su campo.

Como editor de esta obra traducida al castellano, deseo expresar mi agradecimiento al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante por su apoyo en la publicación del libro y por las facilidades y sugerencias realizadas para su publicación, particularmente en el apartado de difusión y acceso libre a cualquier lector que le interese.

Alicante, enero de 2020
José Miguel Martín Martínez
Laboratorio de Adhesión y Adhesivos
Departamento de Química Inorgánica
Universidad de Alicante

ÍNDICE

1. Introducción	21
1.1 Fenómenos de contacto, fenómenos de fricción y sus aplicaciones	21
1.2 Contexto histórico de la Mecánica de Contacto y la Física de la Fricción	23
1.3 Estructura del libro.	28
2. Tratamiento cualitativo del contacto – El caso del contacto normal sin adherencia	29
2.1 Propiedades de los materiales	30
2.2 Casos sencillos de contacto	33
2.3 Métodos de estimación cualitativa en contactos con un medio continuo elástico y tridimensional	37
Problemas resueltos	41
3. Tratamiento cualitativo del contacto adherente.	47
3.1 Principios físicos	48
3.2 Cálculo de la fuerza de adhesión entre superficies curvas.	52
3.3 Estimación cualitativa de la fuerza de adhesión entre dos cuerpos elásticos	53
3.4 Efecto de la rugosidad en la adherencia.	55
3.5 Las cintas adhesivas.	56
3.6 Información adicional – Fuerzas de van der Waals y energías de superficie.	57
Problemas resueltos	58
4. Fuerzas capilares.	63
4.1 Tensión superficial y ángulos de contacto	64
4.2 Histéresis en los ángulos de contacto.	67
4.3 Presión y radio de curvatura de la superficie.	67
4.4 Puentes de líquido	68
4.5 Fuerzas capilares entre un plano y una esfera rígidos	69
4.6 Fluidos en superficies rugosas	70
4.7 Fuerzas capilares y Tribología	71
Problemas resueltos	72

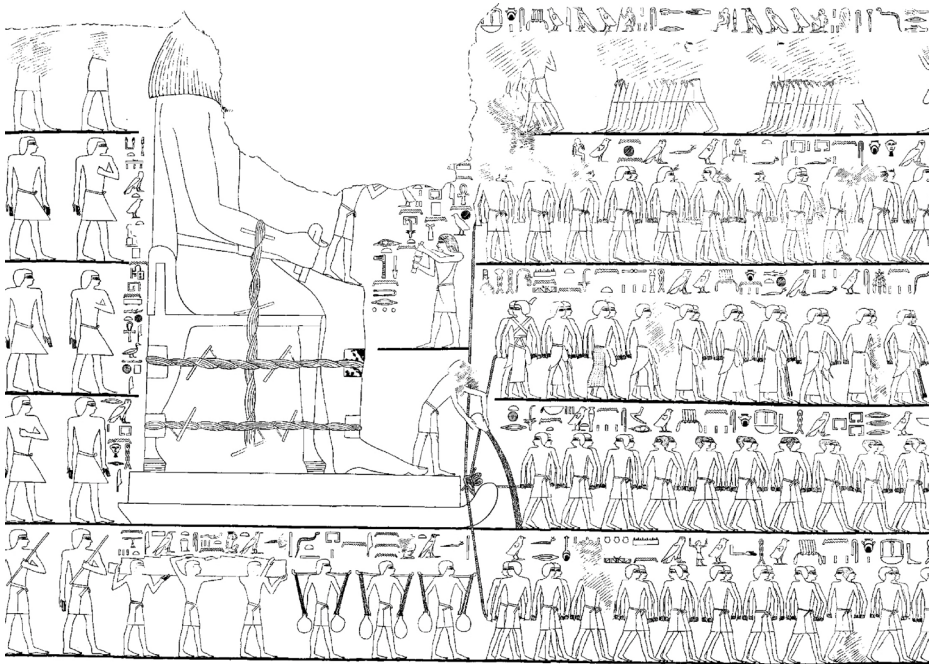
5. Tratamiento riguroso del contacto – El contacto hertziano	79
5.1 Deformación de un semi-espacio elástico bajo la acción de fuerzas superficiales	80
5.2 La teoría del contacto hertziano	83
5.3 El contacto entre dos cuerpos elásticos de superficies curvas	85
5.4 El contacto entre un indentador cónico rígido y el semi- espacio elástico	88
5.5 Tensiones internas en el contacto hertziano	89
5.6 Método de reducción de dimensión (MRD)	91
Problemas resueltos	94
6. Tratamiento riguroso del contacto – El contacto adherente	105
6.1 La teoría de Johnson, Kendall y Roberts	106
6.2 El contacto adherente de cuerpos con simetría rotacional	111
Problemas resueltos	114
7. El contacto entre superficies rugosas	119
7.1 El modelo de Greenwood y Williamson	119
7.2 Deformación plástica de rugosidades en el contacto	126
7.3 Contactos eléctricos	127
7.4 Contactos térmicos	130
7.5 Rigidez mecánica del contacto	131
7.6 Sellantes	131
7.7 Rugosidad y adherencia	133
Problemas resueltos	134
8. El contacto tangencial	139
8.1 Deformación de un semi-espacio elástico bajo la acción de fuerzas tangenciales	140
8.2 Deformación de un semi-espacio elástico bajo la acción de una distribución de esfuerzos tangenciales	141
8.3 El contacto tangencial sin deslizamiento	143
8.4 El contacto tangencial con deslizamiento	145
8.5 Ausencia de deslizamiento en un indentador cilíndrico rígido	148
8.6 El contacto tangencial en cuerpos con simetría axial	149
Problemas resueltos	152
9. El contacto rodante	161
9.1 Discusión cualitativa de los procesos en un contacto rodante	162
9.2 Distribución de esfuerzos en un contacto rodante estacionario	164
Problemas resueltos	170
10. La ley de rozamiento de Coulomb	175
10.1 Introducción	175
10.2 Fricción estática y dinámica	176

10.3	El ángulo de inclinación crítico	177
10.4	Dependencia del coeficiente de fricción con el tiempo de contacto.	178
10.5	Dependencia del coeficiente de fricción con la fuerza normal . .	180
10.6	Dependencia del coeficiente de fricción con la velocidad de deslizamiento.	181
10.7	Dependencia del coeficiente de fricción con la rugosidad superficial.	182
10.8	El origen de la ley de rozamiento según Coulomb	183
10.9	La teoría de Bowden y Tabor.	184
10.10	Dependencia del coeficiente de fricción con la temperatura . . .	187
	Problemas resueltos	188
11.	El modelo Prandtl-Tomlinson de la fricción seca.	199
11.1	Introducción.	199
11.2	Propiedades fundamentales del modelo Prandtl-Tomlinson . . .	201
11.3	Inestabilidad elástica	206
11.4	Superdeslizamiento	209
11.5	Nanomáquinas: Conceptos para micro y nanoactuadores	210
	Problemas resueltos	215
12.	Vibraciones inducidas por rozamiento	219
12.1	Inestabilidad del rozamiento cuando la fuerza de fricción decrece con la velocidad	220
12.2	Inestabilidad en un sistema de elasticidad distribuida.	223
12.3	Amortiguamiento crítico y supresión óptima del ruido por rozamiento	225
12.4	Supresión activa del ruido por rozamiento	228
12.5	Aspectos sobre la tenacidad en el ruido por rozamiento	230
12.6	Dependencia de las condiciones de estabilidad con la rigidez del sistema	231
12.7	Sprag-slip.	237
	Problemas resueltos	238
13.	Efectos térmicos en el contacto	245
13.1	Introducción.	245
13.2	Cálculo del aumento local de la temperatura por rozamiento en micro-contactos.	246
13.3	Inestabilidad termo-mecánica	248
	Problemas resueltos	250
14.	Sistemas lubricados	253
14.1	Flujo entre dos placas paralelas	254
14.2	Lubricación hidrodinámica	255

14.3	“Adherencia viscosa”	260
14.4	Reología de los lubricantes	263
14.5	Lubricación de capa límite	265
14.6	Elasto-hidrodinámica	266
14.7	Lubricantes sólidos	270
	Problemas resueltos	271
15.	Propiedades viscoelásticas de los elastómeros	285
15.1	Introducción	285
15.2	Relajación de la tensión en elastómeros	287
15.3	El módulo de cizalla complejo como función de la frecuencia	289
15.4	Propiedades del módulo complejo	291
15.5	Disipación de la energía en un material viscoelástico	292
15.6	La medida experimental del módulo complejo	293
15.7	Modelos reológicos	294
15.8	Un modelo reológico sencillo de la goma (“modelo estándar”)	296
15.9	Efecto de la temperatura en las propiedades reológicas	298
15.10	Curvas maestras	299
15.11	Serie de Prony	301
15.12	Aplicación del método de reducción de dimensión en medios viscoelásticos	305
	Problemas resueltos	307
16.	La goma: fricción y mecánica de contacto	315
16.1	El rozamiento entre un elastómero y una superficie rígida y rugosa	315
16.2	Resistencia a la rodadura	321
16.3	El contacto adherente con elastómeros	324
	Problemas resueltos	326
17.	Desgaste	333
17.1	Introducción	333
17.2	Desgaste abrasivo	334
17.3	Desgaste adhesivo	337
17.4	Condiciones para el rozamiento de bajo desgaste	340
17.5	El desgaste como mecanismo de transporte de materia desde la zona de rozamiento	342
17.6	Desgaste en elastómeros	343
	Problemas resueltos	346
18.	El rozamiento inducido por ultrasonidos	351
18.1	Efecto macroscópico de los ultrasonidos en la fuerza de rozamiento	352

18.2 Efecto microscópico de los ultrasonidos en la fuerza de rozamiento.	357
18.3 Investigación experimental de la fricción estática en función de la amplitud de oscilación.	359
18.4 Investigación experimental de la fricción dinámica en función de la amplitud de la oscilación	362
Problemas resueltos	364
19. Métodos de simulación numérica en la Mecánica de Contacto . . .	371
19.1 Sistemas de varios cuerpos	372
19.2 El método de elementos finitos	373
19.3 El método de elementos de contorno.	374
19.4 El método de elementos de contorno: El contacto tangencial . . .	375
19.5 El método de elementos de contorno: El contacto adherente . . .	377
19.6 Métodos de partículas	378
19.7 El método de reducción de dimensión.	379
20. Terremotos y rozamiento	381
20.1 Introducción.	382
20.2 Cuantificación de terremotos.	383
20.2.1 La ley de Gutenberg-Richter	384
20.3 Las leyes de rozamiento en rocas.	385
20.4 Estabilidad del deslizamiento bajo fuerzas de fricción variables con la velocidad y el estado	389
20.5 Nucleación de terremotos y post-deslizamiento	392
20.6 Premonitores y réplicas	396
20.7 Mecánica del continuo aplicada a medios granulares y a la estructura de fallas.	396
20.8 ¿Se pueden predecir los terremotos ?.	400
Problemas resueltos	401
Apéndice A – Cálculo de desplazamientos normales bajo la acción de distribuciones de presiones determinadas	405
Apéndice B – El contacto normal con perfiles de simetría axial	411
Apéndice C – El contacto adherente con perfiles de simetría axial . . .	415
Apéndice D – El contacto tangencial con perfiles de simetría axial. . .	417
Bibliografía recomendada	421
Índice de imágenes	427
Índice de términos.	429

1. INTRODUCCIÓN



1.1 FENÓMENOS DE CONTACTO, FENÓMENOS DE FRICCIÓN Y SUS APLICACIONES

La Mecánica de Contacto y la Física del Rozamiento son disciplinas básicas de la Ingeniería y de uso indispensable en el diseño correcto y efectivo de estructuras. Ambas disciplinas son de interés fundamental en innumerables aplicaciones, tales como el embrague, los frenos, las ruedas, el moldeo y mecanizado de materiales, la soldadura con ultrasonidos, o el contacto eléctrico, así como en el comportamiento y diseño de cojinetes de rueda, rodadura y deslizamiento, motores de combustión, juntas o bisagras. Los cometidos de dichas disciplinas incluyen desde la determinación de la tenacidad de elementos de contacto y unión bajo la acción del rozamiento y el desgaste, hasta sus aplicaciones en la Ingeniería de Micro y Nanosistemas, pasando por el diseño de materiales. El rozamiento es un fenómeno que ha interesado a la humanidad desde tiempo inmemorial y sigue jugando un papel central en el desarrollo de nuevos productos y tecnologías.

Un ejemplo de contacto clásico es el contacto rueda-raíl, en el que los aspectos asociados a la tenacidad del material y a la transmisión de fuerzas adquieren gran importancia. Los contactos permiten transmitir fuerzas mecánicas –por ejemplo, mediante tornillos–, corriente eléctrica o calor, así como impedir el flujo de materia –por ejemplo, a través de juntas. Entre otros ejemplos de contacto se incluyen el generado entre la punta y el sustrato en un microscopio de fuerza atómica o el que surge entre dos placas tectónicas. Los fenómenos de contacto y

rozamiento a distintas escalas —de la nano a la mega—, tienen mucho en común y pueden tratarse de forma similar. Por tanto, la Mecánica de Contacto y la Física del Rozamiento pueden englobarse en un único gran campo de investigación y tecnología modernas, que se ocupa tanto de la dinámica de proteínas-motores y la contracción muscular, como de la dinámica y el efecto de los terremotos, sin descuidar el ámbito descomunal de la tribología clásica.

El rozamiento origina disipación de energía, y en la zona de contacto se generan tensiones enormes que a su vez producen microfracturas y desgaste de las superficies. Por esta razón, es frecuente intentar reducir al mínimo el rozamiento en el montaje y puesta a punto de estructuras e instalaciones técnicas, de tal forma que el ahorro de energía sea máximo. Sin embargo, existen casos en los que el rozamiento es indispensable. Sin él, no podríamos disfrutar por ejemplo de la melodía de un violín, ni podríamos conducir un automóvil. Es más, en muchas ocasiones incluso se persigue aumentar al máximo el rozamiento en vez de disminuirlo, tal y como sucede en el rozamiento entre el neumático y el asfalto durante el frenado. El desgaste es también otro fenómeno que no siempre conviene reducir al mínimo, puesto que un desgaste rápido y controlado es fundamental en procesos tecnológicos asociados al mecanizado y acabado de materiales (por ejemplo, durante el limado, el pulido o el arenado).

Estrechamente relacionado con el rozamiento y el desgaste figura el fenómeno de la adherencia, cuya importancia se refleja en la manera en la que se alcanza un contacto estrecho e íntimo entre dos superficies. Mientras que en el contacto macroscópico entre dos cuerpos duros (como metales o madera), la adherencia no juega un papel importante, sí que lo hace en el caso de que uno de esos cuerpos sea muy blando, y de ella se hace uso en diversas aplicaciones. Incluso en el empleo de los adhesivos, se puede aprender mucho de mecánica de contacto. La adherencia cobra también una especial importancia en el campo de la micro-ingeniería, ya que las fuerzas de rozamiento y adhesión en la micro-escala pueden plantear un serio problema, que se ha denominado con el término de *sticktion* (del inglés, *sticking* y *friction*).

Otro fenómeno emparentado con la adherencia y que se discutirá también en este libro, es el asociado a las fuerzas capilares, las cuales surgen en los contactos en presencia de trazas de fluido. En mecanismos de alta precisión como los de los relojes, basta la humedad ambiental para producir fuerzas capilares capaces de alterar la exactitud del reloj de manera considerable. No obstante, las fuerzas capilares pueden también servir para controlar el aporte de lubricante en las zonas donde se produce el rozamiento.

En un libro sobre contacto y fricción no puede faltar la mención a los fenómenos acústicos, que con frecuencia se asocian al rozamiento. Los frenos, el contacto rueda-raíl y los rodamientos no solo transforman energía y materia. También rechinan y chirrían con frecuencia de forma muy desagradable, ruido que puede, en ocasiones, llegar incluso a ser dañino al oído. El ruido que generan

las estructuras técnicas se ha convertido en uno de los problemas centrales en la Ingeniería actual. Por ello, las vibraciones causadas por rozamiento, las cuales dependen muy estrechamente de las fuerzas de fricción, también serán tratadas en este libro.

Si se pudiera estimar la importancia de cada campo de la tribología en términos monetarios, es decir, en términos de la inversión que recibirían sus soluciones ingenieriles, la lubricación ocuparía sin duda el primer lugar. Si bien, lamentablemente, no es posible dedicar a la lubricación un espacio acorde a dicha importancia en este libro, los fundamentos de la lubricación hidrodinámica son sin duda parte de su contenido.

Lo que se persigue en la Mecánica de Contacto y la Física de Rozamiento o Fricción es, en definitiva, poder conocer bien y así controlar los procesos de rozamiento, adherencia y desgaste. Para ello es fundamental comprender con detalle la relación entre los fenómenos de contacto, fricción y desgaste, así como las propiedades de los materiales y de los sistemas.

1.2 CONTEXTO HISTÓRICO DE LA MECÁNICA DE CONTACTO Y LA FÍSICA DE LA FRICCIÓN

La historia de la Tribología permite dar una primera visión sobre las aplicaciones tribológicas y su significado. En mayo de 1966, Peter Jost propuso el término *Tribología* para referirse a los campos de la investigación y de la ingeniería dedicados al contacto, rozamiento, desgaste y a la lubricación. No obstante, y al margen de dicha denominación, la Tribología en sí es ancestral. Sus comienzos son remotos y se pierden en los albores de la historia. La invención del fuego, el descubrimiento de la rueda y el cojinete de deslizamiento, el empleo de líquidos para disminuir el rozamiento y el desgaste, son «invenciones tribológicas» que se conocen siglos antes de Cristo¹.

En esta breve reseña sobre la historia de la Tribología daremos un salto en el tiempo hasta el Renacimiento y sus invenciones, y comenzaremos por la contribución de *Leonardo da Vinci*. En su Códice Madrid I (1495) da Vinci describe su invención del cojinete de rodadura, la composición de una aleación de baja fricción, así como sus investigaciones experimentales de los fenómenos de rozamiento y desgaste. Da Vinci fue el primer ingeniero en formular de forma contundente y cuantitativa las leyes de fricción. A da Vinci se le atribuyen las observaciones que han dado lugar a las que actualmente se conocen como las dos leyes fundamentales de la fricción:

- 1) La fuerza de fricción es proporcional a la carga.
- 2) La fuerza de fricción es independiente de la superficie de contacto.

1. Más información sobre la Historia de la Tribología se puede encontrar en: D. Dowson. *History of Tribology*, Longman Group Limited, Londres (1979).

Da Vinci fue además el primero en introducir el término coeficiente de fricción y determinar experimentalmente su valor ($1/4$).

Como tantas veces ocurre en la Historia de la Ciencia, los hallazgos de da Vinci se olvidaron para ser «redescubiertos» 200 años después (1699) por el físico francés *Guillaume Amontons*. Por esta razón, la proporcionalidad entre la fuerza de fricción y la fuerza normal se conoce como «ley de Amontons».

Leonard Euler se dedicó al estudio del rozamiento tanto desde el punto de vista matemático como experimental. Él fue quien introdujo la diferencia entre la fuerza de rozamiento estática y dinámica y resolvió el problema del rozamiento de la cuerda –probablemente el primero de los casos resueltos en la historia de contacto con rozamiento (1750). Sentó las bases para el tratamiento matemático de la ley de rozamiento y de esta forma fomentó su posterior desarrollo. A Euler se le atribuye la notación μ para el coeficiente de fricción, de tan extenso uso. Euler especuló también sobre el posible origen del rozamiento, concibiéndolo como acoplamiento de una serie de pequeñas irregularidades triangulares, donde el coeficiente de fricción es igual a la pendiente de dichas irregularidades. Esta visión, en sus distintas variantes, ha perdurado durante siglos, y aún hoy en día se sigue empleando como «modelo Tomlinson»² en el tratamiento de la fricción a escala atómica, algo que al mismo Euler le hubiera costado imaginar, y que no obstante forma parte de la Nanotribología moderna.

De la mano del ingeniero francés *Charles Augustin Coulomb* llegó la siguiente contribución a la investigación de la fricción seca, de gran excelencia y validez hasta la fecha. Es por ello que la ley de la fricción seca lleva su nombre. Coulomb confirmó los resultados de Amontons y encontró que la fricción dinámica es, en una primera aproximación, independiente de la velocidad del deslizamiento. Para ello investigó de forma cuantitativa y muy concienzuda, la fricción seca entre cuerpos duros y su dependencia con el tipo de materiales involucrados, la calidad de las superficies, la lubricación, la velocidad del deslizamiento en contraposición con el tiempo de contacto entre las superficies (en el caso de la fricción estática), la humedad de la atmósfera y la temperatura. La aparición de su libro *Theorie des Machines Simples* (1781), marca la distinción, desde el punto de vista cuantitativo, entre la fricción estática y dinámica. En dicho libro, Coulomb empleó los mismos supuestos sobre el origen de la fricción seca que Euler, si bien fue más allá, desarrollando lo que viene en llamarse hoy en día «la contribución de la adherencia». Fue también Coulomb quien identificó las desviaciones empíricas de las que hasta entonces habían sido las leyes sencillas del rozamiento, como el hecho de que la fuerza de rozamiento estático crece con el tiempo en reposo. Con sus investigaciones, Coulomb se adelantó a su tiempo,

2. El modelo fue propuesto en 1928 por Prandtl aunque se le conoce erróneamente con el nombre de modelo Tomlinson. Dicho modelo viene a ser la transcripción matemática de las ideas de Leonard Euler.

y su libro contiene prácticamente todas las ramas de la Tribología que se han ido desarrollando desde entonces³.

La investigación del rozamiento rodante no ha jugado un papel histórico tan importante como la del rozamiento deslizante –quizás debido a que aquel es mucho más pequeño que este último y por tanto no tan claramente relevante. Los primeros planteamientos –aún correctos en esencia–, sobre la naturaleza del contacto rodante en cuerpos plásticos deformables proceden de *Robert Hooke* (1685). El hecho de que la naturaleza del rozamiento rodante dependa de los parámetros del material y de la carga, generó en los años 1841-42 una agria discusión entre *Morin* y *Dupuit* sobre cómo debería formularse la ley del rozamiento rodante. Según *Morin*, el rozamiento rodante debería ser inversamente proporcional al radio de la rueda, mientras que *Dupuit* defendía la proporcionalidad inversa al cuadrado del radio. Hoy en día se sabe que ambas posturas son correctas, si bien con carácter limitado y bajo condiciones distintas.

Osborne Reynolds fue el primero en investigar experimentalmente la fenomenología del contacto rodante en la zona de contacto. *Reynolds* encontró que, en una rueda en contacto siempre existen regiones en las que los cuerpos involucrados tienden a trabarse y zonas en las que se produce desplazamiento relativo. Este fue el primer intento de examinar concienzudamente el contacto tribológico, y al mismo tiempo eliminó la marcada distinción que, hasta entonces, existía entre rozamiento estático y dinámico. *Reynolds* consiguió relacionar la energía disipada en la rodadura con el deslizamiento parcial que se produce durante la misma. Más adelante, *Carter* (1926) desarrolló una teoría cuantitativa del contacto rodante, en base a la cual *Hertz* desarrolló los fundamentos de la Mecánica de Contacto.

Durante siglos la humanidad había lubricado los contactos donde se producía roce para disminuir el rozamiento. Sin embargo, las exigencias de una industria cada vez más desarrollada obligaron a los investigadores a estudiar a fondo la lubricación, tanto desde el punto de vista experimental como teórico. En este contexto, *N. Petrov* realizó en 1883 sus investigaciones experimentales con cojinetes de rodamiento, lo que le llevó a formular las leyes más importantes de la lubricación hidrodinámica. En 1886 *Reynolds* publicó su Teoría de la Lubricación Hidrodinámica, donde presentaba la llamada «igualdad de Reynolds», desarrollada por él, y que aún hoy constituye la base para el cálculo en sistemas hidrodinámicamente lubricados. A raíz de la Teoría de la Lubricación Hidrodinámica, el coeficiente de fricción pasó a expresarse como cociente entre el espesor de la capa de lubricante, h , y la extensión del contacto, L , $\mu \approx h / L$. Esta expresión solo es válida cuando las superficies están tan cerca la una de

3. En el artículo del autor y de E. Popova, «*The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction*», *Friction*, 2105, DOI 10.1007/s40544-015-0074-6 puede encontrarse un breve compendio de los trabajos de Coulomb sobre Tribología.

la otra, que el espesor de la capa de lubricante es similar a la rugosidad de las superficies. Se dice entonces que el sistema se encuentra en régimen de fricción mixta, la cual fue investigada en detalle por *Stribeck* (1902). La llamada *curva Stribeck* representa la dependencia de la fuerza de rozamiento con la velocidad de deslizamiento, y muestra un mínimo característico.

Cuando la carga es grande o en condiciones de baja lubricación, se llega al caso en el que la película de lubricante es tan delgada que tan solo consiste en unas pocas capas de moléculas. *Hardy* (1919-22) investigó las leyes de la llamada lubricación de capa límite, y descubrió que incluso una capa de grasa de dimensiones moleculares tiene un efecto enorme tanto en la fuerza de rozamiento como en el desgaste. *Hardy* midió la dependencia de la fuerza de rozamiento con el peso molecular del lubricante, percatándose de manera acertada, de que las moléculas de la última capa molecular se anclan a la superficie del metal. El bajo rozamiento que de ello resulta es producto de la interacción de las moléculas poliméricas de lubricante, lo que hoy en día se conoce como «fluido adherente».

El siguiente avance en nuestro conocimiento tanto de la mecánica de contacto como de la fricción seca, data de mediados del siglo XX y está ligado a dos nombres: *Bowden* y *Tabor*. Ellos fueron los primeros en sugerir la importancia de la rugosidad de los cuerpos en contacto. Gracias a la rugosidad, el área real de contacto entre dichos cuerpos es, típicamente, un orden de magnitud inferior al área aparente de contacto. Esta visión cambió de manera radical el rumbo de muchas investigaciones en Tribología, y permitió rescatar las viejas ideas de *Coulomb* acerca de la adherencia como probable mecanismo del rozamiento. En 1949, *Bowden* y *Tabor* propusieron la formación y cortadura de uniones de soldadura como explicación para el origen de la fricción dinámica producida entre dos superficies metálicas puras. Según esta interpretación, el coeficiente de fricción es aproximadamente igual al cociente entre el esfuerzo crítico a cortadura y la dureza, tomando el valor $1/6$ para todo material plástico e isótropo. Curiosamente, el valor del coeficiente de fricción para muchos pares de materiales metálicos no lubricados (como por ejemplo, acero con acero, acero con bronce, o acero con fundición gris, entre otros) es muy parecido ($\mu \sim 0.16$).

Los trabajos de *Bowden* y *Tabor* han inspirado toda una serie de teorías sobre la Mecánica de Contacto entre superficies rugosas. Entre los trabajos pioneros cabe destacar el de *Archard* (1957), el cual concluyó que, también en el caso de superficies elásticas y rugosas, el área de contacto es aproximadamente proporcional a la fuerza normal. Otras contribuciones importantes en el área están asociadas a los trabajos de *Greenwood* y *Williamson* (1966), *Bush* (1975) y *Persson* (2002). El resultado principal de estos trabajos es que el área real de contacto entre superficies rugosas es, *grosso modo*, proporcional a la fuerza normal, mientras que las condiciones que se dan en los micro-contacts (presión o tamaño de los mismos) dependen solo débilmente de la carga.

La Mecánica de Contacto en superficies rugosas ha tenido una influencia considerable en la comprensión de la fricción seca. Coulomb sabía que el coeficiente de fricción estático crece, si bien lentamente, con el tiempo de contacto y que el coeficiente de fricción dinámico depende de la velocidad de deslizamiento. Por otra parte, los experimentos de *Dieterich* (1972) mostraron que, efectivamente, existe una relación entre dichos efectos. En particular, la distinción entre «fricción estática» y «fricción dinámica» pasó a ser relativa, siendo reemplazada por la idea de que la fricción depende de la velocidad y de una variable interna, la cual refleja la naturaleza del conjunto de los micro-contactos. Es interesante resaltar que estos estudios se realizaron en el contexto de la investigación de terremotos y que no fue hasta mediados de los años 1990 que se incorporaron al ámbito de la «Tribología clásica».

Con el desarrollo de la industria automovilística, el aumento de la velocidad y las prestaciones, la fricción de la goma adquirió importancia técnica. Gracias al clásico trabajo de *Grosch* (1962) se puede comprender el mecanismo del rozamiento en elastómeros, y sobre todo el hecho, generalmente reconocido hoy en día, de que el rozamiento en elastómeros está ligado a la pérdida de energía termodinámica en el material, así como a su reología.

Si bien la Mecánica de Contacto sienta las bases para la comprensión de los fenómenos de rozamiento hoy en día, desde el punto de vista histórico fueron estos últimos los que se estudiaron mucho antes y en mayor profundidad. Lo que sin duda despertó el interés por el cálculo de las condiciones mecánicas en el contacto, fue el desarrollo del ferrocarril, ya que en el contacto rueda-raíl es donde las tensiones son de magnitud cercana a la capacidad máxima de carga del acero.

Pero sobre todo, la Mecánica Clásica de Contacto está asociada a *Heinrich Hertz*. En el año 1882, Hertz solucionó el problema del contacto entre dos cuerpos elásticos de superficies curvas. Este resultado clásico sienta las bases de la Mecánica de Contacto aún hoy en día. Y no fue hasta un siglo más tarde que *Johnson, Kendall y Roberts* encontraron una solución análoga al contacto adherente (Teoría JKR), posiblemente debido a que, según la experiencia cotidiana, los cuerpos rígidos no se adherían. Solo con el surgimiento de la microtecnología, la adherencia pasa a ser un problema a tratar por los ingenieros. De forma casi simultánea, *Derjagin, Müller y Toporov* desarrollaron una nueva teoría para el contacto adherente. Y tras una acalorada discusión, Tabor reconoció que ambas teorías eran casos límite de un problema común.

A pesar de su evidente importancia, parece sorprendente que los fenómenos de desgaste fuesen tratados tan relativamente tarde. Esto puede ser debido a que el desgaste se manifiesta sobre todo en las interacciones entre micro-contactos, lo cual no se empezó a investigar, desde el punto de vista tribológico, hasta después de los trabajos de Bowden y Tabor. La ley del contacto abrasivo –el desgaste es proporcional a la carga y al camino recorrido, e inversamente proporcional a la

dureza de los materiales en contacto— fue enunciada por *M. Khrushchov* (1956) tras minuciosos experimentos, y confirmada más tarde por *Archard* (1966). La investigación del desgaste adhesivo —para el que las leyes del contacto abrasivo son igualmente válidas— está asociada a los nombres de *Tabor* y *Rabinowicz*. Sin embargo, y a pesar de estos estudios, los mecanismos por los que se produce el desgaste, sobre todo en condiciones de «bajo desgaste», siguen siendo uno de los fenómenos tribológicos menos conocidos.

Desde los años noventa del siglo xx, la Mecánica de Contacto y la Física del Rozamiento, o de la Fricción, han visto un nuevo renacer. El desarrollo de métodos experimentales para el estudio de los procesos de fricción a escala atómica (la microscopía de fuerza atómica, la microscopía de fuerza de fricción, la microbalanza de cristal de cuarzo, el aparato de fuerzas superficiales), así como de métodos numéricos de simulación, han desencadenado un aumento de los trabajos de investigación en el campo del rozamiento en cuerpos rígidos. De igual forma, el desarrollo de la Microtecnología ha contribuido a aumentar el interés por la Mecánica de Contacto y la Física de la Fricción. De hecho, los experimentalistas tienen ahora la posibilidad de investigar sistemas bien definidos bajo condiciones muy controladas. Hoy en día es posible, por ejemplo, regular el espesor de una película o controlar el desplazamiento relativo entre superficies rígidas con una precisión mayor que la distancia interatómica. No obstante, existe aún una brecha entre la Tribología clásica y la Nanotribología, que no se ha podido tratar hasta la fecha.

1.3 ESTRUCTURA DEL LIBRO

El contacto y el rozamiento —o la fricción— van siempre de la mano, y en sistemas reales aparecen interrelacionados de diversas maneras. Un tratamiento teórico requiere que, en primer lugar, se traten por separado. Se empezará pues, abordando los fenómenos de contacto y fricción en la mecánica de contacto. Esta a su vez comienza con un análisis cualitativo, que permite una comprensión sencilla, si bien general, de los fenómenos claves. Posteriormente se abordará el tratamiento riguroso de los problemas de contacto y por último, se tratarán los fenómenos de la fricción, de la lubricación y del desgaste.

2. TRATAMIENTO CUALITATIVO DEL CONTACTO – EL CASO DEL CONTACTO NORMAL SIN ADHERENCIA



Se comenzará el tratamiento de los fenómenos de contacto con el *caso del contacto normal*. Por contacto normal se entiende aquel que se establece entre dos cuerpos mediante una fuerza o carga de compresión *perpendicular a las superficies de los mismos*. Un ejemplo clásico es el caso de una rueda sobre un raíl. Las dos relaciones más importantes que la teoría del contacto normal debe establecer, son las siguientes:

- (1) La relación entre la fuerza o carga de compresión y el desplazamiento normal del cuerpo, que a su vez determina la rigidez del contacto y las propiedades dinámicas del sistema, y
- (2) la relación entre las tensiones o esfuerzos generados en la zona de contacto y la resistencia mecánica del sistema.

Para que existan fenómenos de contacto, rozamiento o desgaste, dos cuerpos han de entrar en contacto. En este sentido, el contacto normal podría considerarse como el requisito básico de todos los fenómenos tribológicos. Hay que tener en cuenta que, incluso en el contacto normal, puede producirse el desplazamiento de las superficies en dirección *tangencial* de una con respecto a la otra, debido a las tensiones transversales, también llamadas esfuerzos cortantes, que se generan entre cuerpos en contacto. Por esta razón, las fuerzas de rozamiento o de fricción entran también en juego en los casos de contacto normal. Si se considera que las fuerzas de rozamiento están determinadas por el contacto entre micro-rugosidades superficiales, se verá que, incluso en los casos más sencillos de contacto y a distintas escalas, las contribuciones de las fuerzas normales, tangenciales y del

propio rozamiento están muy interrelacionadas. No obstante y en una primera aproximación, se obviarán estas complicaciones para abordar el caso del *contacto normal puro*, en el que se asumirá que las fuerzas de rozamiento en las superficies en contacto, junto con las siempre presentes fuerzas de atracción –adherencia–, son despreciables.

El tratamiento analítico o numérico de los casos de contacto es, incluso en los casos más sencillos, muy complicado. Por el contrario, estos pueden analizarse cualitativamente de forma muy sencilla. Por tanto, se comenzará con los métodos de análisis cualitativo de fenómenos de contacto, que en muchos casos pueden conducir a estimaciones cuantitativas muy certeras. El tratamiento riguroso de los casos clásicos de contacto más importantes se realizará en capítulos posteriores. Por tanto, se comenzará con una serie de casos de contacto entre cuerpos de distintas geometrías, la cual puede sentar la base para el tratamiento de casos de contacto más complicados

2.1 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Este libro presupone que el lector está familiarizado con los fundamentos de la teoría de la elasticidad. En esta sección nos limitaremos a resumir las definiciones de los parámetros más importantes, que más tarde servirán para el tratamiento cualitativo de los casos de contacto mecánico. Este resumen no tiene por tanto intención de reemplazar la teoría de la elasticidad y la plasticidad, la cual engloba definiciones y ecuaciones más generales.

(a) *Propiedades elásticas.* En un ensayo de tracción o tensión uniaxial, una barra de sección transversal A y longitud inicial l_0 se estira en una magnitud Δl . El cociente entre la fuerza de tracción y la sección transversal es la llamada tensión de tracción o esfuerzo axial de tensión

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

El cociente entre la diferencia en longitud (elongación), Δl , y la longitud inicial se denomina deformación de tracción, deformación axial o deformación longitudinal

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.2)$$

Un diagrama esfuerzo-deformación típico para muchos metales y no metales se muestra en la fig. 2.1. A bajos esfuerzos, la relación constitutiva esfuerzo-deformación es linealmente proporcional

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.3)$$

La constante de proporcionalidad E es el *módulo de elasticidad* o *módulo elástico* del material. La extensión en longitud lleva asociada una contracción transversal

del material, la cual viene dada por el *coeficiente de Poisson* (o coeficiente de contracción transversal) ν . En un medio incompresible, $\nu = 1/2$.

De forma análoga, el módulo de cizalla, o módulo de cortadura, se define como el coeficiente de proporcionalidad entre la tensión de cizalla, o esfuerzo cortante, y la deformación de cizalla, o deformación cortante. El módulo de cizalla depende del módulo elástico y del coeficiente de Poisson según la expresión (2.4).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

El cociente entre el esfuerzo y el cambio en volumen para una presión dada, se denomina módulo de compresión K :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.5)$$

Los cuerpos elásticos almacenan energía potencial, la cual se calcula a través de la *densidad de energía* E (energía por unidad de volumen):

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.6)$$

que, en el caso de la deformación cortante, se expresa como

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2G} \quad (2.7)$$

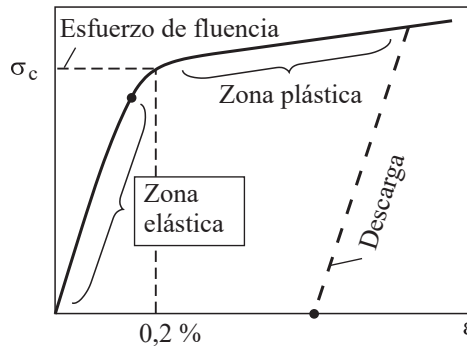


Fig. 2.1 Representación gráfica de un diagrama esfuerzo-deformación, válido para muchos metales y no metales.

(b) *Propiedades plásticas*. Sobrepasando el esfuerzo de fluencia o límite elástico, el esfuerzo cambia de forma abrupta y pasa de comportarse de forma lineal en la zona elástica, a ser prácticamente horizontal. En esta región, el material se deforma plásticamente. La deformación plástica se manifiesta como deformación

permanente, ya que el material no recupera su forma original cuando dejan de aplicarse la(s) fuerza(s) (descarga).

La transición entre el comportamiento elástico y el plástico es en general rápida pero gradual, de forma tal que es difícil definir claramente un «esfuerzo de fluencia». Por convención, se define el *esfuerzo de fluencia* σ_c como el esfuerzo para el que la deformación permanente es del 0,2%.

El esfuerzo de fluencia depende del régimen de deformación del material. En los casos de rozamiento, el estado de *alto endurecimiento por deformación, en frío, o por acritud*, es el que se toma como referencia, pudiendo manifestarse en la capa superficial del material tras someterlo a un ensayo tribológico. Esto significa que, en aplicaciones tribológicas y como norma general, se puede entender el esfuerzo límite de fluencia en el régimen de alto endurecimiento del material. Por tanto, y siempre que la deformación no conduzca a un nuevo estado constitutivo de endurecimiento en el material, se puede considerar a este, en primera aproximación, como elástico perfectamente plástico.

Un método sencillo para la determinación del límite de fluencia en un medio elástico perfectamente plástico es el *ensayo de la dureza*. Este consiste en realizar una impresión en la superficie del material por medio de un indentador rígido (fig. 2.2). El cociente entre la fuerza normal aplicada y el área indentada resultante, es la dureza de indentación σ_0 , o simplemente, *dureza* del material¹:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A}. \quad (2.8)$$

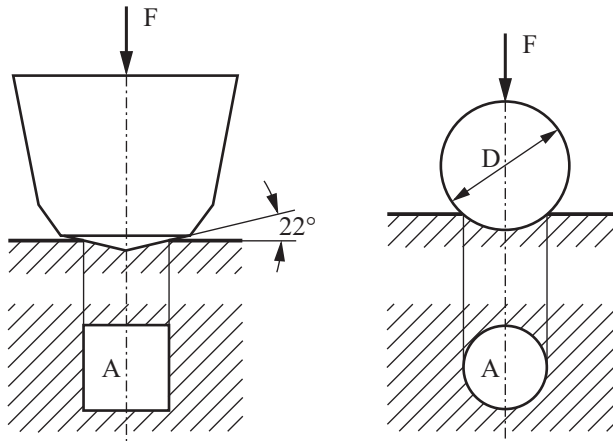


Fig. 2.2 Medida de la dureza mediante los métodos de Vickers y de Brinell.

1. Los valores de dureza que se obtienen mediante el método de Vickers y el de Brinell coinciden salvo por una constante en el valor de la definición de dureza. La dureza según Vickers es aproximadamente 0,1 la dureza de indentación. En este libro se utilizará la definición dada por la ecuación (2.8).

Tabor encontró, tanto de manera teórica como experimental, que en la mayor parte de los casos la dureza era aproximadamente tres veces el esfuerzo de fluencia²:

$$\sigma_0 \approx 3\sigma_c. \quad (2.9)$$

La medida de la dureza juega un papel crucial en la caracterización tribológica de materiales, puesto que, esencialmente, los procesos tribológicos vienen determinados por la interacción de micro-rugosidades que, por su geometría, son muy parecidas a las de un ensayo de dureza. Puesto que la dureza depende muy débilmente de la geometría del indentador, en una primera aproximación se puede despreciar dicha dependencia.

El módulo de elasticidad, la dureza, el coeficiente de dilatación térmica y la energía superficial, son, entre otras, propiedades relevantes de los materiales en la mecánica de contacto y en la fricción, y están estrechamente interrelacionadas. En el excelente libro de Ernest Rabinowicz *Friction and wear of materials*³ pueden encontrarse una gran cantidad de datos experimentales que lo corroboran.

2.2 CASOS SENCILLOS DE CONTACTO

Los problemas de contacto pueden resolverse de manera sencilla, siempre que la deformación venga perfectamente determinada por unas condiciones geométricas muy definidas. Tal es el caso de los cuatro ejemplos siguientes.

(1) Paralelepípedo

El caso de contacto más sencillo es el que se produce entre un paralelepípedo rectangular y una superficie lisa sin rozamiento (fig. 2.3). Al presionar el cuerpo contra la superficie, este se deforma elásticamente. Se definirá la *profundidad de indentación*», d , como la profundidad de la huella que el paralelepípedo dejaría en la superficie, en el caso de que esta no ofreciese ninguna resistencia.

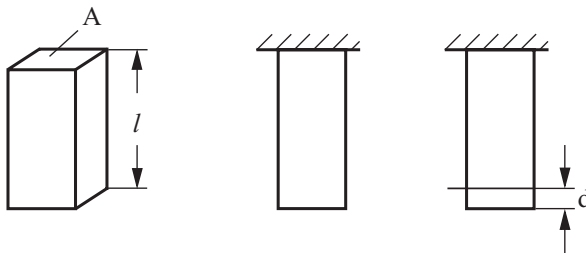


Fig. 2.3 Contacto entre un paralelepípedo elástico y una superficie rígida.

2. D. Tabor, *The Hardness of Metals*, Oxford University Press, Oxford (1951).

3. E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).

En realidad, el cuerpo no penetra en la superficie rígida, sino que se deforma en una magnitud d . Si la longitud del paralelepípedo es mucho mayor que su anchura, entonces se cumple la llamada *condición de esfuerzo o tensión uniaxial* y la fuerza elástica resultante viene expresada por la siguiente ecuación

$$F = EA \frac{d}{l} \quad (2.10)$$

donde E es el módulo de elasticidad, A el área de la sección transversal y l la longitud del paralelepípedo. En este caso, la fuerza es proporcional a la profundidad de indentación d .

(2) Película delgada

Si la longitud del paralelepípedo es mucho más pequeña que su anchura (fig. 2.4), el medio no se deforma en la dirección transversal, y en su lugar, experimenta una *deformación uniaxial*. En este caso, y según la teoría de la elasticidad,

$$F = \tilde{E}A \frac{d}{l} \quad (2.11)$$

donde

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.12)$$

Para metales $\nu \approx 1/3$, de tal forma que $\tilde{E} \approx 1.5E$. En el caso de elastómeros, los cuales pueden considerarse prácticamente incompresibles, $\nu \approx 1/2$, por lo que el módulo de compresión longitudinal \tilde{E} , es prácticamente igual al módulo de compresibilidad volumétrica, $\tilde{E} \approx K$, y mucho mayor que E (en torno a tres órdenes de magnitud):

$$\tilde{E} \approx K \gg E, \quad \text{para elastómeros.} \quad (2.13)$$

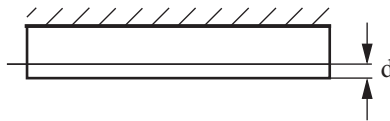


Fig. 2.4 Contacto entre una película elástica fina y una superficie rígida.

(3) Casquete esférico invertido

A continuación, se considerará el contacto entre un casquete esférico invertido, delgado y elástico, y un plano rígido (fig. 2.5).

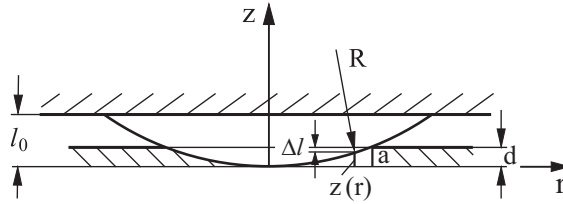


Fig. 2.5 Contacto entre un casquete esférico elástico invertido y un plano rígido.

La altura máxima del casquete esférico es l_0 , su radio de curvatura R , y a es el radio del área de contacto. Para simplificar, se supondrá que la fuerza de compresión se aplica en una zona donde se cumplen las siguientes condiciones geométricas: $d \ll l_0$, $l_0 \ll a$. Bajo estas condiciones, cada elemento del casquete esférico se deforma uniaxialmente, y por consiguiente, la deformación uniaxial resultante viene dada por el coeficiente de compresión longitudinal \tilde{E} (ecuación (2.12)).

El perfil del casquete esférico invertido en torno al mínimo puede expresarse en función del radio de curvatura R como

$$z = -\sqrt{R^2 - r^2} + R \approx \frac{r^2}{2R}. \quad (2.14)$$

De la fig. 2.5 se deduce que el radio del área de contacto a y la profundidad de indentación d están relacionados mediante la expresión $d = R - \sqrt{R^2 - a^2}$.

Esta puede aproximarse por $d = \frac{a^2}{2R}$, de forma que para el radio de contacto se obtiene la siguiente igualdad

$$a = \sqrt{2Rd}. \quad (2.15)$$

El desplazamiento vertical de la superficie se puede expresar en función de la coordenada r como $\Delta l = d - r^2 / 2R$. Por tanto, la deformación elástica resultante es igual a

$$\varepsilon(r) = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d - r^2 / 2R}{l_0}. \quad (2.16)$$

Y el esfuerzo, así como la fuerza resultante ejercida sobre la zona de contacto vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\sigma(r) = \tilde{E}\varepsilon(r), \quad F = \tilde{E} \int_0^a 2\pi r \left(\frac{d - r^2 / 2R}{l_0} \right) dr = \tilde{E} \frac{\pi}{l_0} R d^2. \quad (2.17)$$

En este caso, la fuerza de contacto es proporcional al cuadrado de la profundidad de indentación. El esfuerzo alcanza un máximo en el centro del área de contacto, siendo igual a

$$\sigma(0) = \tilde{E} \frac{d}{l_0} = \left(\frac{\tilde{E}F}{\pi l_0 R} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

(4) *Contacto entre un cilindro recubierto de una película elástica y delgada y un plano rígido*

Un sistema interesante en muchos aspectos es el constituido por un cilindro rígido de longitud L , recubierto de una película delgada y elástica de espesor l_0 (fig. 2.6). Suponiendo que la profundidad de indentación es mucho menor que el radio de contacto y mucho mayor que el espesor de la película, se deduce que la deformación es, también en este caso, uniaxial. El desplazamiento en cada punto de la superficie viene dado por la expresión $u_z = d - x^2 / 2R$. Para la deformación se tiene que

$$\varepsilon(x) = \frac{u_z}{l_0} = \frac{d - x^2 / 2R}{l_0}. \quad (2.19)$$

La fuerza de contacto resultante puede calcularse mediante la expresión

$$F = 2 \int_0^{\sqrt{2Rd}} \tilde{E}L \left(\frac{d - x^2 / 2R}{l_0} \right) dx = \frac{4}{3} 2^{1/2} \frac{\tilde{E}LR^{1/2}}{l_0} d^{3/2}. \quad (2.20)$$

Y la tensión máxima (en el centro del área de contacto) viene dada por

$$\sigma(0) = \left(\frac{9F^2 \tilde{E}}{32L^2 R l_0} \right)^{1/3}. \quad (2.21)$$

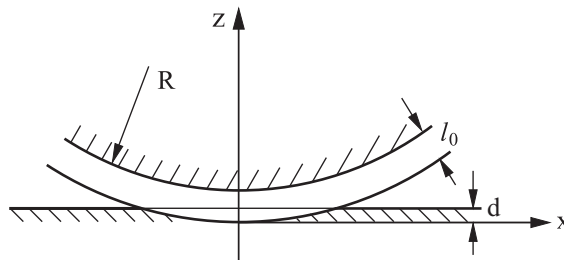


Fig. 2.6 Cilindro recubierto de una película elástica y delgada en contacto con una superficie rígida.

2.3 MÉTODOS DE ESTIMACIÓN CUALITATIVA EN CONTACTOS CON UN MEDIO CONTINUO ELÁSTICO Y TRIDIMENSIONAL

(1) Contacto entre un indentador cilíndrico rígido y un cuerpo elástico

Considérese un indentador cilíndrico rígido en contacto con un semi-espacio elástico (fig. 2.7 a). Este ejemplo permitirá explicar la idea más importante empleada en la Mecánica de Contacto para hacer estimaciones cualitativas.

Si una distribución de tensiones o esfuerzos se aplicase sobre una superficie en una región finita de extensión D (fig. 2.7 b), tanto la deformación como el esfuerzo tendrían, en todo el volumen de dimensión, D , y en las tres direcciones espaciales, el mismo orden de magnitud. Fuera de esta «región altamente deformada», la deformación y el esfuerzo disminuyen según la ley de potencia $\propto r^{-2}$. En consecuencia, la región de volumen dado por $\sim D^3$, es la que más contribuye en las expresiones de la energía y de la fuerza⁴.

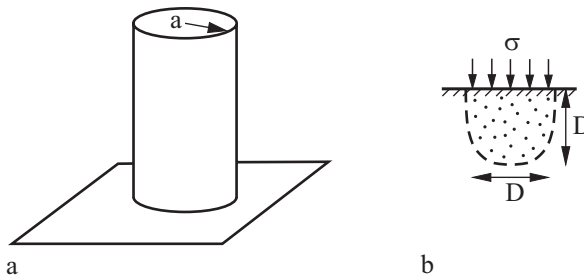


Fig. 2.7 (a) Contacto entre un indentador cilíndrico rígido y un semi-espacio elástico. (b) Región del semi-espacio altamente deformada.

Para una estimación cualitativa *grosso modo*, basta asumir que la deformación es constante en la región antes mencionada, y que esta es la única que se deforma. Esto ciertamente supone una representación un tanto burda de la distribución continua de deformaciones y esfuerzos que, en realidad, se da en el medio continuo. Sin embargo, dicha aproximación proporciona, en la mayoría de los casos y tan solo a falta de un factor de corrección, la relación exacta entre la fuerza de contacto y la profundidad de indentación, así como la magnitud exacta del radio de contacto. Dicho factor de corrección es constante, de orden de magnitud 1, y puede determinarse por simulaciones analíticas o numéricas.

4. El hecho de que la «profundidad de indentación» característica de esfuerzos y deformaciones ha de ser del mismo orden de magnitud que la extensión característica de la región de contacto, D , se deriva de consideraciones dimensionales. En realidad, la ecuación de equilibrio de la teoría de elasticidad no incluye ningún término con dimensiones de longitud, y por tanto, la solución a cualquier problema de equilibrio no debe contener ningún parámetro de longitud, aparte de la que viene dada por las condiciones de contorno.

Se aplicará esta sencilla regla al ejemplo del indentador rígido. Si el diámetro del cilindro es igual a $2a$, entonces la región que se deforma mayoritariamente, y de manera uniforme en las tres direcciones, será la contenida en un volumen de dimensión $2a$. Dado que este volumen se ha comprimido en una magnitud d , se puede estimar la deformación como $\varepsilon \approx d / 2a$. Para el esfuerzo se tiene entonces que $\sigma \approx E\varepsilon \approx Ed / 2a$, y para la fuerza $F \approx \sigma (2a)^2 \approx 2Eda$; la fuerza de contacto es proporcional a la profundidad de indentación y al radio de contacto a .

En este punto, es interesante comparar el resultado de la estimación con la solución exacta para este caso (ver Capítulo 5). El resultado exacto está dado por la siguiente ecuación

$$F = 2E^* da \quad (2.22)$$

donde $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$. En el caso de materiales metálicos ($\nu \approx 1/3$), la diferencia entre la estimación y el resultado exacto es de tan solo un 10%. Por tanto, este ejemplo muestra de forma sorprendente que el método descrito se puede emplear para hacer estimaciones relativamente buenas, no solo cualitativas, sino también cuantitativas.

Según la ecuación (2.22), la profundidad de indentación es proporcional a la fuerza normal. El coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza F y el desplazamiento d se denomina *rigidez del contacto*:

$$c = 2E^* a. \quad (2.23)$$

Es importante resaltar que la rigidez es proporcional *al radio* (¡y no al área!) de contacto.

(2) Contacto entre una esfera rígida y un cuerpo elástico

Considérese ahora el contacto entre una esfera rígida de radio R y un semi-espacio elástico⁵. También en este caso se hará una estimación cualitativa; el tratamiento riguroso se muestra en el capítulo 5.

Si no existe interacción elástica entre la esfera y el plano, la expresión que relaciona la profundidad de indentación d , el radio de contacto $a \approx \sqrt{2Rd}$ y el área de contacto A es la siguiente:

$$A = \pi a^2 \approx 2\pi Rd. \quad (2.24)$$

5. Para el tratamiento es irrelevante que se trate del contacto entre una esfera elástica y una superficie rígida, o entre una esfera rígida y una superficie elástica.

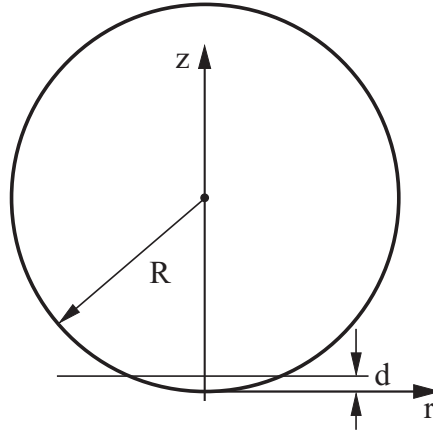


Fig. 2.8 Contacto entre una esfera rígida y un cuerpo elástico (contacto hertziano).

Según la regla de estimación que se discutió en la sección anterior, la extensión de la zona deformada es del mismo orden de magnitud que el diámetro de contacto $2a$. Por tanto, la deformación elástica en esa región puede aproximarse como $\varepsilon \approx d / 2a$, por lo que el esfuerzo sería $\sigma \approx E \frac{d}{2a}$. Para la fuerza, se tiene que $F = \sigma A \approx \frac{Ed}{2a} \pi a^2 \approx \frac{Ed}{2} \pi \sqrt{2Rd} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} Ed^{3/2} R^{1/2}$, de lo que se deduce que la fuerza es proporcional a $d^{3/2}$. Si se compara con el resultado exacto dado por la siguiente ecuación,

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}, \quad (2.25)$$

ambas expresiones se diferencian en un factor $\approx 1,5$.

Si la esfera se deformase plásticamente, entonces sería válida la expresión (2.8) entre la fuerza normal y el área de contacto

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A}. \quad (2.26)$$

Teniendo en cuenta la ecuación, se tiene que

$$F_N = 2\pi\sigma_0 R d. \quad (2.27)$$

En la región de comportamiento plástico, la fuerza es proporcional a la profundidad de indentación. El esfuerzo es, en este caso, constante e igual a la dureza del material.

(3) Contacto entre un cilindro rígido y un cuerpo elástico

A continuación se tratará el contacto entre un cilindro elástico y una superficie rígida (fig. 2.9). En el caso de una esfera, el radio de contacto se puede aproximar como $a \approx \sqrt{2Rd}$. De igual forma, la tensión o esfuerzo sería del orden de $Ed/2a$ y el área de contacto de $2La$, donde L es la longitud del cilindro. Para la fuerza se tiene que $F \approx \frac{Ed}{2a} 2La = ELd$. El resultado exacto está dado por la siguiente expresión

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d . \quad (2.28)$$

También en este caso, la solución exacta se diferencia muy poco de la dada por esta sencilla estimación. La fuerza es linealmente proporcional a la profundidad de indentación y no depende del radio del cilindro. También en este caso se puede definir la rigidez de contacto como el coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento vertical:

$$c = \frac{\pi}{4} E^* L . \quad (2.29)$$

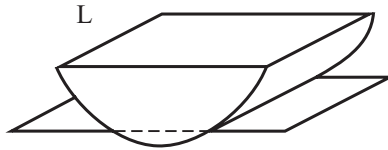


Fig. 2.9 Contacto entre un cuerpo cilíndrico y una superficie rígida.

En la región plástica se tiene

$$F_N \approx \sigma_0 2aL \approx 2^{3/2} \sigma_0 L R^{1/2} d^{1/2} . \quad (2.30)$$

(4) Contacto entre un cono rígido y un cuerpo elástico

En este caso, el radio de contacto se obtiene de la relación geométrica $a \tan \theta = d$ (fig. 2.10). La deformación se puede aproximar como $\varepsilon \approx d/2a = \frac{1}{2} \tan \theta$. La magnitud del esfuerzo promedio viene dada por la siguiente expresión

$$\sigma \approx E\varepsilon \approx \frac{1}{2} E \tan \theta , \quad (2.31)$$

la cual no depende de la profundidad de indentación. Para la fuerza normal, se obtiene la siguiente aproximación

$$F_N \approx \frac{\pi}{2} E \frac{d^2}{\tan \theta}, \quad (2.32)$$

la cual muestra que la fuerza es proporcional al cuadrado de la profundidad de indentación. El resultado exacto viene dado por⁶

$$F_N = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\tan \theta}. \quad (2.33)$$

Si la tensión obtenida a partir de la ecuación (2.31) es menor que la dureza del material, este se deformará elásticamente. En caso contrario, se puede considerar que, en principio, el material se comporta plásticamente. En este caso, la fuerza normal puede aproximarse mediante la siguiente expresión

$$F_N = \pi \sigma_0 \frac{d^2}{\tan^2 \theta}. \quad (2.34)$$

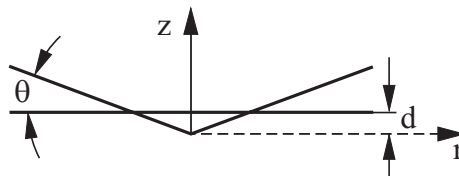


Fig. 2.10 Contacto entre un cono y una superficie.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Determinar la relación constitutiva entre la fuerza y la deformación, el módulo de elasticidad efectivo y la distribución de esfuerzos estáticos en el caso de una capa circular y delgada de un elastómero, de radio \$R\$ y espesor \$h\$, fijada a un semi-espacio por la cara superior y en contacto con otro semi-espacio por la cara inferior. Se asume que el material es incompresible.

Resolución: Para ello, se consideran dos casos:

(a) La capa no se desplaza con respecto al cuerpo inferior (fig. 2.11).

En este caso se resuelve el problema en dos pasos: primero se calcula la energía (potencial) elástica almacenada por la capa en función de la profundidad de indentación \$d\$. La derivada de esta expresión con respecto a \$d\$ dará la fuerza normal. Para calcular la energía se utilizará la siguiente expresión para el campo de desplazamientos en la capa

6. I.N. Sneddon. «The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile», *Int. J. Eng. Sci.* **3**(1), 47-57 (1965).

$$u_r(r, z) = C \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \frac{r}{R},$$

la cual cumple las condiciones de no deslizamiento, en las que $u_r = 0$ para $z = \pm h/2$. La condición de incompresibilidad se expresa como

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} u_r(R, z) dz = \frac{1}{3} \pi R C h^3,$$

de la que se tiene que $C = \frac{3Rd}{h^3}$ y

$$u_r(r, z) = \frac{3rd}{h^3} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right).$$

La mayor parte de la energía potencial es debida a la cizalla, o cortadura, que sufre la capa. La deformación cortante viene dada por

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{6d}{h^3} rz,$$

la densidad de energía por,

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon_{rz}^2 = \frac{18Gd^2 r^2 z^2}{h^6}$$

y la energía total

$$U = \frac{18Gd^2}{h^6} \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi GR^4}{4h^3} d^2.$$

La fuerza ejercida sobre el sustrato es igual a

$$F_N = \frac{dU}{dd} = \frac{3\pi GR^4}{2h^3} d.$$

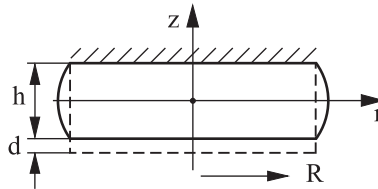


Fig. 2.11 Contacto entre una capa delgada y circular de elastómero incompresible, y una superficie rígida, a la que se agarra el elastómero.

La comparación del resultado anterior con la ecuación (2.10) permite definir un *módulo de elasticidad efectivo*: $\frac{3\pi GR^4}{2h^3} d = E_{ef} \pi R^2 \frac{d}{h}$. De ahí se tiene que

$$E_{ef} = \frac{3}{2} G \left(\frac{R}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} E \left(\frac{R}{h} \right)^2.$$

E_{ef} depende del cuadrado del cociente entre el radio de la capa y su espesor, y puede ser varios órdenes de magnitud mayor que E .

Para el esfuerzo cortante, o tensión de cizalla, se obtiene la expresión

$$\sigma_{rz}(r, z = -h/2) = G \varepsilon_{rz}(r, z = -h/2) = G \frac{3d}{h^2} r = E \frac{d}{h^2} r,$$

la cual muestra que el esfuerzo cortante aumenta linealmente con la distancia al centro de la capa y alcanza un máximo en los bordes:

$$\sigma_{rz, \max} = \frac{ERd}{h^2}.$$

En presencia de rozamiento estático, caracterizado por el coeficiente de fricción μ_s , no tendrá lugar deslizamiento en ningún punto del área de contacto siempre y cuando se cumpla que

$$\frac{\sigma_{rz, \max}}{\sigma_{zz}} = \frac{\sigma_{rz, \max} \pi R^2}{F_N} = \frac{2h}{R} \leq \mu_s.$$

(b) La capa se desliza con respecto al cuerpo inferior y sin rozamiento (fig. 2.12).

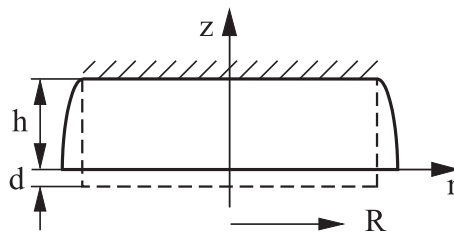


Fig. 2.12 Contacto entre una capa delgada y circular de elastómero y un plano rígido en ausencia de rozamiento.

En este caso se utilizará la ecuación

$$u_r(r, z) = C_1 (h^2 - z^2) \frac{r}{R},$$

que cumple la condición de no deslizamiento $u_r(r, h) = 0$ en el borde superior, y la condición de desplazamiento libre $\left. \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ en el borde inferior. La condición de incompresibilidad está dada por

$$d \cdot \pi R^2 = 2\pi R \int_0^h u_r(R, z) dz = \frac{4}{3} \pi R h^3 C_1,$$

De lo que $C_1 = \frac{3Rd}{4h^3}$ y

$$u_r(r, z) = \frac{3d}{4h^3} (h^2 - z^2) r.$$

La deformación de cizalla viene dada por

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{3d}{2h^3} zr,$$

la densidad de energía por

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} G \varepsilon_{rz}^2 = G \frac{9d^2}{8h^6} z^2 r^2$$

y la energía total

$$U = G \frac{9d^2}{8h^6} \int_0^R \int_0^h r^2 z^2 2\pi r dr dz = \frac{3\pi G d^2 R^4}{16h^3}.$$

La fuerza normal ejercida sobre el sustrato es igual a

$$F_N = \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{3\pi G R^4}{8h^3} d.$$

Esta es cuatro veces más pequeña que la que se obtiene en condiciones estáticas, en ausencia de desplazamiento.

Problema 2: Determinar la extensión de la región de contacto, la distribución de presiones en la misma, y la profundidad de indentación en función de la fuerza normal para un *neumático*.

Resolución: La rigidez de un neumático es debida en su mayor parte a la diferencia de presión entre su interior y la presión atmosférica. El modelo más sencillo de un neumático sería una membrana flexible, pero débilmente extensible, con forma de toroide (fig. 2.13). La diferencia de presión se mantiene en equilibrio por las fuerzas elásticas en la membrana debidas a su curvatura. En el área de

contacto, la membrana se aplana por efecto de la superficie (fig. 2.14). Las fuerzas elásticas no contribuyen por tanto a mantener del equilibrio. En cada elemento del neumático en contacto con el suelo, la diferencia de presión debe estar en equilibrio con la tensión normal ejercida por el suelo. *La tensión normal en toda la zona de contacto es constante e igual a la diferencia de presión en el neumático:*

$$\sigma_N = \Delta p = p_1 - p_0.$$

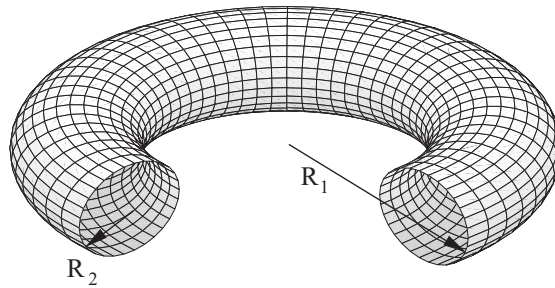


Fig. 2.13 Un neumático puede, en primera aproximación, representarse como una membrana flexible en forma de toroide, de radio interno R_2 y radio externo R_1 .

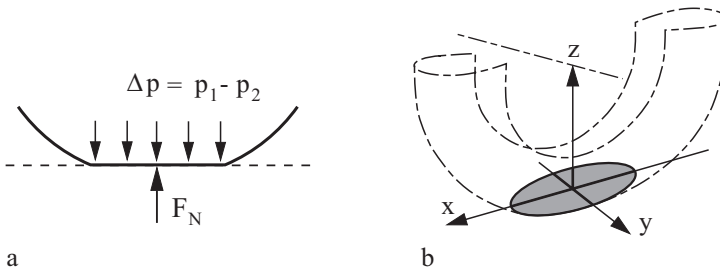


Fig. 2.14 (a) La fuerza normal en la región de contacto del neumático con el pavimento es, en primera aproximación, constante e igual a la diferencia de presión Δp ; (b) Rueda con achatamiento debido al contacto en el sistema de coordenadas empleado en el problema.

Fuera de la zona de contacto, el neumático no se deforma. Los límites de la zona de contacto se definen a través de la siguiente igualdad

$$\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} = d,$$

donde d es la profundidad de indentación. Esta ecuación describe una elipse de semiejes $a = \sqrt{2R_1d}$, $b = \sqrt{2R_2d}$ y área $A = \pi ab = 2\pi d\sqrt{R_1R_2}$. La fuerza normal resultante puede entonces expresarse como

$$F_N = \Delta p \cdot A = 2\pi\Delta p\sqrt{R_1R_2} \cdot d.$$

La fuerza es proporcional a la profundidad de la indentación, de manera análoga al caso de un muelle elástico lineal.

Problema 3: ¿Cuánto cambiaría el volumen de un neumático si este se comprimiese con una fuerza F_N sobre un plano rígido?

Resolución: Sea u_p el desplazamiento de cada punto de la superficie bajo la presión Δp , y ΔV_F el cambio de volumen del neumático bajo la acción de la fuerza normal. En este caso se hace uso del *teorema de reciprocidad de Betti*, el cual puede enunciarse de la siguiente manera: si un cuerpo elástico está sometido a dos sistemas de carga, el trabajo realizado por las fuerzas del primer sistema sobre el desplazamiento producido por el segundo, es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sistema sobre el desplazamiento producido por el primero:

$$F_N u_p = \Delta p \cdot \Delta V_F .$$

Como aproximación, se empleará la ecuación del cambio del radio interno R_2 de un contenedor elástico y hueco bajo la diferencia de presión Δp :

$$\Delta R_2 \approx R_2 \varepsilon \approx \frac{R_2}{E} \sigma \approx \frac{R_2}{E} \frac{\Delta p R_2}{h} = \frac{\Delta p R_2^2}{Eh} ,$$

donde E es el módulo de elasticidad de la membrana y h su espesor. $\sigma = \Delta p R_2 / h$ en la membrana se aproxima mediante la ecuación de Barlow para el cálculo de tensiones en tubos de pared delgada. En el caso de que el neumático esté sujeto en su interior por una llanta metálica, la deformación en la zona de contacto vendrá dada por

$$u_p \approx 2\Delta R_2 \approx \frac{2\Delta p R_2^2}{Eh} .$$

Y aplicando el teorema de reciprocidad de Betti, se obtiene el cambio en volumen

$$\Delta V_F = \frac{F_N u_p}{\Delta p} \approx \frac{2F_N R_2^2}{Eh} .$$

3. TRATAMIENTO CUALITATIVO DEL CONTACTO ADHERENTE



En el capítulo anterior se consideraron los casos de contacto bajo el supuesto de que las superficies en contacto no se «pegan», pero en la realidad, entre dos cuerpos cualesquiera, existen pequeñas fuerzas de interacción, las cuales son responsables de que dichos cuerpos se atraigan. Estas fuerzas, las cuales decaen rápidamente con la distancia de separación, se conocen como *fuerzas de adhesión o de adhesión*. Las fuerzas de adhesión juegan un papel fundamental en muchas aplicaciones técnicas, y entre aquellas figuran las responsables de la acción de los pegamentos. Otros ejemplos en los que se dan fuerzas de adhesión son las cintas adhesivas, los sobres auto-adhesivos y los sistemas de sellado.

Las fuerzas de adhesión son importantes en todas aquellas aplicaciones donde se cumplan una de las siguientes condiciones:

- (i) Las superficies de los cuerpos son muy lisas (como por ejemplo las superficies de los platos magnéticos en discos duros).
- (ii) Una de las superficies es un material muy blando (goma o material orgánico).
- (iii) El sistema es microscópico, donde las fuerzas de adhesión son por regla general más importantes que las fuerzas de volumen, dado que estas se generan a una escala muy diferente a la de las fuerzas superficiales (dispositivos micro-mecánicos, microscopio de fuerzas atómica, y estructuras biológicas, entre otros).

La adherencia juega un papel fundamental en la fricción de la goma y es por tanto un fenómeno importante y a tener en cuenta en el desarrollo de materiales para neumáticos.

En este capítulo se tratará el origen físico de las fuerzas de adherencia y se discutirán de forma cualitativa los principios básicos del cálculo en contactos adherentes.

3.1 PRINCIPIOS FÍSICOS

Dos átomos eléctricamente neutros o dos cuerpos separados por una distancia mayor a la distancia interatómica se atraen por medio de las llamadas *fuerzas de dispersión o de van der Waals*.

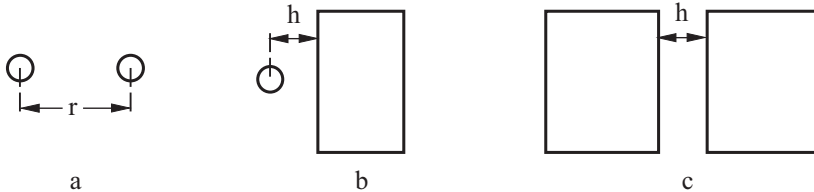


Fig. 3.1 Interacciones entre dos átomos (a), un átomo y un semi-espacio (b) y entre dos semi-espacios (c).

La interacción entre dos átomos neutros separados por una distancia r (fig. 3.1 a) puede describirse, en buena aproximación, mediante el *potencial de Lennard-Jones*: $U = \frac{C_1}{r^{12}} - \frac{C}{r^6}$. La distancia de equilibrio r_0 se calcula a partir de esta expresión como $r_0 = (2C_1 / C)^{1/6}$. Por simplicidad, se expresará este potencial según la siguiente aproximación (fig. 3.2).

$$U_{at-at} = \begin{cases} -\frac{C}{r^6}, & r \geq r_0 \\ \infty, & r < r_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Esta aproximación tiene muy poca influencia en los parámetros claves de la interacción—como la distancia de equilibrio y la energía de enlace—, y simplifica en gran medida los cálculos.

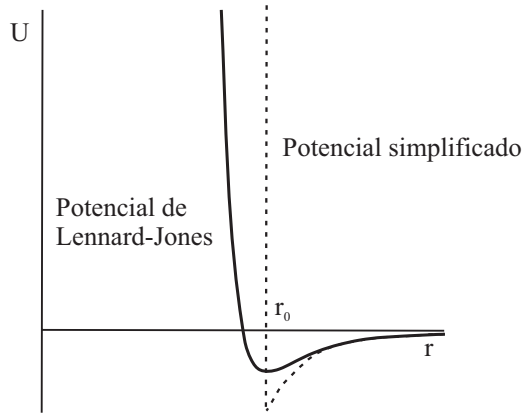


Fig. 3.2 Representación gráfica del potencial Lennard-Jones y el modelo simplificado.

Pasamos ahora a calcular la fuerza de interacción entre dos cuerpos de superficies atómicamente lisas en dos pasos. En primer lugar, se calcula la fuerza entre un átomo y un cuerpo tridimensional «relleno» de átomos iguales y en la concentración n . El átomo está separado del sólido por una distancia h (fig. 3.1 b y fig. 3.3 a)¹:

$$U_{at-sol} = -\int \frac{Cn}{R^6} dV = -Cn \int_0^\infty dz \int_0^\infty 2\pi r dr \frac{1}{((h+z)^2 + r^2)^3} = -\frac{\pi Cn}{6h^3}. \quad (3.2)$$

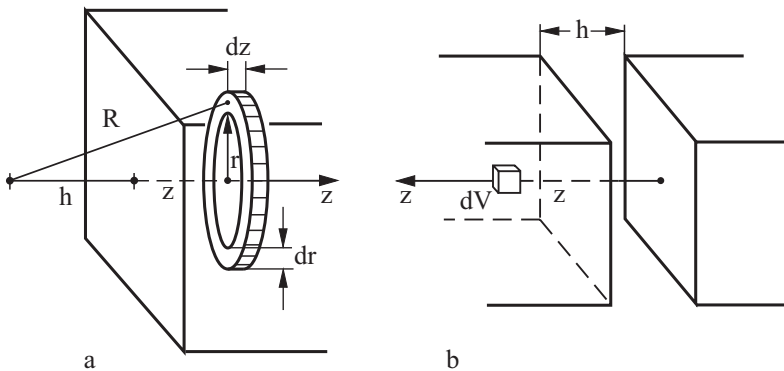


Fig. 3.3 Cálculo del potencial de interacción entre un átomo y un cuerpo tridimensional (a) y entre dos cuerpos tridimensionales separados por la distancia h (b).

1. En este cálculo no se tendrán en cuenta las interacciones entre los átomos que constituyen el cuerpo. El cálculo es por tanto correcto salvo en una constante. Más información sobre las fuerzas de van der Waals se puede encontrar en la sección 3.6.

En segundo lugar, se calcula la interacción entre dos sólidos de superficies paralelas, asumiendo que ambos cuerpos están «reellenos» de los mismos átomos. (fig. 3.1 c y fig. 3.3 b). Para ello, se integra la expresión (3.2) a lo largo de la coordenada z y se multiplica por el área de la superficie A y la concentración n . La energía de interacción por unidad de área es igual a

$$\frac{U_{sol-sol}}{A} = - \int_h^{\infty} \frac{\pi C n^2}{6z^3} dz = - \frac{\pi C n^2}{12h^2} = - \frac{Q}{h^2} \quad (3.3)$$

donde $Q = \pi C n^2 / 12$. Cuando dos cuerpos, inicialmente separados por una gran distancia, se acercan hasta alcanzar el «contacto directo» (es decir, hasta la distancia $\approx r_0$), las fuerzas de interacción realizan un trabajo, que por unidad de área es igual a

$$\frac{W}{A} = \frac{Q}{r_0^2}. \quad (3.4)$$

Para separar dos cuerpos en contacto se debe aplicar el mismo trabajo mediante fuerzas externas. Se puede decir que para «generar» dos superficies, es necesario realizar el trabajo (3.4) por unidad de área. La mitad de dicha magnitud (es decir, la energía necesaria para generar *una* superficie) se la denomina *energía de superficie o superficial* del cuerpo (también llamada *tensión superficial*) γ ²:

$$\gamma = \frac{Q}{2r_0^2}. \quad (3.5)$$

Esta expresión engloba, en esencia, las características del contacto que dependen de la adherencia. La tabla 3.1 muestra los valores típicos de energía superficial de distintos materiales y fluidos.

Se estima ahora el valor de las fuerzas de van der Waals. La fuerza de interacción entre dos sólidos de superficies atómicamente lisas y separados por una distancia h , puede obtenerse derivando la energía potencial por unidad de área con respecto a h :

$$\sigma = - \frac{1}{A} \frac{\partial U_{sol-sol}}{\partial h} = - \frac{2Q}{h^3}. \quad (3.6)$$

En el «contacto directo» (es decir, cuando $h \approx r_0$) la tensión de van der Waals es igual a

2. Hay que mencionar no obstante que, en el ámbito de la Mecánica de Contacto, es la magnitud 2γ , la energía necesaria para separar dos cuerpos, la que varios autores consideran como energía de interacción (por ejemplo, en el libro K.L. Johnson. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2001)).

$$\sigma = \frac{F}{A} = -\frac{2Q}{r_0^3} = -\frac{2}{r_0} \frac{Q}{r_0^2} = -\frac{4\gamma}{r_0}. \quad (3.7)$$

Tabla 3.1 Energías de superficie de varios sólidos y líquidos.**Energías de superficie de cristales moleculares y metales**

Material	Energía superficial γ_s (10^{-2} J/m ²)
Nylon (poliamida)	4,64
Policloruro de vinilo (PVC)	3,9
Poliestireno	3,30
Polietileno	3,0
Parafina	2,50
PTFE (Teflón)	1,83
NaCl	16
Al ₂ O ₃	64
Si	128
Al	112
Ag	144
Fe	240
W	450

Energías de superficie de líquidos

Líquido	Energía superficial γ_l (10^{-2} J/m ²)
Agua	7,31
Benceno	2,88
n-Pentano	1,60
n-Octano	2,16
n-Dodecano ($C_{12}H_{26}$)	2,54
n-Hexadecano ($C_{16}H_{34}$)	2,76
n-Octadecano $C_{18}H_{38}$	2,80

Para un valor típico de $\gamma \approx 1-2$ J/m² en metales y $r_0 \approx 4 \cdot 10^{-10}$ m, se obtiene $\sigma = 10^{10}$ N/m²: En base a este valor de tensión, una superficie de tan solo 1 cm² ¡puede llegar a soportar un peso de 100 toneladas! (mucho más de lo que muestra la fig. 3.4 a).

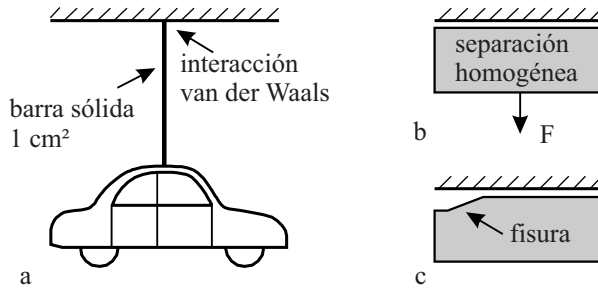


Fig. 3.4 Las fuerzas de van der Waals entre superficies atómicamente planas son mucho más grandes de lo que nuestra experiencia diaria nos hace suponer (a); en sistemas reales, estas fuerzas son mucho más pequeñas, debido a la rugosidad de las superficies y/o a la formación y propagación de fisuras.

Estas fuerzas de adhesión tan descomunales no se dan nunca en la realidad. Este resultado explica la cuestión planteada por Kendall en su libro *Molecular Adhesion and its Applications* (Kluwer Academic, 2001):

«solids are expected to adhere; the question is to explain why they do not, rather than why they do!» (N.d.T.: «se espera que todos los sólidos se adhieran, pero ¡la cuestión es explicar por qué no lo hacen, más que explicar por qué lo hacen!»)

La solución a esta paradoja sobre la adherencia reside en el hecho de que, a escala macroscópica, las uniones adhesivas no se rompen de forma homogénea (fig. 3.4 b), sino por la formación y propagación de fisuras (fig. 3.4 c), que hacen disminuir drásticamente la fuerza de adhesión. A su vez, la rugosidad de la superficie puede conducir a una disminución notable de las fuerzas de adhesión (véase la sección 3.4, donde se discute la discusión del efecto de la rugosidad en la adherencia).

3.2 CÁLCULO DE LA FUERZA DE ADHERENCIA ENTRE SUPERFICIES CURVAS

El primer cálculo de la fuerza de adherencia entre sólidos de superficies no lisas lo realizó Bradley (1932)³. Considérese una esfera rígida de radio R situada a una distancia h de un plano rígido del mismo material. Se calcula la energía de interacción entre estos cuerpos mediante una aproximación, que más adelante se utilizará para la mayor parte de los problemas de contacto: *la extensión de la zona de contacto es mucho más pequeña que el radio de curvatura de la esfera, de tal forma que el espacio comprendido entre ambos cuerpos está delimitado por dos planos paralelos entre sí* («aproximación de semi-espacio»⁴).

3. R.S. Bradley. «The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of solids». *Philos. Mag* **13**, 853-862 (1932).

4. (N.d.T.) Del inglés *half-space approximation* y del alemán *Halbraumnäherung*.

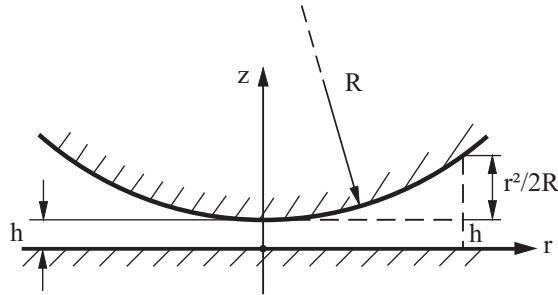


Fig. 3.5 Esquema para el cálculo de la fuerza de adhesión entre una esfera de radio R y un plano rígidos.

El potencial de interacción por unidad de superficie en función de la distancia $z = h + r^2 / 2R$ (véase la fig. 3.5) viene dado por la ecuación (3.3). Integrando sobre toda la superficie se tiene:

$$U_{\text{plano-esfera}} = - \int_0^{\infty} \frac{Q}{\left(h + r^2 / 2R\right)^2} 2\pi r dr = - \frac{2\pi RQ}{h}. \quad (3.8)$$

La fuerza de interacción se obtiene mediante la derivada de la energía potencial con respecto a la distancia h , $F = -\partial U / \partial h$:

$$F = - \frac{2\pi RQ}{h^2}. \quad (3.9)$$

Que, en contacto directo ($h \approx r_0$):

$$F_{adh} = - \frac{2\pi RQ}{r_0^2} = -4\pi\gamma R. \quad (3.10)$$

Esta expresión se diferencia en tan solo el factor $4/3$ de la ecuación de la fuerza de adhesión entre dos cuerpos elásticos deformables (véase capítulo 6).

3.3 ESTIMACIÓN CUALITATIVA DE LA FUERZA DE ADHESIÓN ENTRE DOS CUERPOS ELÁSTICOS

Se comenzará esta sección con el caso más sencillo de contacto entre una placa o pared rígida y un bloque elástico, ambos lisos (fig. 3.6 a). Debido a las fuerzas de adhesión, el bloque y la pared están «pegados», por lo que es necesario aplicar una fuerza para separarlos. Suponiendo que se quiere separar el bloque aplicando en su cara libre un esfuerzo axial de tracción σ , el bloque se alargará en la longitud d . La densidad de energía elástica almacenada por un medio elásticamente elongado es igual a $E\varepsilon^2 / 2 = \sigma^2 / 2E$, y la energía potencial total se obtiene multiplicando la densidad de energía por el volumen del bloque:

$$U_{el} = \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A, \text{ donde } A \text{ es la sección transversal del bloque.}$$

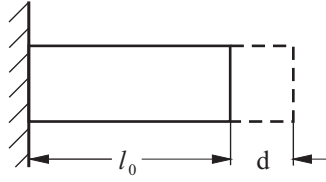


Fig. 3.6 Adherencia entre un bloque rectangular y una pared lisa.

Ahora nos preguntamos, ¿bajo qué condiciones se desprendería espontáneamente el bloque de la pared? Si esto sucediese, se formarían dos superficies, para lo que se necesitaría la energía $U_{adh} = 2\gamma A$. En un sistema físico cerrado, un proceso ocurre de manera espontánea cuando este lleva asociado una disminución de energía potencial: $U_{adh} - U_{el} = 2\gamma A - \frac{\sigma^2}{2E} l_0 A < 0$. El esfuerzo crítico, para el cual el proceso tendría lugar de manera espontánea, está dado por la expresión

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{4E\gamma}{l_0}}. \quad (3.11)$$

Dicho «esfuerzo de ruptura» aumenta con el módulo elástico E , la energía superficial γ , y con la disminución del grosor del bloque elástico. De aquí se deriva la conocida regla de uso de la mayor parte de los adhesivos y pegamentos: cuanto más fina es la capa, mejor es la unión⁵. No obstante, la rugosidad de las superficies limita la aplicabilidad de dicha regla.

Como segundo ejemplo, considérese el contacto entre una esfera rígida y un cuerpo *elástico* plano. Se supondrá que la superficie de ambos cuerpos es absolutamente lisa. Para una profundidad de indentación d , el área de contacto es del orden de $a \approx \sqrt{2Rd}$ (véase el caso análogo sin adherencia en el capítulo 2). Cuando una tensión se aplica en un área finita de extensión $2a$ en la superficie de un semi-espacio elástico, la mayor parte de la energía potencial se almacena en la región de volumen $(2a)^3$. A efectos de la estimación, se puede por tanto suponer que es el volumen indicado en la fig. 2.7 b el que experimenta la deformación.

La deformación elástica es, en consecuencia, del orden de $\varepsilon \approx d/2a$, la densidad de energía $E\varepsilon^2/2$ y la energía $U_{el} \sim \frac{E}{2}\varepsilon^2(2a)^3 = E2^{1/2}R^{1/2}d^{5/2}$. La energía superficial es igual a $U_{adh} = -2\gamma\pi a^2 = -4\pi\gamma Rd$. Por tanto, la energía total del sistema viene expresada por

$$U_{tot} \approx E2^{1/2}R^{1/2}d^{5/2} - 4\pi\gamma Rd. \quad (3.12)$$

5. Se entiende que la mayor parte de los adhesivos y pegamentos (una vez que estos curan o se endurecen) son medios elásticos con módulos de elasticidad relativamente bajos, de forma que en el cálculo de la energía elástica solo se debe tener en cuenta la energía de la capa de material adhesivo o de pegamento.

La fuerza aplicada al sistema está dada por $F \approx \frac{\partial U_{tot}}{\partial d} \approx 5E2^{-1/2} \sqrt{R}d^{3/2} - 4\pi\gamma R$.

La fuerza de adhesión es la fuerza negativa máxima aplicada sobre el cuerpo. Esta se obtiene haciendo $d = 0$ en la expresión anterior:

$$F_{adh} \approx -4\pi\gamma R. \quad (3.13)$$

Un cálculo exacto proporciona el resultado $F_{adh} = -3\pi\gamma R$ (véase el capítulo 6). Curiosamente, la fuerza de adhesión entre cuerpos elásticos tiene el mismo orden de magnitud que la que se establece entre dos cuerpos rígidos (ecuación (3.10)).

3.4 EFECTO DE LA RUGOSIDAD EN LA ADHERENCIA

El hecho de que las fuerzas de adhesión en el mundo macroscópico sean muy pequeñas y puedan despreciarse, se debe a que prácticamente todas las superficies presentan rugosidades a distintas escalas espaciales. Para discutir cualitativamente la influencia de la rugosidad, se considerará un cuerpo elástico y liso en contacto con una superficie rígida y rugosa.

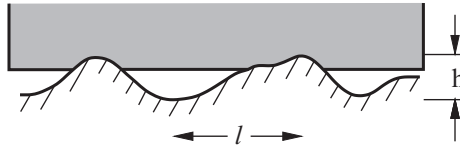


Fig. 3.7 Un medio elástico en contacto con una superficie rígida y rugosa.

Si se considera la rugosidad como una función periódica caracterizada por una longitud de onda l y una amplitud h , y si el cuerpo se deformara de tal manera que penetrara completamente en los «valles», se almacenaría una energía potencial elástica igual a $U_{el} \approx \frac{1}{2} G \varepsilon^2 l^3 \approx \frac{1}{2} G \left(\frac{h}{l} \right)^2 l^3 = \frac{1}{2} G l h^2$ ⁶. En el proceso, la energía

de superficie decrece en $U_{adh} \approx 2\gamma l^2$. Si la energía de adhesión es lo suficientemente grande como para producir la deformación antes mencionada, entonces el cuerpo se deformará de manera espontánea y se «pegará» a toda la superficie. Esto ocurre cuando $U_{el} < U_{adh}$, o

$$h^2 < \frac{4\gamma l}{G}. \quad (3.14)$$

6. Un cálculo más exacto se presenta en el problema 1 de este capítulo.

Si la rugosidad es mucho menor que la crítica, la superficie puede considerarse como absolutamente plana. Para rugosidades aún mayores, el contacto solo se produciría en unos pocos puntos y la fuerza de adhesión disminuiría notablemente. Aparte de la energía superficial γ , la rugosidad crítica también depende del módulo de cizalla G . Así, los materiales con módulos elásticos muy pequeños pueden también adherirse a superficies muy rugosas. Un ejemplo de ello es la goma, cuyo módulo de cizalla típico es aproximadamente 1 MPa⁷ y, por tanto, 5 órdenes de magnitud menor que el de sólidos «duros», como por ejemplo los metales. En cuerpos duros, la condición expresada en la ecuación (3.14) solo se cumple en el caso de que las superficies sean muy planas o estén muy pulidas. Para parámetros típicos de rugosidad, $h \approx 1 \mu\text{m}$, $l \approx 100 \mu\text{m}$ y $G = 80 \text{ GPa}$, el cociente es del orden $\frac{Gh^2}{4\gamma l} \approx 10^2 \gg 1$. Bajo estas condiciones, la fuerza de adhesión es extremadamente pequeña.

3.5 LAS CINTAS ADHESIVAS

Como ejemplo adicional de aplicación de los conceptos sobre la naturaleza física de la adherencia, se discutirán a continuación las condiciones de equilibrio en una cinta adhesiva. Para ello se parte de una membrana flexible de anchura L , adherida en parte sobre un cuerpo rígido (fig. 3.8 a) y se tira de la cinta con una fuerza F . La energía necesaria para despegar la cinta del sustrato rígido por unidad de superficie se denominará «energía superficial efectiva» y se representará como γ^* . Para calcular el ángulo con el que se ha de tirar de la cinta, de forma tal que la línea entre las zonas pegada y despegada esté en equilibrio, se considerará el segmento de la cinta de longitud l_0 comprendido entre los puntos O y A (fig. 3.8 b).

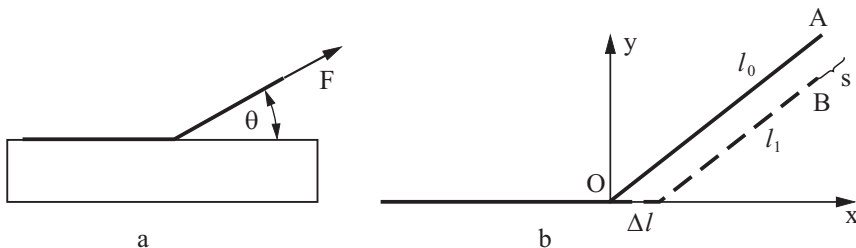


Fig. 3.8 Esquema para el cálculo de la fuerza de despegado de una cinta adhesiva.

Según el principio de trabajos virtuales, el trabajo realizado por todas las fuerzas en equilibrio cuando el sistema experimenta un desplazamiento infinitesimal

7. De la goma pura, sin aditivos.

cualquiera, ha de ser cero. Aquí se considera el desplazamiento como aquel que se produce al despegar un elemento de la cinta de longitud Δl . A raíz de este movimiento, la energía superficial aumenta en $\gamma^* L \Delta l$, y la fuerza de adhesión realiza el trabajo $-\gamma^* L \Delta l$. Al mismo tiempo se desplaza una longitud s el extremo de la cinta donde se aplica la fuerza F (punto B), y en la misma dirección que esta. El trabajo realizado por la fuerza F es igual a Fs . Por la condición de equilibrio se tiene que $Fs = \gamma^* L \Delta l$. Es fácil constatar que $s = \Delta l(1 - \cos \theta)$ y que, por tanto, $F_0(1 - \cos \theta) = \gamma^* L$. F_0 es la «fuerza de despegado» crítica. De ahí se tiene que

$$F_0 = \frac{\gamma^* L}{1 - \cos \theta}. \quad (3.15)$$

La fuerza crítica de despegado por unidad de longitud en la dirección normal a la superficie es igual a la energía superficial. Tirando en la dirección π (es decir, en sentido contrario a la orientación de la goma) la fuerza crítica se reduce a la mitad.

3.6 INFORMACIÓN ADICIONAL – FUERZAS DE VAN DER WAALS Y ENERGÍAS DE SUPERFICIE

Una teoría detallada sobre las fuerzas de van der Waals es la desarrollada por I.E. Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz und L.P. Pitaevskii (1961)⁸. Según esta teoría, las fuerzas de van der Waals dependen, en esencia, de las constantes eléctricas de los respectivos cuerpos y de la del *medio que los separa*. Si la constante de este último es más pequeña que las de ambos cuerpos, esto es $\varepsilon_m < \varepsilon_1, \varepsilon_2$, entonces los cuerpos se atraen. Si, por el contrario, la constante se encuentra comprendida entre ambos valores, ($\varepsilon_1 < \varepsilon_m < \varepsilon_2$), ¡los cuerpos se repelen! Este efecto se utiliza en la microscopía de fuerza atómica como forma de evitar la aparición de fuerzas de adhesión y las inestabilidades que de ellas se derivan.

Según la teoría antes mencionada, la fuerza van der Waals entre dos cuerpos es, *grosso modo*, proporcional al producto $\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\varepsilon_2 - \varepsilon_m)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. Si el medio intersticial es el vacío ($\varepsilon_m = 1$), entonces la fuerza es siempre positiva (los cuerpos se atraen) y proporcional a $\frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. Si en la aproximación se asume que la distancia de equilibrio es más o menos la misma para cuerpos distintos y que la mayor diferencia entre las energías superficiales se debe a la polarizabilidad y, por tanto, a la constante dieléctrica, entonces es posible enunciar una ley empírica para el cálculo de *energías de superficie relativas* o *energías interfaciales*.

8. I.E. Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. «General Theory of van der Waals' Forces». *Sov. Phys. Usp.* **4**, 153-176 (1961).

Definiendo la energía superficial relativa o energía interfacial como la energía necesaria para separar dos cuerpos en estrecho contacto a escala atómica, la energía superficial relativa para dos cuerpos idénticos es, por tanto, proporcional a $\gamma_{11} = 2\gamma_1 \propto \frac{(\varepsilon_1 - 1)^2}{2\varepsilon_1}$, si los cuerpos están constituidos por el material 1, y proporcional a $\gamma_{22} = 2\gamma_2 \propto \frac{(\varepsilon_2 - 1)^2}{2\varepsilon_2}$, si los cuerpos están constituidos por el material 2.

La energía interfacial entre los cuerpos compuestos de los materiales 1 y 2 es $\gamma_{12} \propto \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$. Por tanto, se tiene que⁹:

$$\gamma_{12} \approx \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}} = 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2} . \quad (3.16)$$

La energía interfacial se calcula aproximadamente como la media geométrica de las energías superficiales de cada uno de los cuerpos. En las expresiones (3.11), (3.13) se ha de reemplazar γ por $\gamma_{12} / 2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Sea un cuerpo elástico liso (goma) en contacto con una superficie rígida y rugosa, la cual se caracteriza por la longitud de onda l y la altura \hat{h} . La «anchura» del medio L es mucho mayor que l . Asumiendo que la rugosidad se puede modelizar como $z = \hat{h} \cos(2\pi x / l)$, calcular el cociente crítico \hat{h} / l , para el cual los «valles» quedan completamente «cubiertos» de goma. ¿Qué valor máximo puede alcanzar la rugosidad característica si $l = 100 \mu\text{m}$, y la goma se adhiere completamente a la superficie rígida? La goma pura (sin aditivos) tiene un módulo de cizalla G de aproximadamente 1 MPa; la energía superficial relativa de materiales rígidos en contacto con la goma es aproximadamente $\gamma_{12} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$.

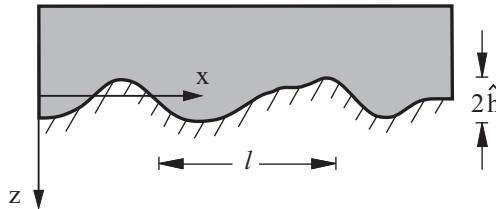


Fig. 3.9 Contacto completo entre una superficie rígida ondulada y un medio elástico (goma).

9. En este cálculo se ha reemplazado la media geométrica $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ por la media aritmética $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2$. La sustitución es lícita, ya que no compromete la exactitud del cálculo.

Resolución: Para un cuerpo linealmente elástico se cumple que, en el equilibrio,

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + (1 - 2\nu) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

La solución de esta ecuación con las condiciones de contorno $u_z(x, z = 0) = \hat{h} \cos kx$ y $\sigma_{zx}(x, z = 0) = 0$ (en ausencia de adherencia en la dirección horizontal) es la siguiente

$$u_z = \hat{h} \left(1 - \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \cos kx \cdot e^{kz},$$

$$u_x = \hat{h} \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \frac{kz}{2(1-\nu)} \right) \sin kx \cdot e^{kz},$$

donde $k = 2\pi / l$. De la relación constitutiva general para el tensor de esfuerzos se tiene que

$$\sigma_{ik} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{ll} \delta_{ik} + \frac{E}{1+\nu} u_{ik},$$

donde $u_{ik} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i)$ es el tensor de deformaciones y se aplica el convenio de suma de Einstein¹⁰. De aquí se deriva que el esfuerzo normal a la superficie es

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \frac{E \hat{h} k \cos kx}{2(1-\nu^2)}.$$

La energía potencial elástica almacenada en una región del medio de extensión l en la dirección x se calcula como

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_0^l u_z(x) \sigma_{zz}(x) L dx = \frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)}.$$

La goma se «pegará» a toda la superficie si dicha energía es menor que la energía superficial $\gamma_{12} Ll$:

$$\frac{\pi E \hat{h}^2 L}{4(1-\nu^2)} < \gamma_{12} Ll.$$

Y de ahí se infiere que la amplitud crítica de la ondulación es

$$\hat{h}_c^2 = \frac{4\gamma_{12} l (1-\nu^2)}{\pi E} = \frac{2\gamma_{12} l (1-\nu)}{\pi G}.$$

10. Los índices repetidos se suman.

(¡Comparar este resultado con el dado por la aproximación (3.14)!. Para el valor numérico dado y $\nu \approx 0.5$ se obtiene una rugosidad crítica $h_c \approx 1\mu\text{m}$.

Problema 2: Se tiene una esfera rígida de superficie ondulada ($h = \hat{h} \cos kx$). Estimar el espesor máximo t_c que ha de tener una película de oro para que esta se pegue solo mediante fuerzas de adhesión, empleando los siguientes valores: $E = 80 \text{ GPa}$, $\gamma_{12} = 2 \text{ Jm}^{-2}$ y $l = 2\pi / k = 100\mu\text{m}$, $\hat{h} = 1\mu\text{m}$. Considerar dos casos: (a) La energía elástica está determinada únicamente por la elongación o (b) por la flexión.

Resolución:

(a) Debido a una deflexión $w(x)$ en la dirección trasversal, la longitud l de una sección de la película cambia en la magnitud

$$\Delta l \approx \frac{1}{2} \int_0^l w'^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \hat{h}^2 k^2 \sin^2(kx) dx = \frac{\pi^2 \hat{h}^2}{l}.$$

Por consiguiente, se almacena la energía elástica

$$U_{el} = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{L t \pi^4 \hat{h}^4}{l^3}$$

donde L es la anchura de la película y ν el coeficiente de Poisson. La película se pega completamente cuando la energía es más pequeña que la energía de adhesión $\gamma_{12} L l$:

$$t < \frac{2\gamma_{12} l^4 (1-\nu^2)}{\pi^4 \hat{h}^4 E}.$$

Para los valores dados en el problema, $t < 46\mu\text{m}$.

(b) La energía elástica de una sección de una capa flexionada de longitud l es igual a

$$U_{el} = \frac{E t^3}{24(1-\nu^2)} L \int_0^l w''^2 dx = \frac{E t^3}{48(1-\nu^2)} L k^4 \hat{h}^2 l.$$

La película se pega completamente al sustrato, cuando esta energía es menor que la energía de adhesión $\gamma_{12} L l$:

$$t^3 < \frac{48\gamma_{12} (1-\nu^2)}{k^4 \hat{h}^2 E} = \frac{3\gamma_{12} l^4 (1-\nu^2)}{\pi^4 \hat{h}^2 E}.$$

Para los valores dados en el problema, $t_c \approx 4,1\mu\text{m}$.

La comparación entre los casos (a) y (b) muestra que la condición para que se produzca una adherencia completa con los datos de rugosidad aquí dados, está determinada mayoritariamente por la rigidez de la placa a la flexión. El valor crítico correcto para el espesor de la capa es, por tanto, $t_c \approx 4,1 \mu\text{m}$.

Problema 3: Muchos insectos disponen de mecanismos que les permiten adherirse a superficies lisas. Para describir las relaciones fundamentales de la adherencia de las extremidades de dichos insectos, se recurrirá al modelo sencillo esquematizado en la fig. 3.10 a. Determinar: la relación constitutiva entre la profundidad de indentación y la fuerza normal, el radio de contacto máximo en ausencia de fuerzas normales externas y la dependencia de la fuerza de separación con la fuerza de compresión aplicada. Datos: γ_{12} , A_0 , $k = EA_0 / l_0$, l_0

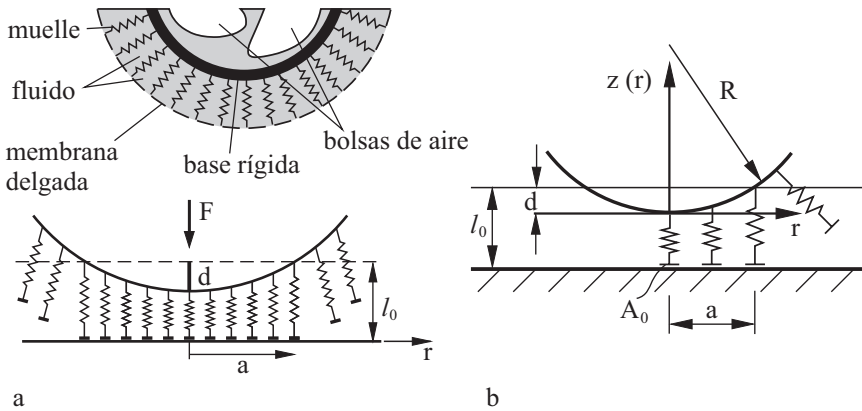


Fig. 3.10 (a) Estructura de una «almohadilla adherente» de la pata de saltamontes; (b) Esquema para el cálculo de la fuerza de adhesión.

Resolución: La longitud de todo muelle en contacto con un plano rígido se puede calcular como $l(r) = l_0 - d + r^2 / 2R$. Durante la compresión, los muelles situados en los bordes del área de contacto tienen la longitud l_0 : $l_0 - d + a^2 / 2R = l_0$. Para el radio del área de contacto se tiene que $a = \sqrt{2dR}$, y para la fuerza total de compresión

$$F_N = -\frac{k}{A_0} \int_0^a \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr = \frac{\pi k R d^2}{A_0} = \frac{\pi E R d^2}{l_0}.$$

Si la pata se presiona fuertemente y a continuación se retira con una fuerza F , el área de contacto queda determinada por la condición de que, en sus bordes, los muelles se encuentran en estado crítico. La elongación crítica se calcula a partir

de la ecuación, resultando en $\Delta l = \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}}$, y el radio de contacto a partir de la condición $l(a_{\max}) = l_0 - d + \frac{a_{\max}^2}{2R} = l_0 + \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}}$, de la que se obtiene:

$$a_{\max}^2 = 2R \left(d + \sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} \right).$$

La fuerza aplicada a la pata es igual a

$$F_A = -\frac{k}{A_0} \int_0^{a_{\max}} \left(\frac{r^2}{2R} - d \right) 2\pi r dr = -\frac{\pi k}{2A_0} a_{\max}^2 \left(\sqrt{\frac{2\gamma_{12}l_0}{E}} - d \right) = -\frac{\pi E}{l_0} R \left(\frac{2\gamma_{12}l_0}{E} - d^2 \right).$$

Al valor máximo negativo que toma esta fuerza, se le denomina *fuerza de adhesión*

$$|F_{A,\max}| = 2\pi\gamma_{12}R.$$

Un cálculo detallado para una fuerza de compresión dada, F_N , da el siguiente resultado para la fuerza de adhesión¹¹

$$F_A(F_N) = \begin{cases} F_{A,\max} & , F_N \geq F_{A,\max} \\ 2\sqrt{F_{A,\max}F_N} - F_N & , F_N < F_{A,\max} \end{cases}.$$

11. M. Schargott, V.L. Popov, S. Gorb. Spring model of biological attachment pads. *J. Theor. Biology* **243**, 48-53 (2006).

4. FUERZAS CAPILARES



Siempre que una superficie sólida interacciona con un fluido, o dos sólidos interaccionan en presencia de pequeñas cantidades de fluido, aparecen las llamadas fuerzas capilares. Dichas fuerzas son responsables tanto del mojado de los cuerpos sólidos, como de la repelencia de líquidos. En plantas, las fuerzas capilares se ocupan del transporte del agua en todos los órganos, y en sistemas de lubricación continua, se encargan del «esparcimiento» de la capa de aceite y del transporte de este a los puntos donde se produce el rozamiento. Las fuerzas capilares son una de las causas más importantes de la llamada *sticktion* de pequeños componentes en el campo de la Microtecnología, y pueden influir de manera notable en la fuerza de rozamiento, especialmente en el rozamiento estático.

4.1 TENSIÓN SUPERFICIAL Y ÁNGULOS DE CONTACTO

Las magnitudes físicas más importantes que, en distintas situaciones, pueden influir en las fuerzas capilares producidas por un fluido, son la energía superficial del fluido y el ángulo de contacto. Para aclarar el concepto de energía superficial de un fluido, imagínese una película de jabón extendida sobre un bastidor o marco rectangular de alambre en el que uno de sus lados es móvil (fig. 4.1). Si se tira de este lado, la superficie de la película se agranda, aumentando la energía superficial. Para un desplazamiento Δx , la energía crece en una magnitud $\Delta E = 2\gamma\Delta x$ (el factor 2 tiene en cuenta el hecho de que la película de jabón tiene dos caras). Según el principio de los trabajos virtuales, el cambio en la energía debe ser igual al trabajo realizado por la fuerza externa $W = F\Delta x = 2\gamma\Delta x$. De ahí se tiene que $F = 2\gamma l$. Esto significa que, en el borde de la película, actúa una fuerza por unidad de longitud $f = F/l = 2\gamma$. Dado que la película tiene dos caras, cada una está sometida a una densidad lineal de carga γ , que es igual a la energía superficial. Por consiguiente, la superficie libre de cada cara se tensa, de ahí el término «tensión superficial».

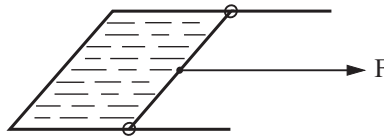


Fig. 4.1 Ilustración del concepto de tensión superficial. El experimento de la película de jabón.

Una gota de líquido que descansa sobre una superficie sólida forma, entre su propia superficie y esta última, un ángulo definido θ que, en equilibrio, depende solo de las propiedades termodinámicas del sistema (fig. 4.2). Este ángulo se denomina ángulo de contacto y determina la mayor parte de las propiedades fundamentales del contacto entre sólidos y líquidos.

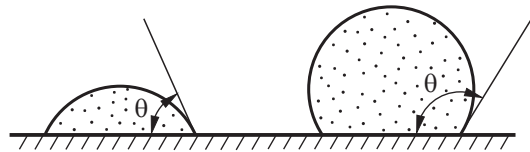


Fig. 4.2 Gotas de líquido en una superficie sólida.

En la línea de contacto alrededor de la gota, coexisten tres interfases diferentes (fig. 4.3 a). En cada interfase actúa la correspondiente tensión superficial o interfacial, de tal manera que en el equilibrio debe cumplirse que:

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta, \quad (4.1)$$

donde γ_{sv} es la energía de la interfase sólido-vapor, γ_{sl} la de la interfase sólido-líquido, y γ_{lv} la correspondiente a la interfase líquido-vapor.

Dependiendo de la relación entre las tres energías superficiales relevantes, el ángulo de contacto puede tomar cualquier valor entre 0 y π . Si este es menor que $\pi/2$, la mojabilidad es alta y se dice que el fluido *moja* la superficie sólida. Si el ángulo de contacto es mayor que $\pi/2$, la mojabilidad es baja y se habla de superficies *repelentes* al fluido. En el caso de que el líquido sea agua, las superficies para las que el ángulo de contacto sea menor que $\pi/2$ se denominan *hidrofílicas* o *hidrófilas*, mientras que aquellas para las que el ángulo de contacto sea mayor que $\pi/2$ se las denomina *hidrofóbicas* o *hidrófobas*. El hecho de diferenciar el ángulo de contacto como mayor o menor que $\pi/2$ quedará claro cuando se traten los puentes (capilares) de líquido. Para un ángulo de contacto igual a cero, se habla de mojabilidad completa. En este caso, se puede apreciar a simple vista cómo las gotas se esparcen completamente y forman una capa extremadamente fina. La mojabilidad completa se alcanza cuando se cumple la siguiente condición:

$$\gamma_{sv} - \gamma_{sl} = \gamma_{lv} \quad (4.2)$$

En el caso de que $\gamma_{lv} < \gamma_{sv} - \gamma_{sl}$ el fluido se esparce hasta alcanzar un espesor de tan solo unas pocas veces el diámetro molecular. El proceso por el que las capas finas de fluido se extienden se conoce como «reptación». La fuerza que induce tal proceso está dada por la diferencia

$$\gamma_K = \gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma_{lv} \quad (4.3)$$

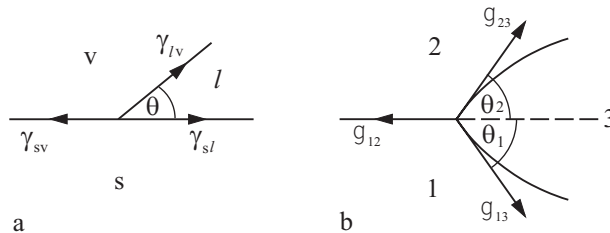


Fig. 4.3 La línea de contacto en el equilibrio: (a) entre un líquido y un sólido, (b) entre dos líquidos.

En la ecuación del equilibrio se ha considerado tan solo el equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal. La componente vertical de la tensión superficial se compensa con la fuerza de reacción, o fuerza normal, que ejerce la superficie rígida. En el caso del contacto entre dos fluidos (o entre dos sólidos en equilibrio termodinámico, es decir, tras un largo tiempo de acondicionamiento térmico) (fig. 4.3 b), han de tenerse en cuenta ambas componentes. De aquí se derivan dos ángulos de contacto característicos, los cuales pueden calcularse empleando las siguientes ecuaciones

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} \cos \theta_1 + \gamma_{23} \cos \theta_2, \quad \gamma_{13} \sin \theta_1 = \gamma_{23} \sin \theta_2. \quad (4.4)$$

Que un fluido moje o no moje completamente un sólido, depende de las energías superficiales de las tres interfases. Sin embargo se ha constatado empíricamente, que la mojabilidad puede determinarse, en principio, a través del cociente de las energías superficiales del sólido y del líquido. En el caso de que las superficies interaccionen solo mediante fuerzas de van der Waals (como en los cristales moleculares y los fluidos), entonces la tensión superficial en la interfase entre ambos medios puede estimarse a través de la siguiente expresión¹

$$\gamma_{sl} \approx \gamma_s + \gamma_l - 2\sqrt{\gamma_s \gamma_l}. \quad (4.5)$$

Hay que tener en cuenta que dicha estimación se diferencia de la obtenida para las energías superficiales entre sólidos (ecuación (3.16)), en que ambas energías superficiales tienen un origen físico distinto: en el caso de sólidos, es la energía necesaria para separar los cuerpos, mientras que en el caso de líquidos es la energía necesaria para reconstruir la superficie. La energía dada por la ecuación (4.5) desaparece en el contacto entre dos fluidos idénticos.

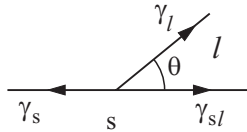


Fig. 4.4 Esquema para la estimación del ángulo de contacto en el caso de que las energías superficiales del líquido y del sólido sean conocidas.

Del equilibrio de fuerzas en la línea de contacto (véase fig. 4.4), y teniendo en cuenta la ecuación (4.5), se tiene que

$$\gamma_s = \gamma_l + \gamma_s - 2\sqrt{\gamma_l \gamma_s} + \gamma_l \cos \theta, \quad (4.6)$$

de lo cual se deriva la expresión para el ángulo de contacto

$$\cos \theta = 2\sqrt{\frac{\gamma_s}{\gamma_l}} - 1. \quad (4.7)$$

La expresión a la derecha de la igualdad toma el valor 1 (ángulo de contacto $\theta = 0$, mojabilidad completa) cuando $\gamma_s \approx \gamma_l$. El valor -1 ($\theta = \pi$, condición de no mojabilidad) nunca se alcanza. El ángulo de contacto es igual a $\pi/2$ cuando $\gamma_l \approx 4\gamma_s$. La fuerza que induce al fluido a extenderse (ecuación (4.3)),

1. F.M. Fowkes. «Dispersion Force Contributions to Surface and Interfacial Tensions, Contact Angles and Heats of Immersion». En: *Contact Angle, Wettability and Adhesion*, American Chemical Society, 99-111 (1964).

está dada por $\gamma_K = \gamma_s - \gamma_{ls} - \gamma_l = -2\gamma_l + 2\sqrt{\gamma_l\gamma_s} = 2(\sqrt{\gamma_l\gamma_s} - \gamma_l)$, y alcanza un máximo cuando $\gamma_l \approx \gamma_s / 4$.

Los aceites, con sus energías superficiales tan bajas ($\gamma_l \approx 2,1 \cdot 10^{-2}$ J/m² en el caso del aceite de silicona), mojan todas las superficies sólidas (con excepción del Teflón, véase tabla 3.1), y pueden contaminar todo un centro de producción de forma totalmente inadvertida. Que pequeñas cantidades de lubricante se esparzan, altera los diversos componentes y su funcionamiento, dado que el lubricante puede migrar de las zonas de rozamiento. Este efecto puede reducirse mediante un acabado superficial impermeabilizante. Dicho proceso permite disminuir la tensión superficial de un determinado componente mediante la aplicación de una capa que transforma la superficie sólida en repelente.

4.2 HISTÉRESIS EN LOS ÁNGULOS DE CONTACTO

Hasta ahora se ha asumido que en la línea de contacto no actúan más fuerzas que las derivadas de la tensión superficial. En el caso del contacto entre dos sólidos, pueden aparecer además fuerzas de rozamiento. La condición de equilibrio dada por la expresión (4.1) se transforma entonces en

$$\gamma_{sv} = \gamma_{sl} + \gamma_{lv} \cos \theta \pm f_R, \quad (4.8)$$

donde f_R es la fuerza de rozamiento por unidad de longitud de la línea de contacto. El signo de la fuerza de rozamiento depende de la dirección en la que se mueva la gota. Por consiguiente, el ángulo de contacto dependerá de la dirección de movimiento del fluido. A este fenómeno se le conoce como *histéresis del ángulo de contacto*. De dicha histéresis, se puede calcular la fuerza de rozamiento. Esta fuerza, de interés en numerosas aplicaciones técnicas, es responsable de que las gotas tiendan a «agarrarse» a superficies inclinadas, aun cuando estas sean macroscópicamente lisas.

La fuerza de rozamiento en la línea de contacto puede ser debida a la rugosidad de la superficie sólida, la heterogeneidad química de la misma o a la estructura atómica del sólido. Estos factores hacen que la energía superficial de una gota dependa de la posición (coordenadas) de la superficie sólida sobre la que descansa, lo cual permite el agarre de la gota.

4.3 PRESIÓN Y RADIO DE CURVATURA DE LA SUPERFICIE

Si la superficie de una gota de líquido es curva, existe una diferencia de presión entre el «exterior» y el «interior». En el caso una gota esférica (fig. 4.5 a), dicha diferencia de presión es fácil de calcular. Si a la gota se le «inyecta» una

determinada cantidad de líquido, el radio de la gota aumentará en la magnitud dR . Por consiguiente, el área de la superficie cambia según $dA = 8\pi R dR$. El trabajo producido por la diferencia de presión, $dW = (p_1 - p_2)dV = (p_1 - p_2)4\pi R^2 dR$, debe ser igual al cambio en la energía superficial $\gamma_l dA = \gamma_l 8\pi R dR$. De aquí se tiene que:

$$\Delta p = (p_1 - p_2) = \frac{2\gamma_l}{R}. \quad (4.9)$$

Si la fuerza de la gravedad se pudiera despreciar, la presión dentro de la gota sería constante en todos sus puntos. Por lo tanto, el radio de curvatura debe ser también constante y una gota adopta la forma de una esfera, por lo que sobre una superficie sólida (fig. 4.2), la gota siempre tiene forma de casquete esférico.

Para superficies no esféricas en general, se tiene que

$$\Delta p = \gamma_l \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.10)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura. Hay que tener en cuenta que empleando la ecuación (4.10), puede darse el caso de que los radios de curvatura sean también negativos. El signo del radio de curvatura se rige por la posición del centro de la curvatura, es decir, si este se encuentra en el lado positivo o en el lado negativo de la superficie. En el caso de superficies con forma de silla de montar, los radios de curvatura tienen distinto signo (fig. 4.5 c).

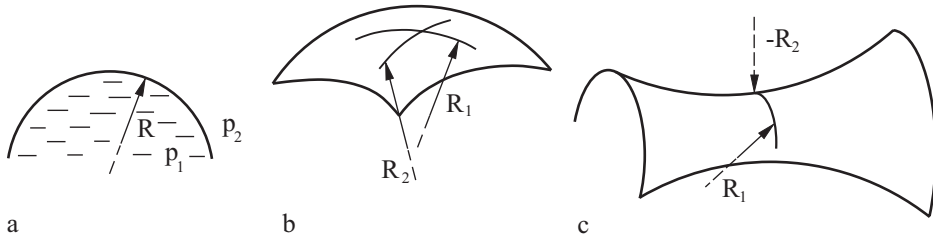


Fig. 4.5 Esquemas para el cálculo de la sobrepresión en una superficie curva.

4.4 PUENTES DE LÍQUIDO

Considérese ahora un cilindro rígido en la cercanía de una superficie sólida entre los que existe una pequeña cantidad de líquido. Por simplicidad, se supone que los «sólidos implicados» están compuestos del mismo material.

2. Identificando $\gamma_l = \gamma_{lv}$, la tensión interfacial de la interfase líquido-vapor es simplemente la tensión superficial del líquido.

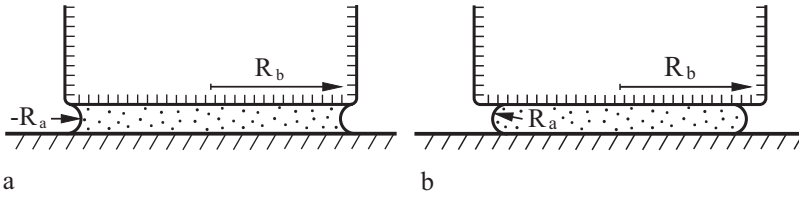


Fig. 4.6 Puentes de líquido para un ángulo de contacto (a) menor que $\pi/2$, (b) mayor que $\pi/2$.

El fluido forma en el equilibrio un ángulo de contacto característico y, por tanto, dos radios de curvatura. El radio mayor, R_b , es siempre positivo. El signo del radio menor R_a depende de si el ángulo de contacto es mayor o menor que $\pi/2$. Para ángulos de contacto pequeños, es decir, siempre que la superficie se moje, R_a es negativo. En el fluido se produce entonces una *succión* que tiene como resultado la aparición de las llamadas *fuerzas capilares*. Para que el sistema se mantenga en equilibrio, debe actuar una fuerza igual de reacción, en sentido contrario. Las fuerzas capilares se calculan como el producto de la diferencia de presión por el área del puente de líquido:

$$F_C = A\gamma_l \left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right) \approx -A\gamma_l \frac{1}{R_a}, \quad (4.11)$$

donde se asume que $|R_a| \ll |R_b|$. Si por el contrario, el líquido no moja la superficie (el ángulo de contacto es mayor que $\pi/2$), entonces los sólidos se repelen. Este fenómeno aclara el origen de la diferencia entre las superficies «que se mojan» y las «que no se mojan», o entre las superficies hidrófilas y las hidrófobas, dependiendo de si el ángulo de contacto es menor o mayor que $\pi/2$.

4.5 FUERZAS CAPILARES ENTRE UN PLANO Y UNA ESFERA RÍGIDOS

Considérese ahora un puente de líquido entre una esfera y un plano rígidos, compuestos de un material tal que el ángulo de contacto es nulo (mojabilidad completa), tal y como muestra la fig. 4.7. Sea r el radio del puente, y R el de la esfera. La altura del puente de líquido es $h \approx r^2/2R$ y su área $A = \pi r^2$. El radio menor de curvatura es, por tanto, igual a $r_0 = h/2$. Para la diferencia de presión en el fluido y en el caso de que $|r_0| \ll |r|$, se tiene que

$$\Delta p = -\frac{\gamma_l}{r_0} = -\frac{2\gamma_l}{h} = -\frac{4\gamma_l R}{r^2}. \quad (4.12)$$

Por consiguiente, la fuerza producida por capilaridad es igual a

$$F_C = A\Delta p = -\pi r^2 \frac{4\gamma_l R}{r^2} = -4\pi\gamma_l R. \quad (4.13)$$

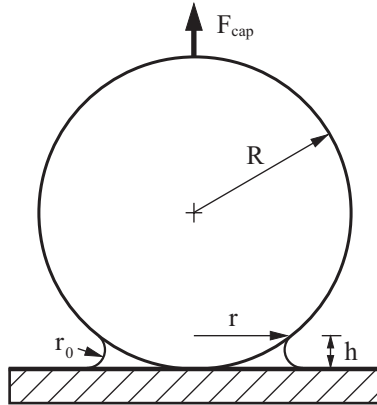


Fig. 4.7 Un puente de líquido formado por capilaridad entre un plano y una esfera rígidos.

Esta fuerza es proporcional al radio de curvatura de la esfera e independiente de la cantidad de fluido. La fuerza necesaria para separar la esfera del plano, F_{cap} , es de la misma magnitud.

4.6 FLUIDOS EN SUPERFICIES RUGOSAS

Hasta ahora se ha asumido que la superficie sólida es idealmente plana y lisa, lo cual casi nunca ocurre en la realidad. La rugosidad altera el ángulo de contacto, y esto se puede observar macroscópicamente. Dependiendo de la forma de las rugosidades, puede darse una gran variedad de casos. Si la pendiente de la aspereza es pequeña, el fluido entrará en contacto máximo con el sólido en toda la región (en la fig. 4.8, a la derecha del borde de la gota). En el caso de que no exista diferencia de presión entre la atmósfera y el líquido, la suma de los radios de curvatura en cada punto de la superficie debe ser igual a cero.

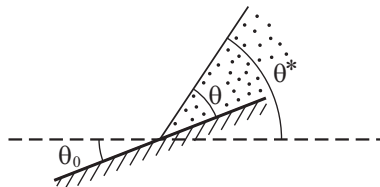


Fig. 4.8 Superficie de una fase líquida en contacto con una superficie sólida e inclinada.

La superficie es, en promedio, plana y en la vecindad de la línea de contacto, está inclinada un ángulo θ^* con respecto a la horizontal (fig. 4.8). La componente horizontal de la carga por unidad de longitud en el contacto es igual a

$$\gamma_{sv} \cos \theta_0 - \gamma_{sl} \cos \theta_0 - \gamma_{lv} \cos \theta^* . \quad (4.14)$$

Para que la línea de contacto permanezca en equilibrio, el valor medio de dicha fuerza debe ser igual a cero:

$$(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \langle \cos \theta_0 \rangle - \gamma_{lv} \cos \theta^* = 0 . \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta la expresión (4.1) se tiene que

$$\cos \theta^* = \langle \cos \theta_0 \rangle \cdot \cos \theta \quad (4.16)$$

(R.N. Wenzel, 1936). Dado que $\langle \cos \theta_0 \rangle$ es siempre menor que 1, el ángulo aparente de contacto en superficies hidrofílicas será mayor que el ángulo real de contacto, y menor en el caso de superficies hidrofóbicas. La igualdad (4.16) puede derivarse a partir de razonamientos puramente termodinámicos.

Si la pendiente de las asperezas es alta, puede darse el caso de que el fluido quede confinado en los ápices (fig. 4.9). Para una rugosidad como la mostrada en la fig. 4.9 a, esto ocurriría tan solo en fluidos con ángulos de contacto mayores que $\pi - \theta_{\max}$, donde θ_{\max} es el ángulo de la pendiente máxima en la superficie. Si además el fluido ejerciese una presión adicional, la superficie del mismo se curvaría, adentrándose aún más en los valles entre las asperezas, hasta llegar a un punto en el que el sistema dejaría de ser estable y el líquido pasaría a mojar completamente la superficie. No obstante, este proceso puede verse impedido por la presencia de aire atrapado en estos valles. Para una rugosidad como la mostrada en la fig. 4.9 c, incluso líquidos con ángulos de contacto menores que $\pi / 2$ podrían trabarse en la parte superior de las asperezas, sin llegar nunca a entrar en contacto con el resto de la superficie.



Fig. 4.9 Capas de fluido sobre superficies de distinta rugosidad.

4.7 FUERZAS CAPILARES Y TRIBOLOGÍA

En diversas situaciones, las fuerzas capilares favorecen el movimiento de fluidos. Si una gota de líquido se encuentra sobre una superficie curva, su energía

aumenta con la curvatura del sustrato. Esto implica que las gotas se puedan expeler de zonas de alta curvatura, especialmente cuando se tratan de cantos o salientes puntiagudos (fig. 4.10, véase también problema 2). Si un fluido se encuentra en un tubo capilar o en una oquedad o fisura de anchura variable, el líquido migrará por capilaridad hacia la zona más estrecha de la misma, o hacia el capilar de menor diámetro. Este efecto puede emplearse para confinar lubricantes en dispositivos mecánicos. En oquedades estrechas, las fuerzas pueden llegar a ser tan grandes que podrían permitir la lubricación continua sin necesidad de volver a lubricar. Como ejemplos se encuentran los mecanismos de relojes, los aparatos de medición, los contadores eléctricos, etc.



Fig. 4.10 Repulsión de una gota por un extremo puntiagudo.

En el caso de que se quiera dirigir el flujo de aceite hacia un cojinete, se puede aprovechar el efecto descrito y diseñar la hendidura del cojinete de tal forma que el aceite pueda encontrar el estrechamiento en la dirección al cojinete.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Calcular la energía total interfacial de una gota de líquido sobre una superficie sólida.

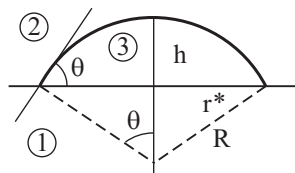


Fig. 4.11 Gota de líquido sobre una superficie sólida y plana.

Resolución: Partiendo del esquema de la fig. 4.11, se pueden derivar las siguientes expresiones para el área de la gota A , su volumen V , el ángulo de contacto θ y el «radio de contacto» r^* :

$$A = 2\pi R h, \quad V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}, \quad \cos \theta = \frac{R - h}{R}, \quad r^{*2} = 2Rh - h^2.$$

Las energías superficiales están relacionadas con el ángulo de contacto según la expresión

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}}.$$

Para las magnitudes R y h , las cuales definen por completo la geometría de la gota, se obtienen las siguientes expresiones

$$R^3 = \frac{3V}{\pi (1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta)}, \quad h = R(1 - \cos \theta).$$

Por lo tanto, para la suma de todas las energías interfaciales se obtiene la siguiente ecuación

$$E = (\gamma_{sl} - \gamma_{sv}) \pi r^{*2} + \gamma_{lv} A = \frac{3\gamma_{lv} V}{R} = \gamma_{lv} \left(9V^2 \pi (1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta) \right)^{1/3}.$$

En el caso de que la tensión superficial del líquido, γ_{lv} , sea constante, la expresión es una función monótona creciente del ángulo de contacto. En una superficie heterogénea, la gota *se expelerá de la región donde el ángulo de contacto sea mayor*.

Problema 2: Calcular la energía interfacial total de una gota de líquido sobre una superficie ligeramente curvada (radio de curvatura R_0). El ángulo de contacto es igual a $\pi / 2$ (fig. 4.12).

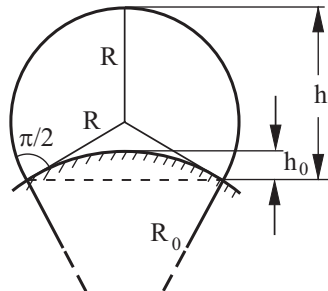


Fig. 4.12 Gota de líquido sobre una superficie curva. El ángulo de contacto es igual a $\pi / 2$.

Resolución: El ángulo de contacto es igual a $\pi/2$ cuando $\gamma_{sv} = \gamma_{sl}$. En este caso, la energía interfacial se reduce a la expresión $E = \gamma_{lv}A$. De la geometría del problema se tiene que

$$h = R + \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}}, \quad h_0 = \frac{R^2}{\sqrt{R_0^2 + R^2}} + R_0 - \sqrt{R_0^2 + R^2}.$$

El volumen de la gota $V_G = \frac{\pi}{3}(h^2(3R-h) - h_0^2(3R_0-h_0))$ y el área de su superficie $A = 2\pi Rh$ se pueden calcular en función de la curvatura $\kappa = 1/R_0$ mediante las siguientes aproximaciones lineales

$$V_G = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{3\pi R^4}{4}\kappa, \quad A = 2\pi R^2 + 2\pi R^3\kappa.$$

Para un cambio infinitesimal en el radio R y en su curvatura κ (del valor inicial $\kappa = 0$), el volumen y el área se modifican en las magnitudes:

$$dV_G = 2\pi R^2 dR + \frac{3\pi R^4}{4} d\kappa, \quad dA = 4\pi R dR + 2\pi R^3 d\kappa.$$

En el caso de volumen constante, se tiene que $dR = -\frac{3}{8}R^2 d\kappa$, y por el cambio de área se obtiene $dA = \frac{1}{2}\pi R^3 d\kappa$. La energía extra asociada al cambio de curvatura es por tanto igual a

$$\Delta E \approx \frac{\pi\gamma_{lv}R^3}{2R_0} = \frac{3V_G\gamma_{lv}}{4R_0}.$$

La energía interfacial aumenta con la curvatura del sustrato. Es por ello que la gota se expelerá de la región con mayor curvatura.

Problema 3: Calcular las fuerzas capilares entre una superficie curva con radios de curvatura gaussianas R_1 y R_2 , y un plano. Se asume que las superficies de ambos cuerpos se mojan completamente.

Resolución: Dado que la presión negativa en un fluido es constante en todos sus puntos, lo mismo ha de ocurrir con el radio de curvatura del puente de líquido y su altura $h = 2r_0$. La forma de la región de contacto se define mediante la condición

$$\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} = h.$$

Los semiejes de dicha elipse son $\sqrt{2R_1h}$ y $\sqrt{2R_2h}$, y su área $A = 2\pi h\sqrt{R_1R_2}$. Por tanto, las fuerzas capilares se calculan mediante la expresión

$$|F| = \frac{\gamma}{r_0} A = 4\pi\gamma\sqrt{R_1R_2}.$$

Problema 4: Calcular las fuerzas capilares entre una esfera y un plano. Los ángulos de contacto son θ_1 y θ_2 .

Resultado: $F = 2\pi R\gamma(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$.

Problema 5: Calcular la sobrepresión necesaria para hacer penetrar un líquido a través de una rejilla de barras de sección circular y paralelas entre sí (fig. 4.13). La distancia entre las barras es igual a L .

Resolución: Si la sobrepresión es igual a Δp , entonces se genera una superficie curvada, cuyo radio de curvatura R viene dado por (fig. 4.13):

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta p}{\gamma_{lv}}.$$

En este caso, el ángulo entre la superficie de las barras y el líquido ha de ser igual al ángulo de contacto, θ . Conforme se va aumentando la sobrepresión, el líquido seguirá avanzando a través de las barras, hasta que se alcanza un estado crítico. Para ángulos de contacto $\theta \leq \pi/2$, dicho estado se alcanza cuando los frentes del líquido que avanzan por ambos lados de la barra, se encuentran (figs. 4.14 a, b). Para ángulos de contacto $\theta > \pi/2$, el estado crítico se alcanza antes. En el caso de mojabilidad completa, $\theta = \pi$, el estado crítico se muestra en la fig. 4.14 c.



Fig. 4.13 Líquido sobre una rejilla constituida por barras rectas.

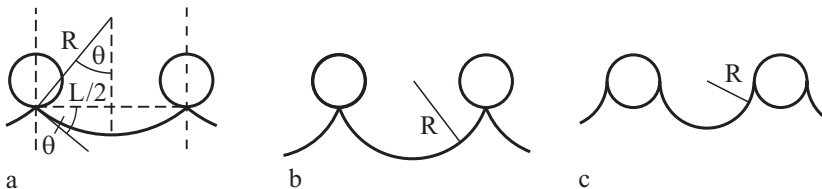


Fig. 4.14 Configuración crítica para (a) $\theta < \pi/2$, (b) $\theta \approx \pi/2$, (c) $\theta \approx \pi$.

En el caso de superficies que se dejan mojar ($\theta < \pi / 2$) se tiene que, en el estado crítico representado en la fig. 4.14 a, $\frac{1}{R} = \frac{2}{L} \text{sen } \theta$. Para la sobrepresión máxima, se obtiene

$$\Delta p = \frac{2}{L} \gamma_{lv} \text{sen } \theta.$$

Esta alcanza un máximo en el caso de barras con $\theta = \pi / 2$, siendo igual a

$$\Delta p_{\max} = \frac{2}{L} \gamma_{lv}.$$

Problema 6: Una aguja cilíndrica (masa m , longitud L) descansa sobre la superficie del agua (fig. 4.15). Calcular el grado de hundimiento de la aguja y el peso máximo que la superficie puede soportar, asumiendo que la inclinación de la misma es pequeña en todos los puntos.



Fig. 4.15 Una aguja flotando sobre la superficie del agua.

Resolución: Para resolver el problema, se hará uso del esquema de la fig. 4.16. La diferencia de presión en el punto de la superficie (x, z) puede calcularse, bien mediante la expresión (4.10), o bien como diferencia de la presión hidrostática con la profundidad z :

$$\Delta p = \gamma_{lv} / R = \gamma_{lv} z'' = \rho g z.$$

La solución $z(x)$ de esta ecuación diferencial, bajo la condición inicial $z \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$, es:

$$z = A \exp \left(- \left(\frac{\rho g}{\gamma_{lv}} \right)^{1/2} x \right).$$

El volumen de agua desplazado es igual a

$$V = 2L \int_0^{\infty} z(x) dx = 2AL \left(\frac{\gamma_{lv}}{\rho g} \right)^{1/2}.$$

En el equilibrio y por el principio de Arquímedes, el peso es igual al empuje, por lo que $\rho V = m$. Para el grado de hundimiento $z(0)$ se tiene que

$$z(0) = A = \frac{m}{2L} \left(\frac{g}{\rho \gamma_{lv}} \right)^{1/2}.$$

El ángulo de inclinación de la superficie en $x = 0$ viene dado por

$$\tan \varphi = \frac{mg}{2L\gamma_{lv}}.$$

Geoméricamente es fácil darse cuenta de que el ángulo de contacto θ no puede ser menor que φ . Por tanto, el peso máximo que puede soportar la superficie puede calcularse como

$$mg = 2L\gamma_{lv} \tan \theta.$$

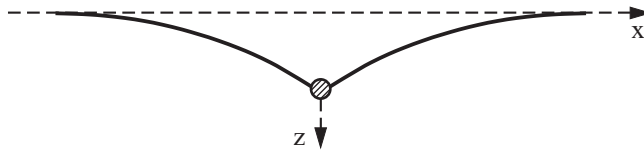
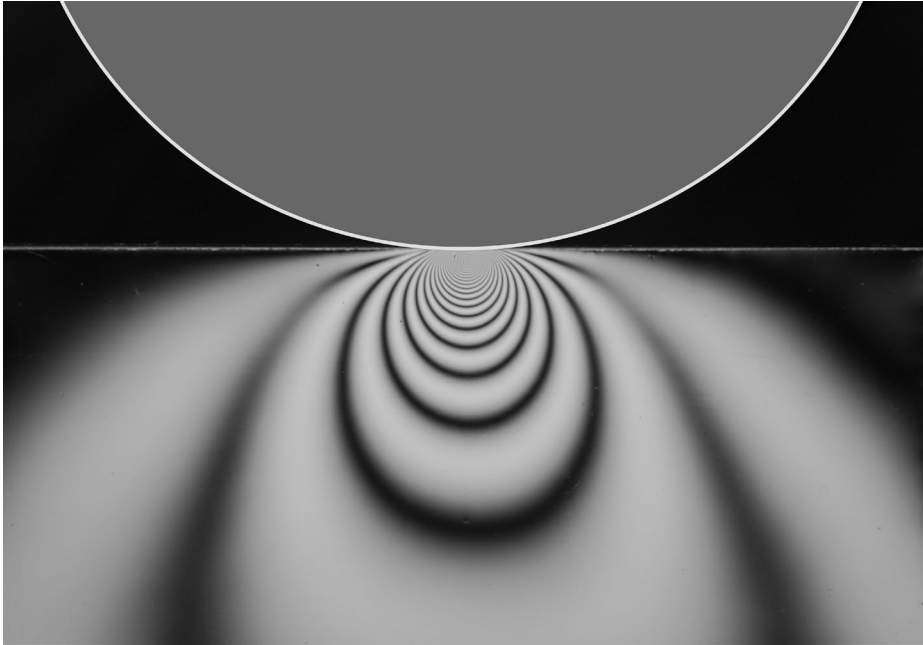


Fig. 4.16 Una aguja o alfiler cilíndrico sobre una superficie acuosa.

5. TRATAMIENTO RIGUROSO DEL CONTACTO – EL CONTACTO HERTZIANO



En este capítulo, se explicarán diversos métodos para la resolución exacta de problemas de contacto dentro del marco de «la aproximación de semi-espacio». Entre ellos, se tratará con detalle el caso clásico del contacto normal entre una esfera rígida y un semi-espacio elástico, al cual se suele recurrir en el análisis de modelos más complejos.

Como paso preliminar, se resaltarán aquellos resultados de la Teoría de la Elasticidad, con aplicación inmediata en la Mecánica del Contacto, considerando las deformaciones que tienen lugar en un semi-espacio elástico por efecto de una serie de esfuerzos o tensiones definidos de antemano. El cálculo de las deformaciones en un cuerpo elástico bajo la acción de fuerzas superficiales (el llamado «problema directo de la Teoría de la Elasticidad»), es una tarea mucho más sencilla que la de encontrar la solución de casos reales de contacto, ya que en estos ni la distribución de esfuerzos ni la región de contacto se conocen de antemano. La solución clásica de Hertz para el contacto no adhesivo, y la de Johnson, Kendall y Roberts para el contacto adhesivo, utilizan las soluciones conocidas de los «problemas directos» como puntos de partida en la construcción de la solución para un caso de contacto real dado.

5.1 DEFORMACIÓN DE UN SEMI-ESPACIO ELÁSTICO BAJO LA ACCIÓN DE FUERZAS SUPERFICIALES

Considérese un medio elástico tal que ocupa un semi-espacio infinito, el cual está limitado por un plano de extensión infinita. Bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre la superficie libre del medio, este se deforma. Se define el plano xy como el de la superficie libre del medio, y el eje z positivo en la dirección del espacio ocupado por el medio. La deformación en todo el semi-espacio puede calcularse de forma analítica, y puede encontrarse en los libros de texto dedicados a la Teoría de Elasticidad¹. Aquí se presentan las fórmulas que describen el desplazamiento bajo la acción de una fuerza aplicada en la dirección z , y que actúa sobre el origen de coordenadas.

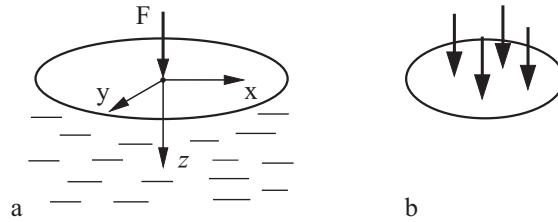


Fig. 5.1 (a) Una fuerza actuando sobre la superficie de un semi-espacio elástico; (b) Un sistema de fuerzas aplicado a la superficie.

Los desplazamientos producidos por esta fuerza se calculan a partir de las siguientes ecuaciones:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (5.1)$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (5.2)$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z, \quad (5.3)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

El desplazamiento de la superficie del medio se obtiene haciendo $z = 0$:

1. Véase por ejemplo: L.D. Landau, E.M. Lifschitz. Teoría de la Elasticidad, Curso de Física Teórica, volumen 7, Editorial Reverté (2009), capítulos 8 y 9.

$$u_x = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} F_z, \quad (5.4)$$

$$u_y = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} F_z, \quad (5.5)$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} F_z, \quad (5.6)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

En el caso de varias fuerzas actuando simultáneamente (fig. 5.1 b), se obtienen deformaciones que se pueden expresar como suma de las correspondientes a cada fuerza.

De ahora en adelante, se trabajará en el ámbito de la *aproximación de semi-espacio*, la cual asume que el grado de inclinación de las superficies en la región de contacto y en sus proximidades es mucho menor que 1 y, por tanto, las superficies pueden considerarse, en primera aproximación, «horizontales». Si bien es necesario ceñirse exactamente a las condiciones de contacto para cada superficie, las relaciones entre las fuerzas superficiales y los desplazamientos pueden considerarse idénticas a las que se establecen en un semi-espacio elástico.

En los casos de contacto *sin rozamiento*, y dentro de la aproximación de semi-espacio, solo la proyección del desplazamiento sobre el eje z , dada por la ecuación (5.6), es de interés. En particular, dada una distribución continua de presiones normales, $p(x, y)$, el desplazamiento de la superficie se calcula mediante

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint p(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (5.7)$$

donde

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \quad (5.8)$$

Antes de adentrarse en el tratamiento de los diferentes casos de contacto, se van a resolver dos ejemplos de apoyo. Para ello, se supone que en una región circular de radio a se genera una distribución de presiones de la forma $p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^n$. Se busca una expresión para el desplazamiento vertical de los puntos de la superficie dentro de la región circular.

a. Desplazamiento normal homogéneo ($n = -1/2$).

El sistema de coordenadas a utilizar se muestra en la fig. 5.1 a. El esfuerzo normal se distribuye de acuerdo a la expresión

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} . \quad (5.9)$$

Para el desplazamiento vertical se tiene que:

$$u_z = \frac{\pi p_0 a}{E^*} , \quad r \leq a . \quad (5.10)$$

(En el apéndice A se encuentra la deducción de la expresión en detalle). El desplazamiento vertical es igual en todos los puntos de la región de contacto. De este resultado se deduce inmediatamente la forma de la distribución de presiones de partida, la cual coincide con la generada en la impresión de una barra cilíndrica. La carga total ejercida en la zona presionada es igual a

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2 . \quad (5.11)$$

La rigidez del contacto se define como el cociente entre la carga y el desplazamiento:

$$c = 2aE^* , \quad (5.12)$$

la cual, si se escribe en la forma

$$c = 2E^* \beta \sqrt{\frac{A}{\pi}} , \quad (5.13)$$

donde A es el área de contacto del cilindro rígido, se aprecia que la expresión (5.12) es también válida para indentadores de sección no circular. La constante β tiene siempre un orden de magnitud cercano a 1:

Sección circular:	$\beta=1,000$	
Sección triangular:	$\beta=1,034$	(5.14)
Sección cuadrada:	$\beta=1,012$	

b. Distribución hertziana de presiones ($n = 1/2$).

Para una distribución de presiones de la forma

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} , \quad (5.15)$$

se tiene el siguiente desplazamiento vertical (Apéndice A)

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2). \quad (5.16)$$

Y para la carga total,

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2. \quad (5.17)$$

El desplazamiento de la superficie dentro y fuera de la zona presionada se muestra en la fig. 5.2.

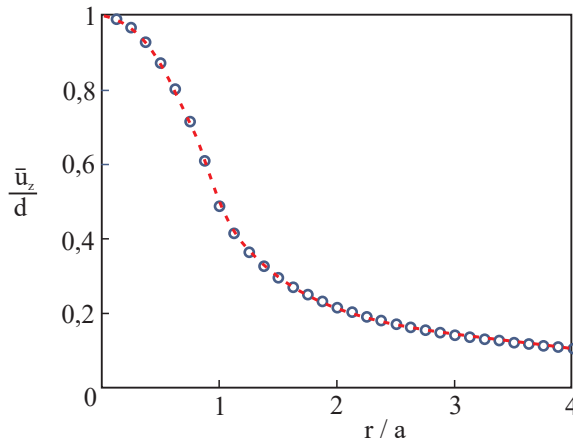


Fig. 5.2 Desplazamiento de la superficie u_z , generado por la distribución de presiones según la expresión (5.15); $d = u_z(0)$ es la profundidad de indentación.

5.2 LA TEORÍA DEL CONTACTO HERTZIANO

En la fig. 5.3 se muestra el esquema de un contacto entre una esfera rígida y un semi-espacio elástico. El desplazamiento que experimentan los puntos de la superficie en la región de contacto entre una superficie inicialmente plana y la esfera rígida de radio R es igual a

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (5.18)$$

En la expresión (5.16) se ha visto que una distribución de presión de la forma dada por (5.15), genera una distribución cuadrática de desplazamientos verticales.

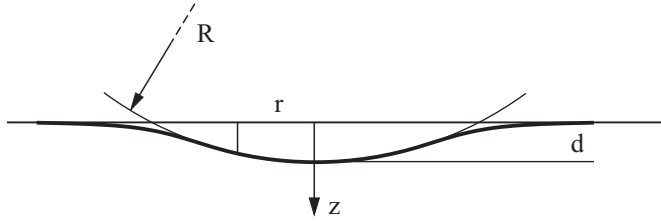


Fig. 5.3 Una esfera rígida en contacto con un semi-espacio elástico.

Se eligen los parámetros a y p_0 de forma tal que la distribución de presiones genere exactamente los desplazamientos dados por la expresión (5.18):

$$\frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (5.19)$$

Así pues, a y d deben cumplir las siguientes condiciones:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*}, \quad d = \frac{\pi a p_0}{2E^*}. \quad (5.20)$$

De estas se obtiene, para el radio de contacto,

$$a^2 = Rd \quad (5.21)$$

y para la presión máxima,

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2}. \quad (5.22)$$

Sustituyendo (5.21) y (5.22) en (5.17), se obtiene la siguiente expresión para la fuerza normal

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}. \quad (5.23)$$

Mediante las expresiones (5.22) y (5.23), se puede calcular la presión en el centro de la región de contacto, así como el radio de contacto, en función de la fuerza normal:

$$p_0 = \left(\frac{6FE^*}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (5.24)$$

Además, se puede determinar la expresión de la energía potencial U de la deformación elástica. Dado que $-F = -\partial U / \partial d$, se obtiene para U

$$U = \frac{8}{15} E^* R^{1/2} d^{5/2}. \quad (5.25)$$

5.3 EL CONTACTO ENTRE DOS CUERPOS ELÁSTICOS DE SUPERFICIES CURVAS

Los resultados de la teoría hertziana, dados por las expresiones (5.21), (5.22) y (5.23) pueden emplearse, con pequeñas modificaciones, en los siguientes casos:

(A) Ambos cuerpos son elásticos, en cuyo caso se debe utilizar la siguiente expresión para E^*

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (5.26)$$

donde E_1 y E_2 son los módulos elásticos, y ν_1 y ν_2 los coeficientes de Poisson de ambos cuerpos.

(B) Dos esferas de radios R_1 y R_2 entran en contacto (fig. 5.4 a), en cuyo caso se pueden aplicar las ecuaciones (5.21), (5.22) y (5.23), con R igual a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5.27)$$

Esta expresión es también válida cuando uno de los radios es negativo (fig. 5.4 b). El radio de curvatura es negativo, cuando el centro de curvatura se encuentra fuera del medio.

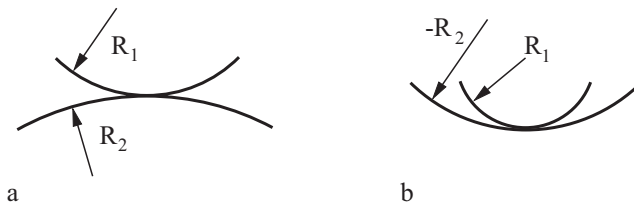


Fig. 5.4 Contacto entre dos cuerpos con superficies curvas.

(C) En el caso del contacto entre un semi-espacio elástico y un cuerpo rígido con radios principales de curvatura, R_1 y R_2 (fig. 5.5 a), la región de contacto tiene forma elíptica. Para los semi-ejes se tiene que

$$a = \sqrt{R_1 d}, \quad b = \sqrt{R_2 d}. \quad (5.28)$$

Y, por consiguiente, el área de contacto se calcula según²

$$A = \pi ab = \pi \tilde{R}d, \quad (5.29)$$

donde

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (5.30)$$

es el *radio de curvatura gaussiano* efectivo de la superficie. Esta magnitud ha de utilizarse también en las otras igualdades hertzianas en lugar de R^3 .

La distribución de presiones viene dada por

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (5.31)$$

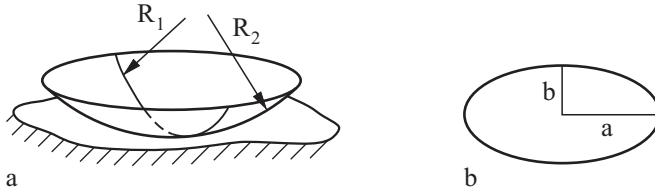


Fig. 5.5 Un cuerpo de superficie curva (radios principales de curvatura R_1 y R_2) en contacto con un semi-espacio elástico.

(D) En el caso de que el contacto se produzca entre dos cilindros elásticos de radios R_1 y R_2 , que descansan sobre sus respectivos ejes y estos se encuentran orientados perpendicularmente el uno respecto del otro (fig. 5.6 a), la distancia entre las superficies de ambos cuerpos vendrá inicialmente dada (es decir, antes de que se produzca deformación alguna), por

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (5.32)$$

Esta situación corresponde exactamente al caso (C) de un elipsoide con los radios de curvatura R_1 y R_2 . En consecuencia, las relaciones de la teoría hertziana son válidas con

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (5.33)$$

-
2. Las igualdades son solo aproximaciones. Sin embargo, las expresadas en (5.29) y (5.30) pueden llegar a ser muy exactas, siempre y cuando el cociente a/b no se aleje demasiado de 1.
 3. Las relaciones hertzianas son tanto más exactas cuanto más cercano se halle el cociente R_1 / R_2 de 1. No obstante, para $R_1 / R_2 = 10$, la igualdad es exacta en un 2,5%.

En el caso de radios iguales, $R = R_1 = R_2$ el contacto entre dos cilindros es equivalente al de una esfera de radio R en contacto con un semi-espacio elástico delimitado por un plano.

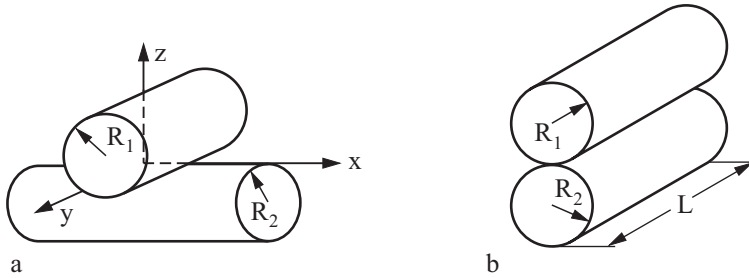


Fig. 5.6 (a) Dos cilindros cruzados en contacto; (b) Dos cilindros en contacto con los ejes paralelos entre sí.

(E) En el caso del contacto entre dos cilindros con ejes paralelos entre sí (fig. 5.6 b), la fuerza es, de manera aproximada, directamente proporcional a la profundidad de indentación (lo que ya se vio en el capítulo 2)⁴:

$$F \approx \frac{\pi}{4} E^* L d \quad (5.34)$$

La definición exacta de la profundidad de indentación, así como la forma que adopta la expresión entre esta y la carga, dependen del tamaño y la forma del cuerpo en su conjunto. Sin embargo, esta dependencia (logarítmica) es débil, y por consiguiente, la expresión (5.34) puede emplearse como aproximación *grosso modo*. Es interesante destacar que, en la expresión (5.34), no aparece el radio de curvatura. La semi-anchura de la región de contacto viene dada por

$$a \approx \sqrt{Rd}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (5.35)$$

como en el caso de contacto entre dos esferas, y la distribución de presiones viene dada por

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}. \quad (5.36)$$

La presión máxima es igual a

4. Aquí hay que tener en cuenta que, debido a la divergencia logarítmica en el campo de desplazamientos, la profundidad de indentación en este tipo de *contacto con forma de línea* no está definida.

$$p_0 = \frac{2F}{\pi La} \approx \left(\frac{E^* F}{\pi LR} \right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

5.4 EL CONTACTO ENTRE UN INDENTADOR CÓNICO RÍGIDO Y EL SEMI-ESPACIO ELÁSTICO

Cuando en un semi-espacio elástico se aplica una carga de compresión mediante un cono rígido (fig. 5.7 a), la profundidad de indentación y el radio de contacto están relacionados por la siguiente expresión⁵

$$d = \frac{\pi}{2} a \tan \theta. \quad (5.38)$$

La distribución de presiones adquiere la forma

$$p(r) = -\frac{Ed}{\pi a(1-\nu^2)} \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 1} \right). \quad (5.39)$$

La tensión o esfuerzo presenta una singularidad logarítmica en el vértice del cono (el centro de la región de contacto, fig. 5.7 b). La fuerza total se calcula según

$$F_N = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\tan \theta}. \quad (5.40)$$

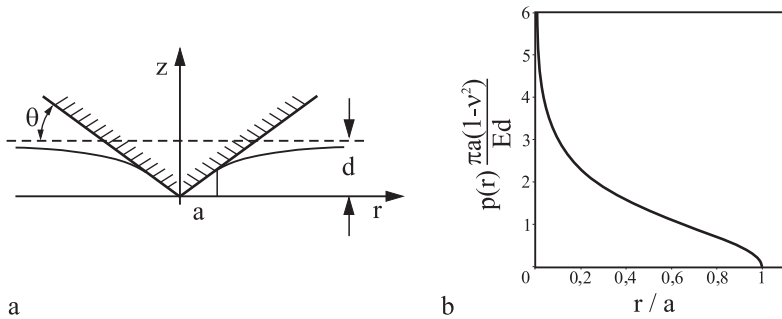


Fig. 5.7 (a) Contacto entre un indentador cónico rígido y un semi-espacio elástico; (b) Distribución de presiones en el contacto normal entre un indentador cónico rígido y el semi-espacio elástico.

⁵ La deducción de dicha expresión se detalla en el problema 7 de este capítulo.

5.5 TENSIONES INTERNAS EN EL CONTACTO HERTZIANO

Las tensiones, o esfuerzos, que resultan de la acción de una única fuerza vertical F aplicada en el origen de coordenadas, vienen determinadas por⁶

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{x^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \quad (5.41)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{y^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{y^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \quad (5.42)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{r^5}, \quad (5.43)$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{xyz}{r^5} + (1-2\nu) \frac{xy(2r+z)}{r^3 (r+z)^2} \right], \quad (5.44)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{r^5}, \quad (5.45)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{r^5}. \quad (5.46)$$

El cálculo de los esfuerzos, en el caso de que se aplique una distribución cualquiera de presiones normales es a la superficie, p , se realiza mediante el principio de superposición. A modo de ejemplo, el esfuerzo normal σ_{zz} en la dirección z viene dado por,

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\frac{3z^3}{2\pi} \iint_{(A)} \frac{p(x', y')}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right)^{5/2}} dx' dy', \quad (5.47)$$

donde $\iint_{(A)}$ indica la integración sobre el área donde actúa la presión.

En el caso de la distribución de presiones hertziana (5.15), se muestran algunos resultados a continuación. La fig. 5.8 muestra los esfuerzos a lo largo del

6. H.G. Hahn. *Elastizitätstheorie*. Teubner, Stuttgart (1985).

eje z para $\nu = 0,33$. Todos los esfuerzos cortantes son 0; para todos los puntos sobre el eje z , los ejes de coordenadas coinciden con los ejes principales. La solución analítica para las componentes del tensor de esfuerzos es⁷

$$\sigma_{zz} = -p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1}, \tag{5.48}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p_0 \left[(1 + \nu) \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \right]. \tag{5.49}$$

El esfuerzo cortante máximo $\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|$ se muestra en la misma figura. El resultado muestra que el esfuerzo cortante máximo se halla en el interior; $z \approx 0,49a$, en el caso de $\nu = 0,33$. La fig. 5.9 muestra la tensión de Von Mises en el plano $x-z$

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{1/2} \tag{5.50}$$

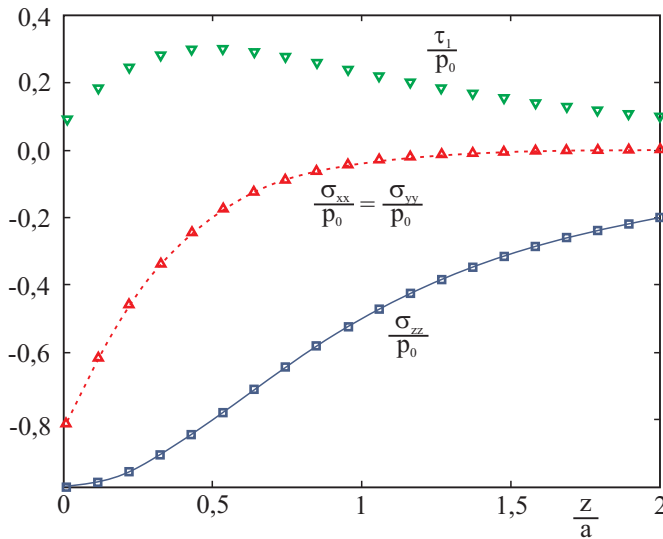


Fig. 5.8 Esfuerzos a lo largo del eje z ($x = y = 0$) para una distribución hertziana de presiones.

7. K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).

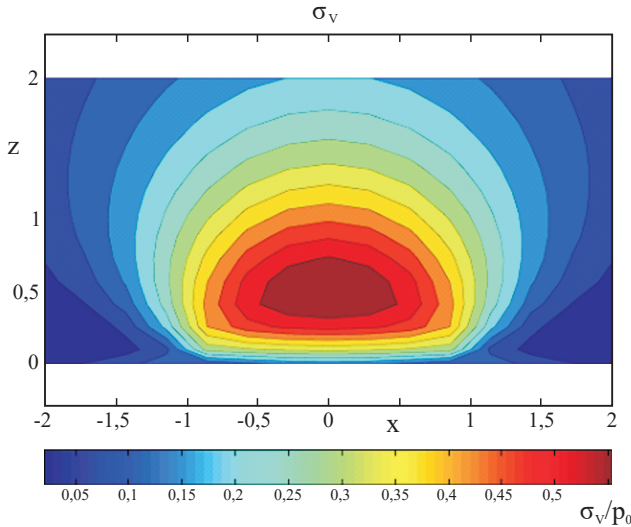


Fig. 5.9 Tensión de von Mises σ_v según la expresión (5.50) para una distribución hertziana de presiones (plano xz).

5.6 MÉTODO DE REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN (MRD)

El caso del contacto entre cuerpos con forma arbitraria y simetría axial puede resolverse de manera sencilla y elegante mediante el llamado *método de reducción de dimensión* (MRD)⁸. El MRD construye contactos tridimensionales a partir de los dados por una fila de muelles independientes y dispuestos en paralelo (modelo Winkler), lo cual simplifica cualitativamente tanto el tratamiento analítico como el numérico de los problemas de contacto. A pesar de su simplicidad, todos los resultados correspondientes a casos de contacto con simetría axial son *exactos*. Mediante el MRD se pueden investigar los contactos tanto adherentes como no adherentes, los contactos tangenciales, así como los contactos con medios viscoelásticos. En esta sección, se describirá la aplicación del MRD en el tratamiento de los casos de contacto normal, y en capítulos sucesivos, las generalizaciones para otros tipos de problemas. La corrección en las ecuaciones básicas del MRD se demuestra en el apéndice B.

El MRD consiste fundamentalmente en dos pasos sencillos: (a) Sustitución del continuo tridimensional por una construcción o cimentación unidimensional tipo Winkler bien definida, y (b) conversión de la forma tridimensional a la

8. V.L. Popov, M. Heß, *Method of Dimensionality Reduction in Contact Mechanics and Friction*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2015).

unidimensional mediante la transformación MRD. Todo problema de contacto se considerará resuelto siempre que se lleven a cabo estos dos pasos.

Pasos preparatorios y básicos del MRD

Considérese el contacto entre dos cuerpos elásticos con módulos de elasticidad E_1 y E_2 y coeficientes de Poisson ν_1 y ν_2 . Se denotará la diferencia en el perfil entre ambos cuerpos como $z = f(r)$. En el marco del MRD, se realizan *dos* pasos independientes:

I. En primer lugar, los cuerpos elásticos (o viscoelásticos) tridimensionales se sustituyen por una cimentación unidimensional según el modelo de Winkler. Por tal se entiende una distribución lineal de elementos con grados de libertad independientes entre sí y separados por una distancia Δx suficientemente pequeña.

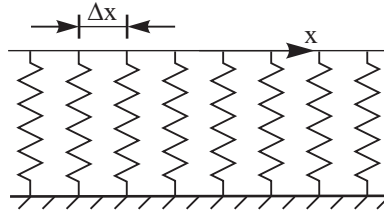


Fig. 5.10 Cimentación unidimensional elástica.

En el caso más sencillo de contacto elástico, tal modelo consta de muelles linealmente elásticos, caracterizados por una rigidez axial Δk_z (fig. 5.10):

$$\Delta k_z = E^* \Delta x, \quad (5.51)$$

donde E^* viene dado por la ecuación (5.26).

II. En segundo lugar, el perfil tridimensional $z = f(r)$ (fig. 5.11, izquierda) se transforma en un perfil unidimensional (fig. 5.11, derecha) mediante la expresión

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr. \quad (5.52)$$

La transformación inversa es

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx. \quad (5.53)$$

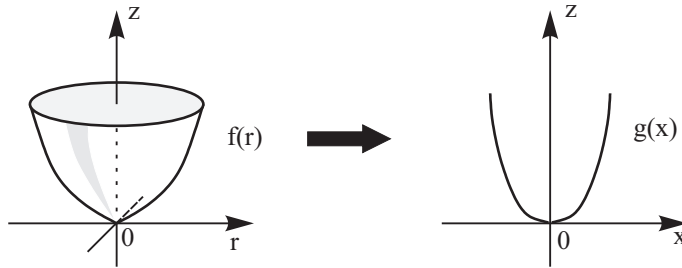


Fig. 5.11 En el marco del MRD, el perfil tridimensional se transforma en un perfil unidimensional.

Procedimiento de cálculo del MRD

El perfil unidimensional dado por la expresión (5.52), se presiona sobre la cimentación elástica dada por (5.51) con una fuerza normal F_N (véase fig. 5.12).

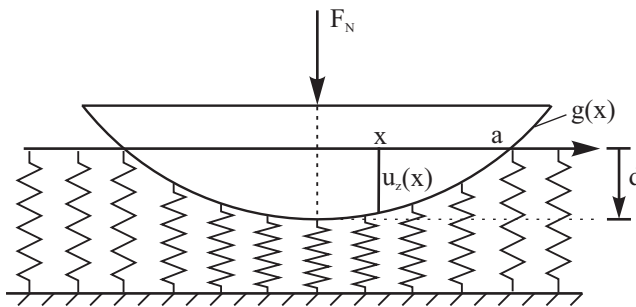


Fig. 5.12 Modelo MRD equivalente del contacto normal.

El desplazamiento normal de la superficie en un punto x dentro de la región de contacto, viene dado por la diferencia entre la profundidad de indentación d y la forma del perfil g

$$u_z(x) = d - g(x). \quad (5.54)$$

En el borde de un contacto no adherente, $x = \pm a$, el desplazamiento de la superficie debe ser igual a cero

$$u_z(\pm a) = 0 \Rightarrow d = g(a). \quad (5.55)$$

Esta igualdad determina la relación entre la profundidad de indentación y el radio de contacto a . Hay que resaltar que dicha relación no depende de la reología del medio. La fuerza de un muelle en la posición x es proporcional al desplazamiento en dicha posición

$$\Delta F_z(x) = \Delta k_z u_z(x) = E^* u_z(x) \Delta x. \quad (5.56)$$

En el equilibrio, la suma de todas las fuerzas elásticas debe ser igual a la fuerza normal. En el caso límite en el que la distancia entre muelles sea muy pequeña, $\Delta x \rightarrow dx$, la suma se transforma en una integral:

$$F_N = E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a (d - g(x)) dx. \quad (5.57)$$

La igualdad (5.57) proporciona la fuerza normal en función del radio de contacto y , si se tiene en cuenta la expresión (5.55), también en función de la profundidad de indentación.

Se define la densidad lineal de carga $q_z(x)$ como:

$$q_z(x) = \frac{\Delta F_z(x)}{\Delta x} = E^* u_z(x) = \begin{cases} E^* (d - g(x)), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}. \quad (5.58)$$

Como se muestra en el apéndice B, la distribución de presiones en los sistemas tridimensionales originales se determina con ayuda de la densidad lineal de carga mediante la siguiente transformada integral

$$p(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'_z(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx \quad (5.59)$$

El desplazamiento normal de la superficie $u_{3D,z}(r)$, viene dado, tanto en el interior como en el exterior de la región de contacto, por la siguiente transformada

$$u_{3D,z}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{u_z(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx. \quad (5.60)$$

Para completar el procedimiento, se muestra la transformada inversa a la expresión (5.59):

$$q(x) = 2 \int_x^\infty \frac{rp(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr. \quad (5.61)$$

Las igualdades (5.52), (5.55), (5.57), (5.59) y (5.60) resuelven completamente el caso del contacto normal. En los problemas de este capítulo se tratan varios ejemplos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Estimar la presión máxima y la magnitud de la región de contacto en el caso del contacto rueda-raíl. La carga máxima en la rueda, en el caso de

trenes de mercancías, es $F \approx 10^5$ N, y el radio de la rueda es aproximadamente $R = 0,5$ m.

Resolución: El contacto rueda-raíl puede, en primera aproximación, considerarse como el que se establece entre dos cilindros de radios de curvatura semejantes, y cuyos ejes se hallan orientados perpendicularmente. Es por tanto equivalente al contacto entre una esfera elástica de radio R y un semi-espacio elástico. El módulo de elasticidad efectivo es $E^* \approx E / 2(1-\nu^2) \approx 1,2 \cdot 10^{11}$ Pa. Para la presión p_0 en el centro de la región de contacto se obtiene, aplicando la expresión (5.24), $p_0 \approx 1,0$ GPa. El radio de contacto es $a \approx 6,8$ mm.

Problema 2: Dos cilindros del mismo material y con el mismo radio entran en contacto de forma que sus ejes forman un ángulo $\pi / 4$ (fig. 5.13). Determinar la relación constitutiva entre la fuerza y la profundidad de indentación.

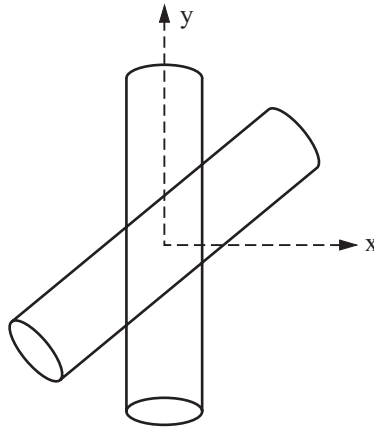


Fig. 5.13 Contacto entre dos cilindros idénticos, cuyos ejes forman un ángulo $\pi / 4$ (vista en planta).

Resolución: Se supone que el plano de contacto es horizontal. La distancia de la superficie del primer cilindro a ese plano, en el momento inicial del contacto, es igual a $z_1 = \frac{x^2}{2R}$, y la del segundo $z_2 = -\frac{(x-y)^2}{4R}$. Por tanto, la distancia entre ambas superficies es

$$h = \frac{x^2}{2R} + \frac{(x-y)^2}{4R} = \frac{1}{R} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \right).$$

Las curvaturas principales se obtienen como valores propios de la expresión cuadrática anterior, mediante la ecuación

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4R} - \kappa & -\frac{1}{4R} \\ -\frac{1}{4R} & \frac{1}{4R} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - \frac{\kappa}{R} + \frac{1}{8R^2} = 0,$$

dando como resultado $\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm 1/\sqrt{2}}{2R}$. En consecuencia, los radios principales de curvatura son $R_{1,2} = \frac{2R}{1 \pm 1/\sqrt{2}}$, y para el radio de curvatura gaussiana, se obtiene $\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{2}R$. Dado que los cilindros están hechos del mismo material, de la expresión se tiene que $E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$. La relación fuerza-indentación resulta ser, en este caso,

$$F = \frac{2^{7/4}}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} R^{1/2} d^{3/2}.$$

Problema 3: Determinar el tiempo que permanece en contacto una esfera elástica (radio R), cuando se lanza contra una pared rígida (Hertz, 1882).

Resolución: Se definirá x como la distancia entre la esfera y la pared a partir del primer contacto. La energía potencial del sistema viene dada por la expresión (5.25), con $d = x$ y E^* dado por la ecuación (5.26). Durante el tiempo que dura el impacto, la energía se conserva:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{8}{15} E^* R^{1/2} x^{5/2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

La cercanía máxima de la esfera a la pared, x_0 , se alcanza en el momento en el que la velocidad dx/dt se anula, y es igual a

$$x_0 = \left(\frac{15}{16} \frac{mv_0^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}.$$

La duración del impacto, τ , durante la cual x crece primero de 0 a x_0 y luego decrece a 0 de nuevo, es igual a

$$\tau = \frac{2}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^{5/2}}} = \frac{2x_0}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2,94x_0}{v_0}.$$

Problema 4: Determinar la presión de contacto máxima que resulta del impacto entre una esfera y una pared.

Resolución: En el problema 3 ya se ha calculado la cercanía máxima x_0 . La presión máxima, p_0 , viene dada por la expresión (5.22) y es igual a

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{x_0}{R} \right)^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{15 E^{*4} m v_0^2}{16 R^3} \right)^{1/5} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi E^{*4} \rho v_0^2 \right)^{1/5},$$

donde ρ es la densidad del material. Por ejemplo, en el caso de impacto de una esfera de acero contra una pared del mismo material a la velocidad $v_0 = 1$ m/s, se obtiene (suponiendo un choque puramente elástico)

$$p_0 \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi (10^{11})^4 (7,8 \cdot 10^3) \cdot 1 \right)^{1/5} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Pa.}$$

Problema 5: Determinar la rigidez diferencial de contacto $\delta F_N / \delta d$ en el caso del contacto entre un cuerpo elástico con simetría rotacional, y un plano rígido, donde A es el área de contacto (fig. 5.14).

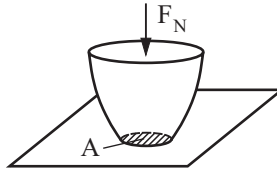


Fig. 5.14 Contacto entre un cuerpo elástico con simetría rotacional y un plano rígido.

Resolución: Se considerará que se trata de un contacto circular de radio a . El cambio producido en el mismo por efecto de un aumento infinitesimal de la profundidad de indentación, dd , puede obtenerse en dos pasos:

En el primer paso, la región de contacto se desplaza la magnitud dd hacia abajo (fig. 5.15 b). En el proceso, la fuerza normal cambia según la expresión en la magnitud $dF_N = 2aE^* dd$. En el segundo paso, los bordes que resultan de dicha compresión han de elevarse (fig. 5.15 c). El cambio en la fuerza normal que de ello resulta, es proporcional al área que aumenta, $2\pi a da$, y a la altura que alcanza el material en el reborde. Esta es infinitamente pequeña en magnitud, y por tanto puede despreciarse. Por consiguiente, la rigidez diferencial

$$c = \frac{dF_N}{dd} = 2aE^*$$

solo depende del radio de contacto, y no de la forma exacta del cuerpo con simetría rotacional. En el caso de cuerpos sin simetría rotacional, la expresión (5.13) es válida para calcular la rigidez diferencial.

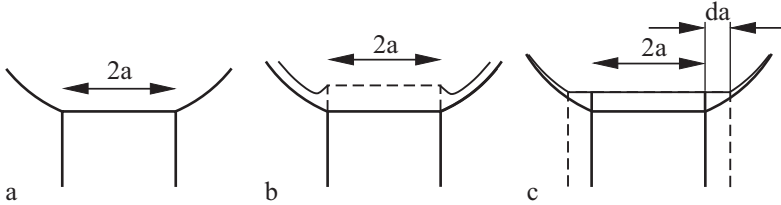


Fig. 5.15 Esquema para el cálculo de la rigidez diferencial.

Problema 6: En una región circular de radio a actúa un esfuerzo axial p_0 . Determinar el desplazamiento de la región en el centro y en el borde del círculo.

Resolución: Mediante la ecuación (5.7), se obtiene el desplazamiento en el centro del círculo

$$u_z(0) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^a p_0 \frac{2\pi r}{r} dr = \frac{2p_0 a}{E^*}.$$

Para el desplazamiento en el borde, se obtiene

$$u_z(a) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2a} p_0 \frac{2\varphi(r) \cdot r}{r} dr = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} 2\varphi(r) dr.$$

(Véase la fig. 5.16 donde se define la variable de integración r para este caso).

El ángulo φ se calcula mediante $2\varphi = \pi - 2 \arcsen\left(\frac{r}{2a}\right)$. Por consiguiente, se obtiene

$$u_z(a) = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} \left(\pi - 2 \arcsen\left(\frac{r}{2a}\right) \right) dr = \frac{2ap_0}{\pi E^*} \int_0^1 (\pi - 2 \arcsen(\xi)) d\xi = \frac{4ap_0}{\pi E^*}.$$

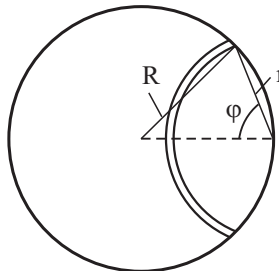


Fig. 5.16 Esquema para el cálculo de la integral del problema 6.

Problema 7: Mediante el método de reducción de dimensionalidad, resolver el problema del contacto normal entre un semi-espacio elástico y un indentador rígido con los siguientes perfiles geométricos:

- (a) perfil tipo troquel plano y cilíndrico, de radio a : $f(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r \geq a \end{cases}$,
- (b) perfil parabólico $f(r) = r^2 / (2R)$,
- (c) perfil cónico $f(r) = r \cdot \tan \theta$,
- (d) perfil descrito por una función potencia $f(r) = c_n r^n$, para cualquier valor del exponente n .

Resolución: Según el método de reducción de dimensionalidad se debe, en primer lugar, calcular el perfil equivalente mediante la transformación (5.52). Para los perfiles mencionados, el cálculo es sencillo:

- (a) $g(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}$,
- (b) $g(x) = x^2 / R$,
- (c) $g(x) = \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta$,
- (d) $g(x) = \kappa_n c_n |x|^n$

donde $\kappa_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}$, y $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ es la función gamma.

El radio de contacto se obtiene a partir de la igualdad $g(a) = d$ (ecuación (5.55)), dando como resultado:

- (a) a , constante
- (b) $a = \sqrt{Rd}$,
- (c) $a = \frac{2}{\pi} \frac{d}{\tan \theta}$,
- (d) $a = \left(\frac{d}{\kappa_n c_n} \right)^{1/n}$.

La fuerza normal para una profundidad de indentación dada, se calcula mediante la ecuación (5.57), lo cual resulta en:

- (a) $F_N = 2E^* ad$,
- (b) $F_N = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$,
- (c) $F_N = \frac{2}{\pi} E^* \frac{d^2}{\tan \theta}$,
- (d) $F_N = \frac{2nE^*}{n+1} (\kappa_n c_n)^{-\frac{1}{n}} d^{\frac{n+1}{n}}$.

Para el cálculo de la distribución de presiones en el caso tridimensional original y en el contexto MRD, se ha de determinar primero la densidad lineal de carga mediante la definición (5.58):

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad q_z(x) &= \begin{cases} E^* d, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \\
 \text{(b)} \quad q_z(x) &= \begin{cases} E^* (d - x^2 / R), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \\
 \text{(c)} \quad q_z(x) &= \begin{cases} E^* \left(d - \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta \right), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \\
 \text{(d)} \quad q_z(x) &= \begin{cases} E^* (d - \kappa_n c_n |x|^n), & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.
 \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada de la densidad lineal de carga con respecto a x (x positiva), resulta en:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad q_z'(x) &= -E^* d \cdot \delta(x-a), \text{ donde } \delta(x) \text{ es la función Delta de Dirac,} \\
 \text{(b)} \quad q_z'(x) &= \begin{cases} -2E^* x / R, & x < a \\ 0, & x > a \end{cases}, \\
 \text{(c)} \quad q_z'(x) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} E^* \tan \theta, & x < a \\ 0, & x > a \end{cases}, \\
 \text{(d)} \quad q_z'(x) &= \begin{cases} -E^* \kappa_n c_n n x^{n-1}, & x < a \\ 0, & x > a \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la derivada en la ecuación (5.59), se obtiene la distribución de presiones en la región de contacto:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad p(r) &= \frac{E^* d}{\pi} \int_r^\infty \frac{\delta(x-a)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \begin{cases} \frac{E^* d}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \\
 \text{(b)} \quad p(r) &= \frac{2E^*}{\pi R} \int_r^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \begin{cases} \frac{2E^*}{\pi R} \int_r^a \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \frac{2E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - r^2}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}, \\
 \text{(c)} \quad p(r) &= \frac{E^*}{2} \tan \theta \int_r^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{E^*}{2} \tan \theta \int_r^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \frac{E^*}{2} \tan \theta \cdot \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 1} \right)
 \end{aligned}$$

para $r < a$ y $p(r) = 0$ fuera de la región de contacto,

$$(d) \quad p(r) = \kappa_n c_n n \frac{E^*}{\pi} \int_r^\infty \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \begin{cases} \kappa_n c_n n \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

Si se normaliza la presión con respecto a la presión promedio en la región de contacto, $\bar{p} = F_N / (\pi a^2)$, y la coordenada polar con respecto al radio de contacto a , $\tilde{r} = r / a$, la distribución de presiones dentro de la región de contacto se puede expresar como

$$\frac{p(r)}{\bar{p}} = \frac{n+1}{2} \int_{\tilde{r}}^1 \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\xi^2 - \tilde{r}^2}} d\xi.$$

Si bien esta integral puede expresarse en forma de funciones elementales para todo n entero, es más sencillo calcularla de forma numérica. En la figura 5.17 se representan, de manera comparativa, las distribuciones de presiones para $n = 1$ (cono), $n = 2$ (contacto hertziano), $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ y $n = \infty$ (troquel cilíndrico y plano). En el caso de un cono, la presión tiene una singularidad logarítmica en el vértice. Para los casos en los que $n > 1$, la distribución de presiones no presenta singularidades, aunque la presión máxima se sitúa en el centro del contacto solo hasta $n = 2$, para después desplazarse cada vez más al borde del contacto conforme aumenta n . En el caso límite donde $n = \infty$, que corresponde al caso del troquel cilíndrico y plano, la distribución de presiones tiene una singularidad en el borde del contacto.

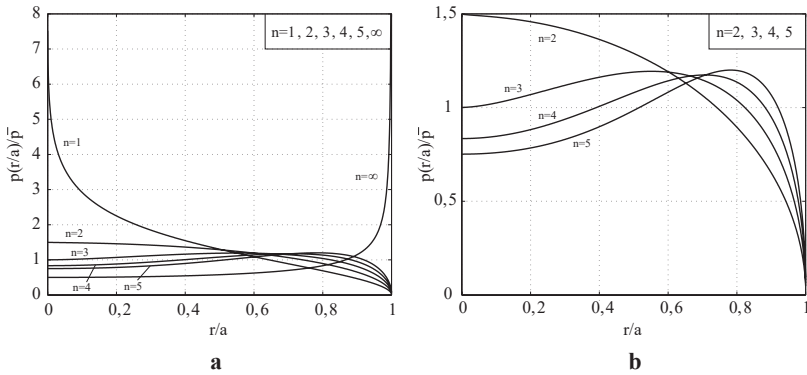


Fig. 5.17 Distribuciones de presiones para perfiles sencillos dados por funciones potencia (a) $n = 1, 2, 3, 4, 5, \infty$, (b) ampliación de la región de presiones bajas para $n = 2, 3, 4, 5$.

Los desplazamientos verticales fuera de la región de contacto ($r > a$) vienen dados por la igualdad (5.60), de manera que se puede escribir:

$$u_{3D,z}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{u_z(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{d - g(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx, \quad \text{para } r > a.$$

Para los casos particulares (a)-(d), se obtiene:

$$(a) \quad u_{3D,z}(r) = \frac{2d}{\pi} \arcsen\left(\frac{a}{r}\right),$$

$$(b) \quad u_{3D,z}(r) = \frac{d}{\pi} \left[\left(2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right) \cdot \arcsen\left(\frac{a}{r}\right) + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \right],$$

$$(c) \quad u_{3D,z}(r) = \frac{2d}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{a}{r}\right) - \left(\frac{r}{a} - \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \right) \right],$$

$$(d) \quad u_{3D,z}(r) = \kappa_n c_n \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{a^n - x^n}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

En el caso (d) no se ha resuelto la integral.

Problema 8: Mediante el método de reducción de dimensionalidad, determinar la relación entre la fuerza normal, la profundidad de indentación y el radio de contacto para un perfil parabólico truncado (fig. 5.18):

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r < b \\ \frac{r^2 - b^2}{2R} & \text{para } b \leq r \leq a \end{cases}$$

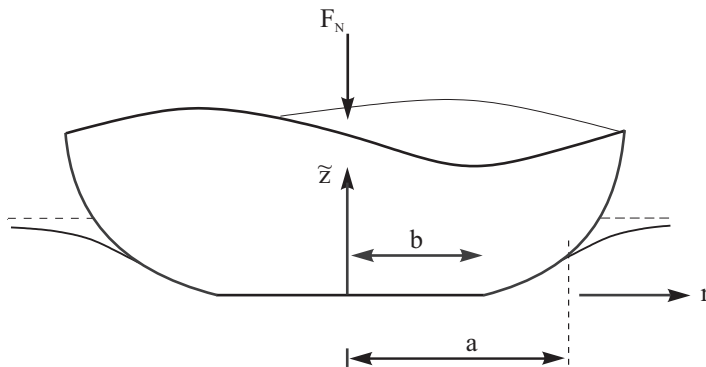


Fig. 5.18 Representación cualitativa de la compresión de un semi-espacio elástico mediante un perfil parabólico truncado.

Resolución: Para el cálculo del perfil transformado por el MRD usando la expresión (5.52), primero se calcula la derivada del perfil original:

$$f'(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r < b \\ \frac{r}{R} & \text{para } b \leq r \leq a \end{cases} .$$

Sustituyendo en (5.52) e integrando, resulta

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |x| < b \\ \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} & \text{für } b \leq |x| \leq a \end{cases} .$$

Este perfil se representa junto con el original en la fig. 5.19.

La profundidad de indentación en función del radio de contacto se obtiene de la expresión (5.55)

$$d = g(a) = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 - b^2} .$$

La fuerza normal se obtiene de la suma de todas las fuerzas elásticas

$$F_N = E^* \int_{-a}^a [d - g(x)] dx = 2E^* \int_0^a d dx - \frac{2E^*}{R} \int_b^a x \sqrt{x^2 - b^2} dx ,$$

que, tras integrar y desarrollar apropiadamente, se llega al siguiente resultado:

$$F_N(a) = \frac{2E^*}{3R} (2a^2 + b^2) \cdot \sqrt{a^2 - b^2} .$$

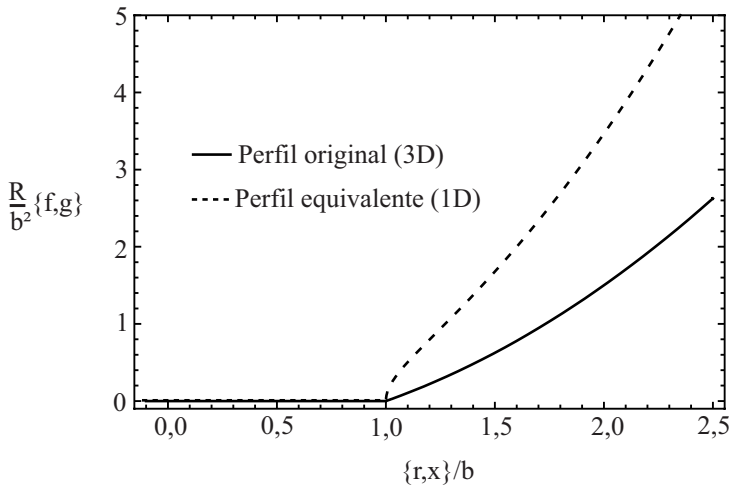
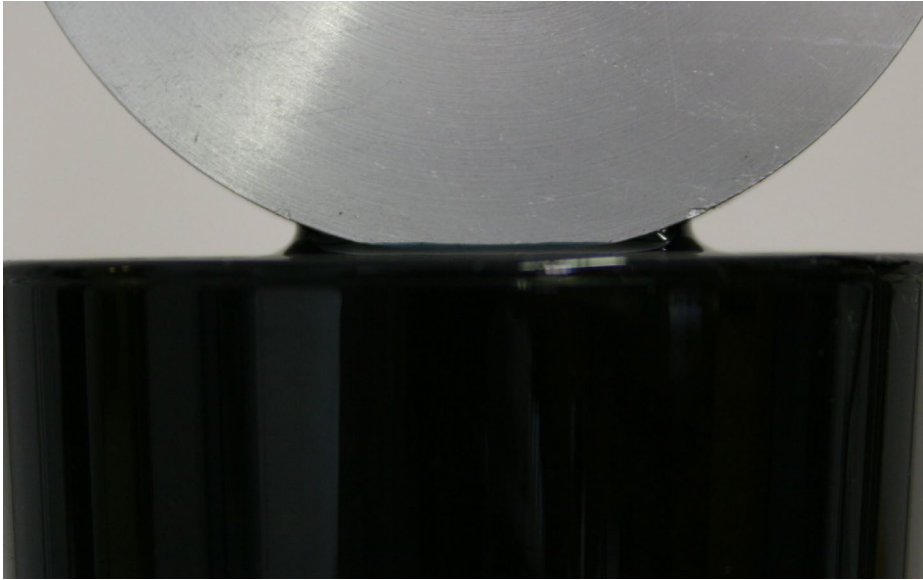


Fig. 5.19 Indentador parabólico con punta «desgastada»: Comparación de los perfiles original y equivalente.

Para completar, se proporciona además la relación constitutiva entre la fuerza normal y la profundidad de indentación:

$$F_N(d) = \frac{\sqrt{2}E^*b^3}{3R} \left(2 + \sqrt{1 + \left(\frac{2R}{b^2}d\right)^2} \right) \cdot \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2R}{b^2}d\right)^2}}.$$

6. TRATAMIENTO RIGUROSO DEL CONTACTO – EL CONTACTO ADHERENTE



El caso del contacto normal (sin adherencia) entre dos cuerpos elásticos de superficies ligeramente curvadas fue resuelto por Hertz en 1882. 50 años más tarde, Bradley presentó la solución del caso del contacto normal adherente entre una esfera y un plano rígidos. Para la fuerza de adhesión, Bradley obtuvo el resultado $F_A = 4\pi\gamma R$, donde γ es la energía superficial. La solución del contacto adherente entre dos cuerpos elásticos la presentaron Johnson, Kendall y Roberts en 1971 (Teoría JKR), los cuales obtuvieron la fuerza de adhesión $F_A = 3\pi\gamma R$. En 1975, Derjaguin, Müller y Toporov publicaron una teoría alternativa sobre la adherencia, la cual se conoce como teoría DMT. Tras una acalorada discusión, fue Tabor el que, en 1976, llegó a la conclusión de que las teorías JKR y DMT eran válidas para casos particulares de un problema más general. La teoría de Bradley es válida para cuerpos completamente rígidos, la teoría DMT para esferas pequeñas y rígidas, mientras que la teoría JKR se aplica a esferas grandes y blandas. La diferencia entre todos estos casos es, no obstante, mínima; de hecho, la teoría JKR describe la adherencia relativamente bien en el entorno de validez de la teoría DMT. Esta puede ser la razón por la que la teoría JKR se ha impuesto en la descripción de los contactos adherentes. Por este motivo, en este capítulo se presenta únicamente la teoría de Johnson, Kendall y Roberts.

6.1 LA TEORÍA DE JOHNSON, KENDALL Y ROBERTS

La teoría clásica del contacto adherente fue desarrollada en 1971 por Johnson, Kendall y Roberts, y se la conoce como teoría JKR. Considérese una esfera elástica de radio R en contacto con un plano horizontal rígido. Entre ambos sólidos se establecen siempre fuerzas de atracción (tipo van der Waals), las cuales son responsables de que entre la esfera y el plano se forme un «cuello» característico (fig. 6.1).

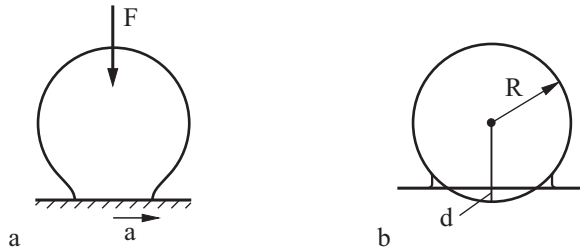


Fig. 6.1 En un contacto adhesivo entre cuerpos se forma un «cuello».

Denominamos a al radio de contacto y asumiendo que $d, a \ll R$, donde $R - d$ es la distancia entre el centro de la esfera y el sustrato rígido. Para que la esfera adopte la forma que se muestra en la fig. 6.1 b, los puntos de la superficie de la esfera deben desplazarse de tal forma que, tras la deformación, todos se sitúen sobre el plano rígido.

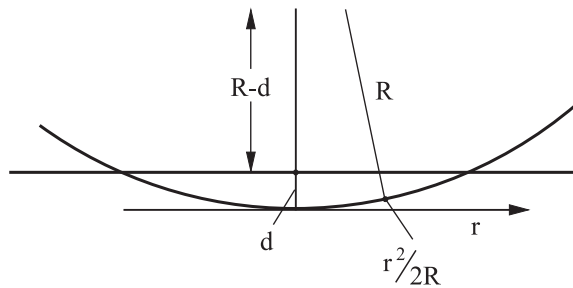


Fig. 6.2 Esquema representativo de la geometría en el contacto entre una esfera elástica y un plano horizontal rígido.

Para el desplazamiento vertical se obtiene (fig. 6.2)

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (6.1)$$

A partir de los resultados mostrados en el capítulo anterior, se sabe que la distribución de presiones de la forma

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} \quad (6.2)$$

da lugar a un desplazamiento vertical

$$u_z = \frac{\pi}{E^*} p_0 a, \quad (6.3)$$

mientras que la distribución de presiones

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (6.4)$$

produce el siguiente desplazamiento

$$u_z = \frac{\pi}{4E^* a} p_0 \left(2a^2 - r^2\right). \quad (6.5)$$

La aplicación simultánea de ambas distribuciones de presión resulta en una distribución cuadrática del desplazamiento en la región de contacto, la cual coincide con las características geométricas de la ecuación (6.1).

Por esta razón, se utilizará la siguiente expresión para la distribución de presiones en la región de contacto

$$p = p_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} + p_1 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2}. \quad (6.6)$$

El desplazamiento correspondiente se obtiene al aplicar el principio de superposición

$$u_z = \frac{\pi a}{E^*} \left[p_0 + \frac{1}{2} p_1 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) \right]. \quad (6.7)$$

Comparando las expresiones (6.1) y (6.7) se tiene que

$$\frac{\pi a}{E^*} \left(p_0 + \frac{p_1}{2} \right) = d, \quad \frac{\pi p_1}{4E^* a} = \frac{1}{2R}, \quad (6.8)$$

de lo cual se deduce que

$$p_1 = \frac{E^* 2a}{\pi R}, \quad p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right). \quad (6.9)$$

Las dos ecuaciones (6.9) contienen (para una profundidad de indentación d dada) tres incógnitas, p_1 , p_0 y a . Para determinar de manera inequívoca los estados de deformación y de tensión o esfuerzo para una profundidad de indentación d determinada, se necesita otra expresión. Para ello, se usará la condición por la cual la energía total del sistema, para un valor de d constante, ha de alcanzar un mínimo.

La energía de la esfera viene dada por una contribución elástica y otra adhesiva. La energía de deformación elástica de la esfera puede calcularse mediante la expresión

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int_{\text{área-contacto}} p(\mathbf{x}) u_z(\mathbf{x}) dx dy, \quad (6.10)$$

la cual es válida para cualquier sistema linealmente elástico. Sustituyendo las expresiones (6.6) y (6.1) en la ecuación (6.10), resulta en

$$U_{el} = \pi d \int_0^a r \left[p_0 (1 - r^2 / a^2)^{-1/2} + p_1 (1 - r^2 / a^2)^{1/2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{2dR} \right) dr. \quad (6.11)$$

Tras el cambio de variable $\xi = 1 - r^2 / a^2$, $d\xi = -2r dr / a^2$, se obtiene

$$U_{el} = \frac{\pi da^2}{2} \left[p_0 \left(2 - \frac{2}{3} \frac{a^2}{dR} \right) + p_1 \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15} \frac{a^2}{dR} \right) \right] \quad (6.12)$$

y teniendo en cuenta la expresión (6.9),

$$U_{el} = E^* \left[d^2 a - \frac{2}{3} \frac{da^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right]. \quad (6.13)$$

La energía total es igual a¹

$$U_{tot} = E^* \left[d^2 a - \frac{2}{3} \frac{da^3}{R} + \frac{a^5}{5R^2} \right] - \gamma_{12} \pi a^2. \quad (6.14)$$

El radio de contacto en el equilibrio, a , se obtiene considerando el principio de mínima energía:

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = E^* \left[d^2 - 2 \frac{da^2}{R} + \frac{a^4}{R^2} \right] - 2\gamma_{12} \pi a = E^* \left(d - \frac{a^2}{R} \right)^2 - 2\gamma_{12} \pi a = 0, \quad (6.15)$$

de lo cual se llega a

$$d = \frac{a^2}{R} \pm \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}}. \quad (6.16)$$

Incorporando esta expresión a la dada por (6.14), se obtiene la energía total en función del radio de contacto

1. En este caso, γ_{12} es la energía superficial.

$$U_{tot} = E^* \left[\frac{8}{15} \frac{a^5}{R^2} + \frac{\gamma_{12} \pi a^2}{E^*} \pm \frac{4}{3} \frac{a^3}{R} \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}} \right]. \quad (6.17)$$

La expresión con el signo menos corresponde al estado de menor energía.

De la fuerza normal externa que actúa sobre la esfera, se obtiene la derivada de la energía con respecto al desplazamiento d en el centro de la esfera:

$$F = -\frac{dU_{tot}}{d(d)} = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial(d)} - \frac{\partial U_{tot}}{\partial a} \frac{da}{d(d)}. \quad (6.18)$$

Ahora, hay que tener en cuenta que el valor de a ha de obedecer la condición de equilibrio para un valor dado de d . En este caso, $\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = 0$, de forma que, en vez de la ecuación (6.18), se llega a una expresión más sencilla:

$$F = \frac{\partial U_{tot}}{\partial(d)} = E^* \left[2da - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right]. \quad (6.19)$$

Si en la expresión (6.19) se incorpora la expresión (6.16), se obtiene la fuerza en función del radio de contacto,

$$F = E^* \left[2 \left(\frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{2\gamma_{12} \pi a}{E^*}} \right) a - \frac{2}{3} \frac{a^3}{R} \right] = E^* \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{R} - \left(\frac{8\gamma_{12} \pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.20)$$

Esta fuerza alcanza un valor negativo máximo cuando

$$a = a_{crit} = \left(\frac{9}{8} \frac{\gamma_{12} \pi R^2}{E^*} \right)^{1/3}, \quad (6.21)$$

siendo este igual a

$$F_A = -\frac{3}{2} \gamma_{12} \pi R. \quad (6.22)$$

La magnitud de esta fuerza se denomina *fuerza de adherencia* o de *adhesión*.

En términos de las variables adimensionales $\tilde{F} = F / |F_A|$, $\tilde{a} = a / a_{crit}$, la expresión (6.20) adquiere la siguiente forma

$$\tilde{F} = \tilde{a}^3 - 2\tilde{a}^{3/2}, \quad (6.23)$$

la cual se representa de forma gráfica en la fig. 6.3 a.

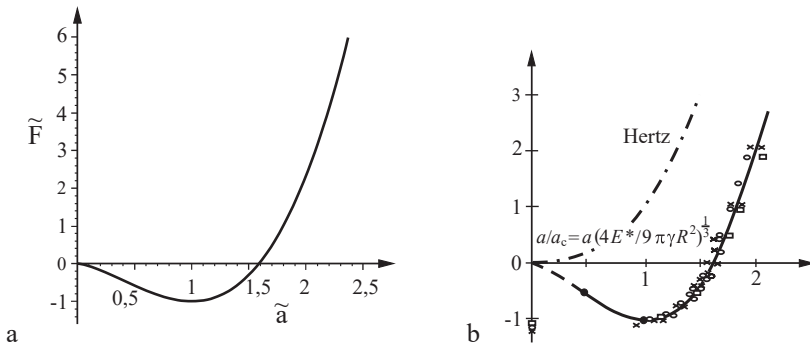


Fig. 6.3 (a) Dependencia de la fuerza frente al radio como magnitudes normalizadas; (b) datos experimentales obtenidos por Johnson para esferas de gelatina de varios radios: 24,5 mm, 79 mm y 255 mm (K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. 6.ª reimpresión de la 1.ª edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001)).

La profundidad de indentación (expresión (6.16) con signo negativo) en el estado crítico definido por la ecuación (6.21), es igual a

$$d_{crit} = -\left(\frac{3\pi^2\gamma_{12}^2 R}{64E^*2}\right)^{1/3}. \tag{6.24}$$

Introduciendo la profundidad de indentación adimensional $\tilde{d} = d / |d_{crit}|$, se puede reescribir la ecuación (6.16) en términos adimensionales

$$\tilde{d} = 3\tilde{a}^2 - 4\tilde{a}^{1/2} \tag{6.25}$$

Dicha expresión, junto con la de la expresión (6.23), determina la dependencia en forma paramétrica entre la fuerza normal y la profundidad de indentación, expresadas como magnitudes adimensionales (fig. 6.4).

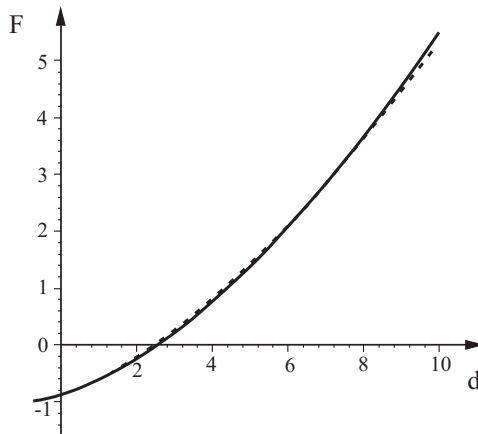


Fig. 6.4 Dependencia entre la fuerza normal y la profundidad de indentación como magnitudes adimensionales.

Esta dependencia se representa en la fig. 6.4 (línea continua). En el caso de que la profundidad de indentación sea del mismo orden de magnitud que d_{crit} , lo que es de interés en muchos problemas sobre adherencia, dicha dependencia puede aproximarse mediante la siguiente expresión (línea discontinua en la fig. 6.4):

$$\tilde{F} \approx -1 + 0,12 \cdot (\tilde{d} + 1)^{5/3} \quad (6.26)$$

A continuación se discutirá la distribución de presiones en el contacto adherente, la cual viene dada por las expresiones (6.6) y (6.9). Hay que tener en cuenta que

p_1 es siempre es positiva, y $p_0 = \frac{E^*}{\pi} \left(\frac{d}{a} - \frac{a}{R} \right) = -\sqrt{\frac{2\gamma_{12}E^*}{\pi a}}$ siempre es negativa.

La distribución de presiones resultante se muestra en la fig. 6.5. La diferencia fundamental con respecto al caso de contacto no adherente es que el esfuerzo no es nulo en el borde del área de contacto, sino negativo e infinitamente grande.

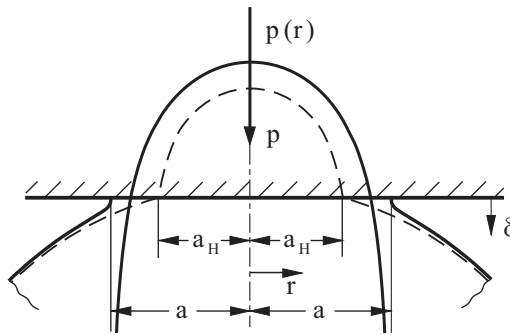


Fig. 6.5 Forma del cuerpo y distribución de presiones en un contacto adherente.

Esta singularidad queda sin efecto si se tiene en cuenta el alcance finito de las fuerzas de adhesión. No obstante, y debido al orden de magnitud de la «tenacidad teórica» en los contactos tipo van der Waals, los esfuerzos en el borde de un contacto adherente alcanzan valores muy altos, lo cual conduce a un desgaste considerable (compárese con la situación semejante en el «contacto tangencial», capítulo 8).

6.2 EL CONTACTO ADHERENTE DE CUERPOS CON SIMETRÍA ROTACIONAL

En la sección 5.6 se describió un método sencillo (el método de reducción de dimensionalidad, MRD), mediante el cual se pueden resolver algunos casos de contacto normal en cuerpos con *simetría rotacional de todo tipo*. De igual modo, se pueden describir los contactos adherentes de indentadores con simetría axial.

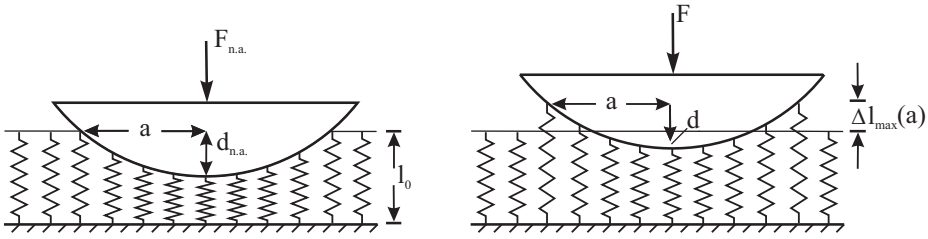


Fig. 6.6 Representación cualitativa de los procesos de compresión y tracción de un indentador esférico sobre una cimentación elástica, que reproduce exactamente las propiedades del contacto adherente entre un troquel esférico rígido y un semi-espacio elástico.

A continuación, se describe el procedimiento de cálculo de un contacto adherente mediante el MRD, sin entrar en su justificación. La demostración de la validez de dicho procedimiento se muestra en el apéndice C. El proceso de cálculo consta de los siguientes pasos:

- En primer lugar, se transforma el perfil tridimensional dado, $z = f(r)$, en un perfil equivalente unidimensional, $g(x)$, con ayuda de la expresión (5.52).
- El perfil resultante $g(x)$ se comprime en la cimentación elástica unidimensional según la definición (5.51), de tal forma que se genera un radio de contacto a . Por ahora, no se tiene en cuenta la adherencia. El proceso descrito se muestra gráficamente en la fig. 6.6.
- En un tercer paso, el perfil se desplaza hacia arriba, asumiendo que todos los muelles en contacto se adhieren al indentador –el radio de contacto se mantiene constante. Conforme tiene lugar el desplazamiento, los muelles en las inmediaciones del borde están sometidos a una tensión, o tracción, cada vez mayor. Cuando la elongación de uno de estos muelles externos alcanza el valor máximo permitido,

$$\Delta l_{\max}(a) = \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}, \quad (6.27)$$

el muelle se desprende. El requisito de separación, dado por la expresión (6.27), lo encontró M. Heß² y se le conoce como *regla de Heß* (en el apéndice C se presenta una deducción de la citada expresión, ecuación A.39). Se puede demostrar que el estado de equilibrio correspondiente, caracterizado por las tres magnitudes (F, d, a) , coincide *exactamente* con el que tiene lugar en un contacto adherente tridimensional.

A diferencia del algoritmo descrito en la sección 5.6 para el contacto no adherente, aquí solo hace falta modificar la fórmula para el cálculo de la profundidad de indentación. El desplazamiento de los muelles en el borde no es cero

2. M. Heß. *Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension*. Tesis Doctoral, Universidad Técnica de Berlín (2010).

ahora, sino negativo e igual en magnitud al valor crítico: $u_z(a) = -\Delta l_{\max}(a)$. De aquí se deduce que

$$d = g(a) - \Delta l_{\max}(a). \quad (6.28)$$

La fuerza normal viene dada, como antes, por la igualdad (5.57):

$$\begin{aligned} F_N &= 2E^* \int_0^a (d - g(x)) dx = 2E^* \left[ad - \int_0^a g(x) dx \right] \\ &= 2E^* \left[ag(a) - \int_0^a g(x) dx - a\Delta l_{\max}(a) \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

o

$$F_N = 2E^* \left[\int_0^a xg'(x) dx - a\Delta l_{\max}(a) \right] \quad (6.30)$$

Si en el proceso de separación se controla la fuerza, entonces se puede calcular el valor crítico del radio de contacto, a_c , en el momento en el que la estabilidad se pierde bajo la condición $dF_N / da = 0$:

$$\left. \frac{dg(a)}{da} \right|_{a_c} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_c E^*}}. \quad (6.31)$$

Sustituyendo el radio crítico en la expresión (6.30), se obtiene la fuerza de adhesión:

$$F_A = -2E^* \left[\int_0^{a_c} xg'(x) dx - a_c \Delta l_{\max}(a_c) \right]. \quad (6.32)$$

Las reglas de transformación del MRD, como por ejemplo la dada por la expresión (5.59) para la distribución de presiones, y la dada por la expresión (5.60) para los desplazamientos, siguen siendo válidas en el caso de un contacto adherente.

Para ilustrar el uso sencillo de este procedimiento, se considera el contacto adherente entre un indentador o troquel cilíndrico y plano de radio a , y un semi-espacio elástico. La representación gráfica de este sistema en términos del MRD se muestra en la fig. 6.7.

En este caso, el radio crítico coincide con el del cilindro: $a_c = a$. Como $g'(x) = 0$ en el caso de un cilindro plano, desaparece el primer miembro de la ecuación, obteniéndose para la fuerza de adhesión

$$F_A = 2E^* a \Delta l_{\max}(a) = \sqrt{8\pi a^3 E^* \gamma_{12}}, \quad (6.33)$$

resultado que coincide exactamente con el del caso tridimensional³.

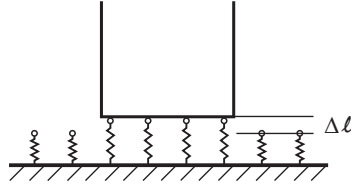


Fig. 6.7 Sistema unidimensional representativo de un contacto adherente entre un indentedor o troquel cilíndrico y un semi-espacio elástico.

A continuación, en la sección de problemas resueltos de este capítulo, se tratan más ejemplos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: ¿Qué longitud máxima puede tener el fleje delgado de la fig. 6.8, para que el contacto mostrado en el esquema no se produzca? Considerar que la energía interfacial entre el fleje y el sustrato viene dada por γ^* , la anchura del fleje (en la dirección perpendicular al plano del dibujo) es a , y su espesor es t .

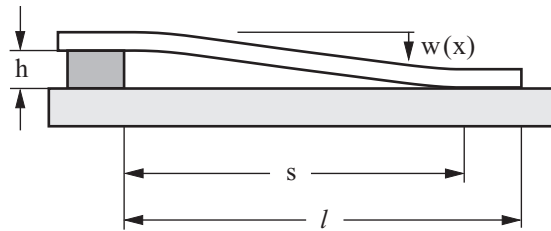


Fig. 6.8 Esquema para el cálculo del contacto adhesivo en un modelo micromecánico, el cual consta de un fleje delgado elástico y un sustrato.

Resolución: La ecuación diferencial del fleje en este caso es: $d^4 w / dx^4 = 0$. La solución que cumple las condiciones de contorno $w(0) = 0$, $w(s) = h$, $w'(0) = 0$ y $w'(s) = 0$, es

$$w(x) = \frac{h}{s^3} (3x^2 s - 2x^3).$$

La energía elástica del fleje flectado se calcula según

3. K. Kendall. «The adhesion and surface energy of elastic solids». *Journal of Physics D: Applied Physics* **4**, 1186-1195 (1971).

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} EI w''(x)^2 dx = \frac{6EIh^2}{s^3},$$

donde

$$I = \frac{at^3}{12}$$

es el momento de inercia de área, o segundo momento de inercia, de la sección transversal del fleje.

La energía total es igual a

$$U = \frac{6EIh^2}{s^3} - \gamma^* (l-s) \cdot a,$$

y alcanza un mínimo en

$$s = \left(\frac{3Eh^2 t^3}{2\gamma^*} \right)^{1/4}.$$

Si la longitud del fleje es menor que s , entonces el fleje no se «mantendrá pegado» al sustrato.

Problema 2: Bajo la acción de una fuerza externa, se consigue vencer la tensión superficial de un cuerpo y separar una capa (de espesor t) del mismo (fig. 6.9). Calcular la expresión que relaciona la tensión superficial y la forma de la lámina exfoliada⁴.

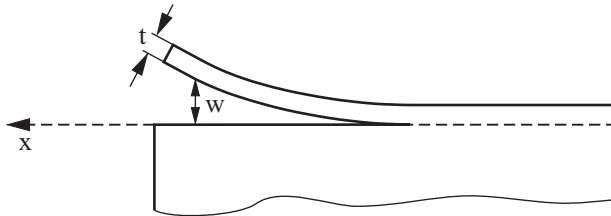


Fig. 6.9 Exfoliación de un cuerpo elástico.

Resolución: Considérese la capa exfoliada como una lámina de anchura a (perpendicular al plano del dibujo), que está integrada a lo largo de un margen (línea de exfoliación). La solución de la ecuación diferencial de la lámina $d^4 w / dx^4 = 0$, que cumple con las condiciones de contorno $w(0) = h$, $w(s) = 0$, $w''(0) = 0$ y $w'(s) = 0$, es

4. Este problema lo investigó I.W. Obreimov (1930) en relación con el método de medida de la tensión superficial de la mica, desarrollado por él mismo. Las medidas efectuadas fueron las primeras que permitieron determinar de forma directa la tensión superficial de cuerpos sólidos.

$$w(x) = \frac{h(x^3 - 3xs^2 + 2s^3)}{2s^3}.$$

La energía elástica es igual a

$$U_{el} = \int_0^s \frac{1}{2} Daw''(x)^2 dx = \frac{3Dah^2}{2s^3}$$

donde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$. La energía total es igual a

$$U = \frac{3Dah^2}{2s^3} + 2\gamma sa,$$

y alcanza un mínimo en

$$s = \frac{\sqrt{6}}{2} D^{1/4} h^{1/2} \gamma^{-1/4}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad $w''(x) = \frac{3hx}{s^3}$, se obtiene

$$\gamma = \frac{D}{4} w''(s)^2.$$

Problema 3: Analizar el contacto adhesivo entre un perfil cónico dado por $f(r) = \tan \theta \cdot r$, y un semi-espacio elástico. Determinar la profundidad de indentación y la fuerza normal en función del radio de contacto, así como la fuerza de adherencia a carga constante.

Resolución: En primer lugar se determina, mediante la transformada (5.52), el perfil unidimensional equivalente: $g(x) = (\pi/2) \tan \theta \cdot |x|$. La relación entre la profundidad de indentación y el radio de contacto viene dada por la igualdad (6.28):

$$d = \frac{\pi}{2} \tan \theta \cdot a - \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}.$$

La expresión para la fuerza normal adquiere la forma

$$F_N = 2E^* \left[\frac{\pi \tan \theta a^2}{4} - a \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}} \right].$$

La fuerza alcanza un valor máximo negativo cuando $a_c = \frac{18\gamma_{12}}{\pi \tan^2 \theta \cdot E^*}$, siendo igual a

$$F_c = -\frac{54\gamma_{12}^2}{\pi \tan^3 \theta \cdot E^*}.$$

La profundidad de indentación en este estado crítico, viene dada por $d_c = \frac{3\gamma_{12}}{\tan \theta \cdot E^*}$.

Introduciendo las magnitudes normalizadas $\tilde{F}_N = F_N / |F_c|$, $\tilde{d} = d / |d_c|$ y $\tilde{a} = a / a_c$, las expresiones para la profundidad de indentación y para la fuerza normal adquieren las siguientes formas adimensionales:

$$\tilde{F}_N(\tilde{a}) = 3\tilde{a}^2 - 4\tilde{a}^{3/2} \quad \text{y} \quad \tilde{d}(\tilde{a}) = 3\tilde{a} - 2\tilde{a}^{1/2}.$$

Problema 4: Analizar el contacto adhesivo entre un indentador rígido con simetría axial de la forma $f(r) = c_n \cdot r^n$, y un semi-espacio elástico.

Resolución: Este problema se resuelve de manera particularmente elegante con ayuda del MRD. El perfil unidimensional equivalente se calculó anteriormente en el problema 7 del capítulo 5:

$$g(x) = \kappa_n c_n |x|^n \quad \text{con} \quad \kappa_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}.$$

La relación entre la profundidad de indentación y el radio de contacto viene dada por la igualdad (6.28):

$$d = g(a) - \Delta \ell_{\max}(a) = \kappa_n c_n a^n - \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}.$$

La expresión para la fuerza normal es

$$F_N(a) = 2E^* \frac{n}{n+1} \kappa_n c_n a^{n+1} - \sqrt{8\pi a^3 E^* \gamma_{12}},$$

la cual alcanza el siguiente valor mínimo

$$F_c = \frac{1-2n}{n+1} \left[\left(\frac{3}{2n\kappa_n c_n} \right)^3 (2\pi \gamma_{12})^{n+1} E^{*n-2} \right]^{\frac{1}{2n-1}}$$

cuando

$$a_c = \left(\frac{9\pi \gamma_{12}}{2n^2 \kappa_n^2 c_n^2 E^*} \right)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

La profundidad de indentación en el momento en que se pierde la estabilidad (estado crítico), es igual a

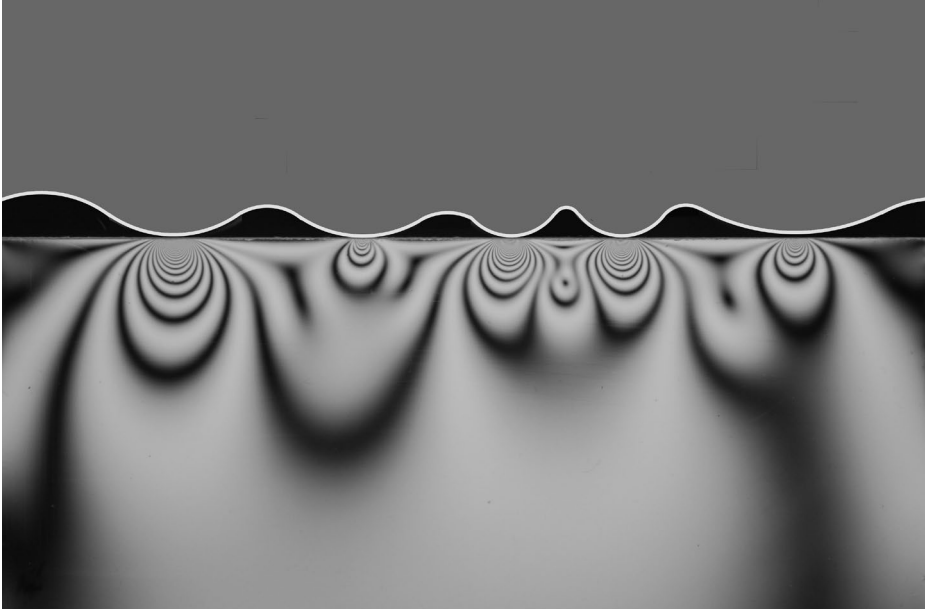
$$d_c = \left(1 - \frac{2}{3}n \right) \left[\frac{9\pi \gamma_{12}}{2n^2 E^*} \left(\frac{1}{\kappa_n c_n} \right)^{1/n} \right]^{\frac{n}{2n-1}}.$$

Normalizando con respecto a los valores de las magnitudes críticas, $\tilde{F}_N = F_N / |F_c|$, $\tilde{d} = d / |d_c|$ y $\tilde{a} = a / a_c$, las expresiones en el equilibrio adoptan formas especialmente sencillas:

$$\tilde{F}_N(\tilde{a}) = \frac{1}{|1-2n|} \left[3\tilde{a}^{n+1} - 2(n+1)\tilde{a}^{3/2} \right] \quad \text{y} \quad \tilde{d}(\tilde{a}) = \frac{1}{|3-2n|} (3\tilde{a}^n - 2n\tilde{a}^{1/2}).$$

En el caso de $n=1$, los resultados coinciden con los del problema 3, mientras que para $n=2$ se llega a la teoría clásica JKR para perfiles parabólicos.

7. EL CONTACTO ENTRE SUPERFICIES RUGOSAS



La rugosidad tiene una gran influencia en muchos fenómenos físicos, como el rozamiento, el desgaste, la estanqueidad o el sellado, la adherencia, las películas autoadhesivas, o los contactos térmicos y eléctricos. Cuando dos cuerpos con superficies rugosas se comprimen entre sí, el «área de contacto real» es, en principio, mucho más pequeña que la «superficie aparente de contacto». La extensión de la región de contacto y la magnitud de los esfuerzos máximos determinan, en última instancia, el tamaño de las partículas generadas durante el desgaste y, por tanto, la velocidad a la que este se produce. El tamaño del área de contacto tiene también una importancia decisiva en los procesos con rozamiento. Se puede considerar la fricción a nivel microscópico como la ruptura de uniones microscópicas entre las superficies en contacto. Según esta interpretación, la tenacidad de dichas uniones y, con ello, la fuerza de rozamiento, deberían ser proporcionales al «área real de contacto». En este capítulo se analiza la dependencia del área real de contacto, de la duración del mismo, así como de todas sus características frente a la fuerza de compresión.

7.1 EL MODELO DE GREENWOOD Y WILLIAMSON

Se comienza discutiendo el caso de dos superficies rugosas en contacto *elástico*. Como modelo más sencillo de una superficie rugosa, se puede imaginar una

sucesión regular de asperezas idénticas, con el mismo radio de curvatura y la misma altura¹ (fig. 7.1).

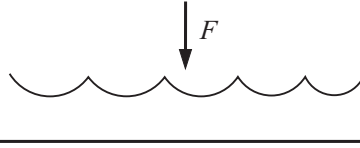


Fig. 7.1 Modelo sencillo de una superficie rugosa.

El tratamiento del contacto entre superficies de tal naturaleza es sencillo. En el caso de cargas no muy altas, la fuerza total se obtiene como suma de todas las fuerzas, iguales en todas las «puntas», que se pueden calcular mediante la teoría de contacto hertziano. Las «áreas de los micro-contacts» individuales y , por tanto, el área total de contacto es, en este caso, igual a $\Delta A \sim F^{2/3}$. Esto contradice tanto los resultados experimentales como la ley de Amontons, según la cual la fuerza de rozamiento es aproximadamente proporcional a la fuerza normal, o carga. Por consiguiente, es de esperar que el área de contacto crezca de manera más o menos lineal con la fuerza normal.

La situación cambia de forma considerable si se tiene en cuenta que las superficies reales son, por regla general, estocásticamente rugosas. El método más sencillo que permite modelizar una superficie irregular lo propusieron J.A. Greenwood y J.B.P. Williamson en 1966. Al modelo se le denomina modelo-GW, en honor a los autores. Greenwood y Williamson supusieron que todas las puntas que constituyen la rugosidad (las asperezas, o asperidades), tienen el mismo radio de curvatura, mientras que sus alturas se distribuyen de manera aleatoria en torno a un valor medio (fig. 7.2).

Si las puntas en contacto están lo suficientemente separadas entre sí a lo largo de la superficie, sus respectivas deformaciones pueden tratarse de manera independiente. Esto implica que, bajo esta suposición, tanto la ubicación de las puntas como la topografía exacta de la superficie tienen muy poca relevancia en este tipo de contacto. Lo que sí tiene relevancia, es la distribución de alturas. Se denominará $\Phi(z)$ a la densidad de probabilidad de encontrar una asperidad de altura máxima z . Esto significa que la probabilidad de encontrar una asperidad de altura máxima en el intervalo $[z, z + dz]$, es igual a $\Phi(z)dz$. Si N_0 es el número total de asperidades, entonces el número de asperidades en el intervalo $[z, z + dz]$ es igual a $N_0\Phi(z)dz$.

1. A tales superficies regulares no se las denomina «rugosas», sino «estructuradas» o «con textura».

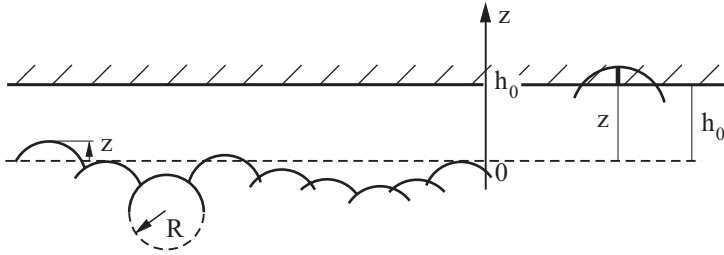


Fig. 7.2 Modelo de una superficie estocástica según Greenwood y Williamson.

Como es el caso de muchas superficies tanto naturales como artificiales, las alturas se distribuyen según una función normal:

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}}. \quad (7.1)$$

La magnitud l es aquí el valor medio cuadrático de la distribución de alturas:

$$l = \sqrt{\langle z^2 \rangle}, \quad (7.2)$$

que se denominará *rugosidad*.

Considérese el contacto entre un cuerpo elástico, cuya rugosidad está caracterizada por la distribución estadística anterior, y un plano rígido situado a una distancia h_0 del nivel medio, el cual se le hace coincidir con el origen del eje z (fig. 7.2). Suponiendo despreciable la interacción elástica entre asperidades, todas aquellas de altura $z > h_0$ están en contacto con el plano rígido. La «profundidad de indentación» de una asperidad de altura z es igual a $d = z - h_0$. En el caso de un único contacto, se obtiene, mediante la aplicación de la teoría de Hertz, $a^2 = d \cdot R$ (ecuación (5.21)). Por tanto, el área de contacto correspondiente a una asperidad es

$$\Delta A = \pi a^2 = \pi d \cdot R = \pi (z - h_0) R \quad (7.3)$$

y la fuerza por asperidad,

$$\Delta F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} \quad (7.4)$$

La fuerza total de todos los contactos, el área total de contacto, así como la carga total F_N se obtienen al integrar sobre todas las asperidades en el contacto. Esto implica que la integración se ha de realizar sobre todas las alturas comprendidas entre $z = h_0$ e infinito:

$$N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) dz \quad (7.5)$$

$$A = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz, \quad (7.6)$$

$$F_N = \int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz. \quad (7.7)$$

Aunque en el proceso de compresión de cuerpos, tanto el área como la fuerza totales y el número de contactos que se producen crecen de manera exponencial y por tanto rápida, no sucede lo mismo con sus cocientes, ya que estos cambian muy débilmente. Por ejemplo, para el área media de contacto de una aspersion se obtiene

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{A}{N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z) \pi R \cdot (z - h_0)}{\int_{h_0}^{\infty} dz N_0 \Phi(z)}. \quad (7.8)$$

Expresión en la que si se introduce la variable adimensional $\xi = z/l$ y la definición $\xi_0 = h_0/l$, se obtiene

$$\langle \Delta A \rangle = \pi R l \left[\frac{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2/2) \cdot (\xi - \xi_0)}{\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2/2)} \right]. \quad (7.9)$$

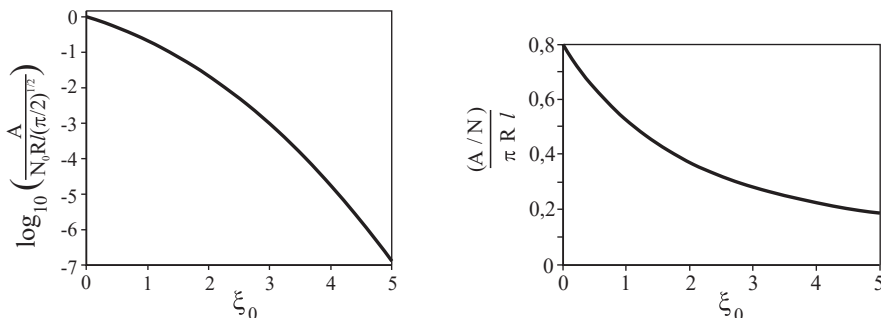


Fig. 7.3 El área de contacto y su valor medio en función de la variable de separación ξ_0 .

De la fig. 7.3 se puede deducir que, mientras que el área de contacto, dada por la ecuación (7.6), cambia en 7 órdenes de magnitud cuando la distancia de separación entre las superficies crece de $\xi_0 = 0$ a $5 \mu\text{m}$, el área media de contacto $\langle \Delta A \rangle$ cambia menos del triple. El valor $\xi_0 = 0$ corresponde a una compresión muy alta, en la que el área de contacto es aproximadamente la mitad del área aparente. Los valores $\xi_0 > 4$ no son realistas, ya que en estos casos se da como mucho un solo contacto. El intervalo típico de cargas promedio para las que las áreas reales de contacto son de 10^{-2} a 10^{-4} veces el área aparente, se alcanza a partir de $\xi_0 = 2,5$ hasta $3,5$. En esta región, el cociente $\langle \Delta A / \pi R l \rangle$ apenas varía del valor $0,3$.

Para el área media de una aspersion, se obtiene, como aproximación razonable,

$$\langle \Delta A \rangle \approx R l. \quad (7.10)$$

La magnitud media de un contacto microscópico permanece prácticamente constante, o varía muy despacio, cuando la fuerza y el área de contacto cambian en un orden de magnitud.

De la misma manera varía el cociente entre el área de contacto total y la fuerza:

$$\frac{A}{F_N} = \frac{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \pi R (z - h_0) dz}{\int_{h_0}^{\infty} N_0 \Phi(z) \frac{4}{3} E^* R^{1/2} (z - h_0)^{3/2} dz} = \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)}{4E^* \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2}} \quad (7.11)$$

De la fig. 7.4 se puede deducir que en la región comprendida entre $\xi_0 = 2,5$ y $3,5$, relevante para los casos de rozamiento a escala macroscópica, el

cociente $\frac{A}{F_N} / \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3\pi}{4E^*}$ apenas varía en torno al valor $1,4$.

El cociente entre el área real de contacto y la fuerza de compresión se puede expresar, en buena aproximación, como

$$\frac{A}{F_N} \approx \left(\frac{R}{l} \right)^{1/2} \frac{3,3}{E^*}. \quad (7.12)$$

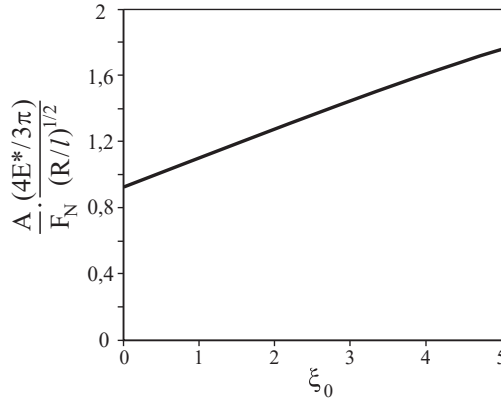


Fig. 7.4 Dependencia del cociente entre el área de contacto y la fuerza de compresión en función de la variable de separación ξ_0 .

El área de contacto es proporcional a la fuerza normal, salvo por un pequeño factor logarítmico.

El esfuerzo medio se obtiene invirtiendo la expresión anterior:

$$\langle \sigma \rangle \approx \frac{F_N}{A} \approx 0,3 \cdot E^* \left(\frac{l}{R} \right)^{1/2}. \quad (7.13)$$

En la literatura reciente sobre mecánica de contacto, se suele encontrar otra expresión para el cociente F_N / A en superficies rugosas. Esta expresión puede «derivarse» de forma cualitativa de la manera que se expone a continuación. El cociente F_N / A puede estimarse, para un único micro-contacto, como el valor medio $\langle \Delta F / \Delta A \rangle$, y este a su vez como $\sqrt{\langle (\Delta F / \Delta A)^2 \rangle}$, salvo por una constante de orden de magnitud 1. Como el cociente F_N / A depende muy débilmente de la fuerza de compresión (o, en otras palabras, de la cercanía entre las superficies), se puede aproximar en el caso de $h_0 = 0$, como:

$$\frac{F_N}{A} \sim \sqrt{\langle (\Delta F / \Delta A)^2 \rangle} \sim \sqrt{\left\langle \left(\frac{4E^*}{3\pi} \right)^2 \frac{z}{R} \right\rangle}. \text{ El radio de curvatura de una aspe-}$$

riedad se calcula como $1/R = -z''$. Por tanto, para el cociente F_N / A se obtiene

$$\frac{F_N}{A} \sim \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle -z \cdot z'' \rangle} = \frac{4E^*}{3\pi} \sqrt{\langle z'^2 \rangle}. \quad (7.14)$$

En la última expresión se ha tenido en cuenta que el valor medio $\langle -z \cdot z'' \rangle$ se define como la integral $-\frac{1}{L} \int_0^L z(x) \cdot z''(x) dx$ sobre una trayectoria L suficientemente

grande. Integrando parcialmente, se obtiene $\frac{1}{L} \int_0^L z'(x) \cdot z'(x) dx$, y por tanto, $\langle z'^2 \rangle$.

Esta es, naturalmente, una aproximación muy burda, aunque el resultado de la expresión (7.14) se puede confirmar mediante un cálculo numérico exacto. Asignando al gradiente del perfil de la superficie el valor cuadrático medio, $\nabla z = \sqrt{\langle z'^2 \rangle}$, se puede reducir la expresión, dando lugar a

$$\frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z, \quad (7.15)$$

donde κ es un coeficiente que depende débilmente de las propiedades estadísticas de la superficie y que, en general, es de magnitud 2. Esta expresión se demostrará más adelante a través de una resolución numérica exacta en el caso de distintos tipos de superficies rugosas y fractales².

El esfuerzo promedio en el área real de contacto se calcula, en buena aproximación, como la mitad del módulo de elasticidad efectivo E^* multiplicado por el gradiente medio del perfil de la superficie ∇z :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{A} \approx \frac{1}{2} E^* \nabla z. \quad (7.16)$$

A un resultado parecido se puede llegar mediante la siguiente y sencilla estimación cualitativa. Si se considera un cuerpo con un perfil superficial $z = \hat{h} \cdot \cos kx \cdot \cos ky$, el radio de curvatura de los máximos de dicha superficie es igual a $1/R = \hat{h}k^2$, el valor medio cuadrático de z es igual a $l = \hat{h}/2$, y el valor medio cuadrático del gradiente de alturas es igual a $\nabla z = \hat{h}k/\sqrt{2}$. Por tanto, se tiene que:

$$\left(\frac{l}{R} \right)^{1/2} = \nabla z. \quad (7.17)$$

Sustituyendo en la expresión (7.13), se llega de nuevo a la expresión (7.16).

Además, se puede estimar la fuerza F_0 para la que el área real de contacto A es igual a la mitad del área aparente:

$$F_0 \approx \frac{A_0}{4} E^* \nabla z. \quad (7.18)$$

2. Es interesante observar que la ecuación (7.15) se puede aplicar, con $\kappa = 2$, también en el caso de superficies abrasivas con asperezas puntiagudas (véase el problema 7 de este capítulo).

El esfuerzo medio aparente, $\hat{\sigma}$, que habrá de aplicarse en este caso, es

$$\hat{\sigma} \approx \frac{1}{4} E^* \nabla z. \quad (7.19)$$

7.2 DEFORMACIÓN PLÁSTICA DE RUGOSIDADES EN EL CONTACTO

Si la presión dada por la ecuación (7.16), es mayor que la dureza σ_0 del material y, por consiguiente,

$$\Psi = \frac{E^* \nabla z}{\sigma_0} > 2, \quad (7.20)$$

las micro-rugosidades se encuentran en pleno régimen plástico. La magnitud Ψ fue introducida por Greenwood y Williamson, la cual se conoce como *índice de plasticidad*. Para valores $\Psi < 2/3$, la superficie se comporta *elásticamente* en el contacto, lo que significa que el que un sistema se comporte de forma elástica o plástica ¡no depende de la fuerza normal aplicada!

Como ejemplo, se estimará la magnitud característica del gradiente del perfil en el contacto entre dos muestras de acero. Partiendo de $E^* \approx 10^{11} \text{ Pa}$ y $\sigma_0 \sim 10^9 \text{ Pa}$, dos muestras de acero en contacto se deforman de manera puramente elástica si $\nabla z < 2 \cdot 10^{-2}$. En el caso de superficies de acabado rugoso, el gradiente del perfil es a menudo mayor, y prácticamente toda la región de contacto se encuentra en el régimen plástico. En cambio, en el caso de superficies muy pulidas, con $\nabla z \ll 2 \cdot 10^{-2}$, la deformación es puramente elástica.

En general, el gradiente ∇z depende de la resolución con la que se caracterice la superficie, es decir ¡la magnitud *depende de la escala!* Si el perfil es diferente según distintas escalas de observación, la superficie correspondiente solo se deformará plásticamente en la escala en la que se cumpla la condición $\nabla z > 2\sigma_0 / E^*$.

La teoría anterior pierde su validez cuando el esfuerzo aumenta en la región de contacto. En el régimen plástico, se puede estimar la magnitud del área de contacto, teniendo en cuenta que el material en dicha región se deforma siempre que el esfuerzo de compresión alcance el valor de dureza del material. Para ello, se supone que el material tiene un comportamiento elástico perfectamente plástico, con una dureza a compresión σ_0 , y la presión es aproximadamente igual en todas las asperidades.

El área de contacto es, por tanto, proporcional a la carga:

$$A \approx F_N / \sigma_0. \quad (7.21)$$

Como ejemplo numérico, se puede considerar un dado de acero toscamente lijado de lado 10 cm, que descansa sobre una plataforma también de acero. Para los

parámetros $\sigma_0 \approx 10^9$ Pa, $F_N \approx 10^2$ N, se obtiene $A = 10^2 / 10^9 \text{ m}^2 = 0,1 \text{ mm}^2$, $A / A_0 = 10^{-5}$. Para un contacto de diámetro típico $10 \text{ }\mu\text{m}$, el número de contactos es $N \approx 10^{-7} / (10^{-5})^2 \approx 1000$.

7.3 CONTACTOS ELÉCTRICOS

Hasta ahora, nuestro interés se ha centrado en el área de contacto real entre dos superficies rugosas. Sin embargo, existen diversos casos en los que no es relevante el área, sino la *longitud* del contacto. Entre estos casos se encuentran los contactos térmicos y eléctricos.

En un contacto eléctrico, la corriente pasa de un cuerpo conductor a otro a través de una región en la que existe un contacto muy estrecho –por regla general, un contacto «a escala atómica». A primera vista puede parecer que la calidad de un contacto eléctrico depende mucho de la topografía de los cuerpos en contacto, y que aquel está sujeto a fuertes fluctuaciones. En esta sección se analizan las razones por las que, no obstante, los contactos eléctricos funcionan de manera muy eficiente en la mayoría de los casos, y se abordará el cálculo de la fuerza de compresión necesaria para generar un contacto determinado.

Un elemento conductor pasivo puede caracterizarse por su resistencia eléctrica R . La magnitud $\Lambda = 1 / R$ se denomina conductancia eléctrica. La resistencia eléctrica de una barra de sección transversal S y longitud L se calcula mediante $R = \rho L / S$, donde ρ es la resistividad del material. Considerando la electrónica más básica se sabe que en una configuración de elementos en serie se suman las resistencias, mientras que en una distribución de elementos en paralelo se suman las corrientes.

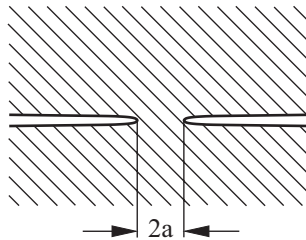


Fig. 7.5 Contacto entre dos semi-espacios conductores.

Si dos cuerpos extensos y conductores, caracterizados por la resistividad ρ , entran en contacto ideal en una región estrecha de radio a (fig. 7.5), la resistencia se determina mayoritariamente por el tamaño de dicho estrechamiento o constricción. Se denomina por tanto *resistencia de constricción*³ R_C , y se calcula según⁴

3. Del inglés, *constriction resistance* (N.d.T.).

4. Anteriormente J.C. Maxwell derivó este resultado: J.C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 3.ª edición. Oxford Press, Oxford (1891).

$$\frac{1}{R_C} = \Lambda = \frac{2a}{\rho}. \quad (7.22)$$

En el caso de existir varios micro-contactos de este tipo separados por una distancia mayor que sus diámetros, $2a_i$, entonces se suman las conductividades de cada unión. Por consiguiente, la suma de los diámetros de los contactos cobra importancia en el cálculo de la conductividad total:

$$\Lambda_{total} = \frac{\sum 2a_i}{\rho} = \frac{L}{\rho}. \quad (7.23)$$

Se asigna L al valor de dicha suma

$$L = \sum 2a_i, \quad (7.24)$$

a la que, por simplicidad, se denominará de ahora en adelante como *longitud de contacto*. Para calcular la longitud de contacto, se necesita acudir a las explicaciones del comienzo del capítulo y apoyarse en la fig. 7.2. El radio de un micro-contacto se calcula mediante

$$a = \sqrt{\frac{\Delta A}{\pi}} = \sqrt{R(z - h_0)}, \quad (7.25)$$

y la longitud de contacto se puede obtener de forma análoga a como se hizo para el área de contacto (ecuación (7.6))

$$L = \sum 2a_i = \int_{h_0}^{\infty} 2N_0 \Phi(z) \sqrt{R(z - h_0)} dz. \quad (7.26)$$

El cociente entre la longitud de contacto y la fuerza normal es igual a

$$\frac{L}{F_N} = \frac{3 \int_{h_0}^{\infty} \Phi(z) (z - h_0)^{1/2} dz}{2E^* \int_{h_0}^{\infty} \Phi(z) (z - h_0)^{3/2} dz} = \frac{3 \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{1/2}}{2E^* l \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2 / 2) \cdot (\xi - \xi_0)^{3/2}}. \quad (7.27)$$

La magnitud $\frac{L}{F_N} \cdot \frac{2E^* l}{3}$ en función de la variable ξ_0 se representa de forma gráfica en la fig. 7.6. En la región comprendida entre $\xi_0 = 2,5$ y $3,5$, de relevancia en las condiciones en las que típicamente el contacto tiene lugar, dicho cociente apenas varía en torno al valor 2,5.

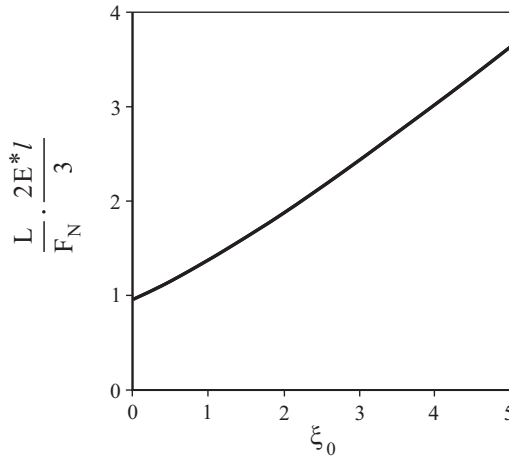


Fig. 7.6 Cociente entre la longitud de contacto y la fuerza normal en función de la variable de separación ξ_0 .

Por tanto, y en buena aproximación, la longitud de contacto se puede expresar como

$$\frac{L}{F_N} \approx \frac{3,7}{E^*l}. \quad (7.28)$$

La longitud de contacto es, a falta de un pequeño factor logarítmico, proporcional a la fuerza normal⁵.

Y según la expresión (7.23), la conductividad eléctrica viene dada por

$$\Lambda_{total} \approx \frac{3,7}{E^* \rho l} F_N. \quad (7.29)$$

De igual modo que la fuerza de rozamiento, la conductividad es proporcional a la fuerza normal y no depende del área (aparente) de contacto. En esta expresión no aparece el radio de curvatura de las asperidades o la inclinación de la superficie. La conductividad depende tan solo de la distribución de alturas de la superficie rugosa, y no de la topografía exacta de la superficie.

Hasta ahora se ha supuesto que los contactos individuales son suficientemente pequeños y se encuentran separados entre sí, lo que implica que se pueden tratar de forma independiente. En cuanto la longitud de contacto L alcanza el valor del diámetro D de los cuerpos en contacto, la conductividad deja de aumentar. Esta

5. Un análisis más detallado mostraría que la longitud de contacto se puede describir mejor mediante la expresión $L = \chi l^{-1/2} (\nabla z)^{-1/4} E^{*-3/4} F_N^{3/4}$, con $\chi \approx 0,63$.

llega al valor de saturación cuando la longitud de contacto alcanza la dimensión lineal de los cuerpos:

$$L \approx \frac{3,7}{E^*l} F_N \approx D. \quad (7.30)$$

La fuerza requerida es igual a

$$F_{N,c} \approx \frac{DE^*l}{3,7}. \quad (7.31)$$

Este resultado se puede comparar con la fuerza dada por la expresión (7.18), en la que la rugosidad superficial se reduce a la mitad: $F_0 \approx \frac{D^2}{4} E^* \nabla z$. El cociente entre ambas magnitudes es igual a

$$\frac{F_{N,c}}{F_0} \approx \frac{4E^*l}{3,7DE^*\nabla z} \approx \frac{l}{D\nabla z}. \quad (7.32)$$

En el caso de conductores de dimensión lineal $D > l/\nabla z$, un contacto eléctrico ideal se alcanza de manera más rápida que un «contacto material». Este es el caso de la mayor parte de los contactos de tamaño superior a 0,1 mm.

7.4 CONTACTOS TÉRMICOS

La conductividad térmica de un contacto circular y su rigidez mecánica son también proporcionales al radio de contacto, y la teoría de contactos eléctricos, esbozada en el apartado anterior, puede aplicarse directamente a ambas magnitudes.

La resistencia térmica es el parámetro clave en el dimensionado de disipadores para semiconductores u otros componentes de circuitos electrónicos. La resistencia térmica se define como $R_T = \Delta T/\dot{Q}$, donde ΔT es la diferencia de temperatura entre los terminales del componente y \dot{Q} es el calor que fluye a través del cuerpo por segundo. La conductancia térmica se define como $\Lambda_T = 1/R_T$. Esta, en el caso de una barra de longitud L y sección transversal S , es igual a $R_T = L/S\lambda$, donde λ es la conductividad térmica. La analogía con el caso del contacto eléctrico es completa, salvo que en este caso, la resistividad ρ debe reemplazarse por $1/\lambda$. De manera similar a la expresión (7.29), se puede por tanto escribir

$$\Lambda_T \approx \frac{3,7\lambda}{E^*l} F_N. \quad (7.33)$$

La conductancia térmica de un contacto rugoso es directamente proporcional a la fuerza de compresión.

7.5 RIGIDEZ MECÁNICA DEL CONTACTO

Si entre un cuerpo elástico y uno rígido se establece un contacto de geometría circular de radio a , entonces la rigidez del mismo en la dirección perpendicular o normal a la superficie es $c_{\perp} = 2aE^*$, y en la dirección paralela a la superficie es $c_{\parallel} = \frac{8Ga}{2-\nu}$, donde G es el módulo de cizalla (véase el siguiente capítulo).

Ambas rigideces son proporcionales al diámetro de contacto. En el caso de varios contactos independientes, las rigideces se suman:

$$c_{\perp, \text{total}} = E^* \sum 2a_i = E^* L, \quad (7.34)$$

$$c_{\parallel, \text{total}} = \frac{4G}{2-\nu} \sum 2a_i = \frac{4GL}{2-\nu}. \quad (7.35)$$

Mediante la expresión (7.28), se obtiene la rigidez normal y trasversal de un contacto rugoso

$$c_{\perp, \text{total}} = 3,7 \frac{F_N}{l}, \quad (7.36)$$

$$c_{\parallel, \text{total}} = \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)} \frac{3,7}{l} F_N \approx 3 \frac{F_N}{l}. \quad (7.37)$$

7.6 SELLANTES

En el ámbito técnico, los sellantes son aquellos elementos o dispositivos cuya función consiste en evitar o limitar el flujo indeseado o la fuga de materia de un compartimento a otro. El grupo más importante es el de los sellantes de contacto, en los que, para ejercer su función, los componentes han de unirse entre sí (fig. 7.7).

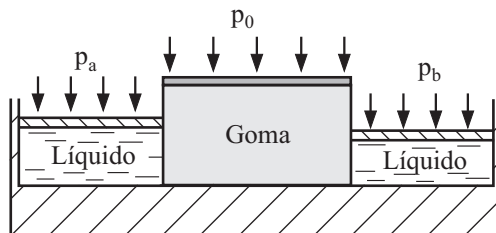


Fig. 7.7 Diagrama esquemático del modo de acción de un sellante.

Debido a la siempre presente rugosidad en las superficies en contacto, estas deben acercarse al menos con una fuerza tal que haga la unión «estanca». Esto se ilustra en la fig. 7.8. Para cargas de compresión bajas, las superficies entran en verdadero contacto en tan solo unas pequeñas zonas, de tal forma que los fluidos o los gases pueden filtrarse entre dichas zonas. Cuanto mayor es la fuerza de compresión, las regiones en contacto se agrandan, hasta llegar a formar un dominio continuo e interconectado. De esta manera, todas las posibles rutas que pudieran dar lugar a fugas en la región de contacto, quedan bloqueadas.

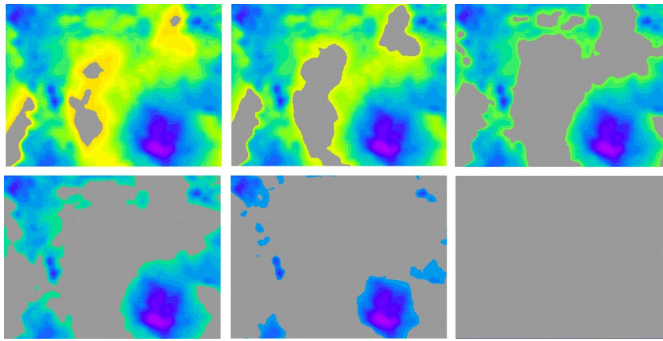


Fig. 7.8 Área de contacto bajo diferentes cargas de compresión. El contacto se vuelve estanco cuando las distintas áreas de contacto real forman un dominio continuo.

Este *límite de percolación* se alcanza por regla general, cuando la rugosidad superficial queda reducida a la mitad. Para ello se requiere un esfuerzo de magnitud dada por la expresión (7.19):

$$\sigma_{\text{estanco}} \approx \frac{1}{4} E * \nabla z. \quad (7.38)$$

Hay que tener en cuenta que el esfuerzo depende de la escala, tal y como ocurre con ∇z . Esto significa que un contacto, cuya rugosidad se haya medido a baja resolución, puede considerarse estanco aun cuando, si se observase más exactamente (es decir, a menor escala), existiesen rutas de escape atravesando la zona de contacto. Un análisis detallado de esta situación conduce al resultado según el cual, la velocidad de filtración de un material a través de un sellante, una vez se haya alcanzado el esfuerzo crítico «macroscópico» (7.38), no es nula, sino que decrece rápidamente de forma exponencial con la carga de compresión (en diez órdenes de magnitud si la carga aumenta en un orden de magnitud).

7.7 RUGOSIDAD Y ADHERENCIA

La rugosidad puede reducir la adherencia de forma drástica. En el capítulo anterior, se introdujo el concepto de «profundidad de indentación negativa crítica»

$d_{crit} = -\left(\frac{3\pi^2\gamma^2R}{16E^{*2}}\right)^{1/3}$ (ecuación (6.24)). Claramente se intuye que la adherencia de superficies rugosas está determinada por el cociente $|d_{crit}|/l$. Si $|d_{crit}| \gg l$:

$$\left(\frac{3\pi^2\gamma^2R}{16E^{*2}}\right)^{1/3} \gg l, \quad (7.39)$$

la rugosidad no juega ningún papel. Teniendo en cuenta la expresión (7.17), esta igualdad se puede expresar de la forma

$$\frac{3^{1/2}\pi\gamma}{4E^*} \gg l \cdot \nabla z. \quad (7.40)$$

En el caso contrario, la fuerza de adhesión prácticamente desaparece. Las simulaciones numéricas muestran que existe un valor crítico del producto $l \cdot \nabla z$, para el cual se anula la fuerza macroscópica de adhesión:

$$[l \cdot \nabla z]_{crit} = \Upsilon \frac{\gamma}{E^*}, \quad (7.41)$$

donde Υ es una constante de orden de magnitud 1.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Determinar la carga de compresión necesaria para que, entre dos placas planas de cobre de rugosidad $l = 1 \mu m$, se establezca un contacto eléctrico caracterizado por una resistencia $R = 0,1 m\Omega$.

Resolución: El módulo de elasticidad del cobre es aproximadamente $E \approx 10^{11} Pa$, el coeficiente de Poisson $\nu \approx 0,33$, y la resistividad $\rho \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$. El módulo de elasticidad efectivo E^* resulta ser

$$E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \approx \frac{10^{11}}{2(1-0,1)} Pa \approx 0,56 \cdot 10^{11} Pa. \text{ De la igualdad (7.29), la cual}$$

se puede escribir en la forma $\frac{1}{R} = \frac{3,7}{E^* \rho l} F_N$, se tiene que

$$F_N = \frac{E^* \rho l}{3,7R} \approx \frac{0,56 \cdot 10^{11} Pa \cdot 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot 10^{-6} m}{3,7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \Omega} \approx 2,7 N.$$

Problema 2: Calcular el esfuerzo de compresión necesario para establecer un contacto ideal entre un cuerpo elástico de superficie ondulada según $z = \hat{h} \cos(kx)$ y un plano rígido.

Resolución: Si las superficies se adhiriesen sin necesidad de un esfuerzo externo, el esfuerzo normal en la superficie sería igual a

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$$

(véase el problema 1 del capítulo 3). Si se aplica un esfuerzo normal $-\sigma_0$, esto daría lugar, por el principio de linealidad, al siguiente esfuerzo normal sobre la superficie:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx - \sigma_0.$$

Dicho esfuerzo puede alcanzarse por pura compresión, sin necesidad de adherencia, cuando $\sigma_{zz} < 0$ y por tanto,

$$\sigma_0 > \frac{1}{2} E^* \hat{h} k.$$

En este caso, se sabe que $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$, y por consiguiente la igualdad puede escribirse de la forma $\sigma_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \nabla z$ (compárese este esfuerzo con el de la expresión (7.38), el esfuerzo necesario para producir un contacto estanco).

Problema 3: Determinar el esfuerzo de compresión necesario para generar un contacto ideal entre un cuerpo elástico de superficie ondulada según $z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky)$ (fig. 7.9) y un plano rígido.

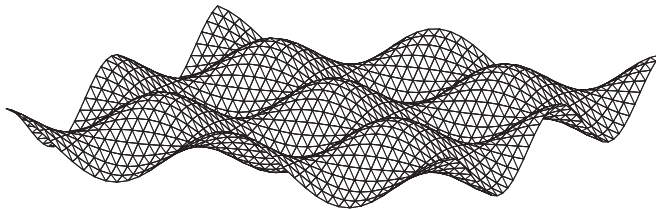


Fig. 7.9 Superficie ondulada en dos dimensiones de un cuerpo elástico.

Resolución: En el problema 1 del capítulo 3, se encontró que la deformación de la superficie $u_z = \hat{h} \cos kx$ da lugar a la distribución de esfuerzos normales $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* \hat{h} k \cos kx$. Este resultado puede también expresarse de forma independiente de las coordenadas. Así, una deformación superficial con forma

co-sinusoide, $u_z(\vec{r})$, (donde \vec{r} es un vector bidimensional) da lugar a la distribución de esfuerzos $\sigma_{zz} = \frac{1}{2} E^* |\vec{k}| u_z(\vec{r})$. Por consiguiente, la ondulación del enunciado puede expresarse como suma de dos funciones coseno:

$$z = \hat{h} \cos(kx) \cos(ky) = \frac{1}{2} \hat{h} (\cos k(x+y) + \cos k(x-y)).$$

Esta deformación da lugar al esfuerzo normal

$$\sigma_{zz} = \frac{\sqrt{2}}{2} E^* k u_z(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} E^* k \hat{h} \cos(kx) \cos(ky).$$

El esfuerzo necesario para alcanzar un contacto completo es, por tanto, igual a

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} E^* \hat{h} k.$$

El valor cuadrático medio del gradiente es igual a $\nabla z = \hat{h} k / \sqrt{2}$. Por consiguiente, $\hat{\sigma} = E^* \nabla z$.

Problema 4: Determinar el esfuerzo de compresión necesario para generar un contacto entre un plano rígido y un cuerpo elástico con la superficie ondulada de la forma $z = \hat{h} \cos(kx) + \hat{h}_1 \cos(k_1 x)$ donde $k_1 \gg k$ y $\hat{h}_1 \ll \hat{h}$ (fig. 7.10).



Fig. 7.10 Superficie que presenta ondulaciones a dos escalas distintas.

Resolución: Las irregularidades de oscilación alta se «aplastan» cuando la presión alcanza $\sigma_{0,1} > \frac{1}{2} E^* \hat{h}_1 k_1$ en las zonas más profundas de las irregularidades de oscilación baja (véase el problema anterior). Utilizando la expresión del esfuerzo del problema 2 y el principio de superposición, se obtiene el esfuerzo crítico

$$\sigma_c = \frac{1}{2} E^* (\hat{h} k + \hat{h}_1 k_1).$$

Problema 5: El sistema esquematizado en la fig. 7.11 consiste en muelles (número total N_0) de la misma rigidez c , que pueden adherirse al entrar en contacto. Sus propiedades adhesivas están caracterizadas por la longitud Δd_{crit} , la máxima a la que un muelle puede llegar a estirarse antes de desprenderse. La distribución de alturas de los muelles es $\Phi(z) = \frac{1}{l} e^{-\frac{z}{l}}$.

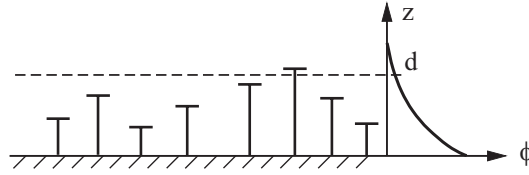


Fig. 7.11 Modelo de muelles para una superficie estocástica elástica.

En primer lugar, se comprime el sistema con un plano rígido, aplicando la fuerza F_N , hasta una distancia d . Determinar la fuerza de adhesión en función de la carga de compresión.

Resolución: La compresión mediante la fuerza F_N hará que entren en contacto con el plano aquellos muelles para los que $z > \tilde{d}$, donde \tilde{d} puede determinarse de la siguiente igualdad:

$$F_N = \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - \tilde{d}) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} l.$$

Si el plano rígido se traslada hasta la altura d , entonces permanecerán en contacto todos aquellos muelles cuya longitud en ausencia de deformación sea menor que $d - \Delta d_{crit}$, pero no menor que \tilde{d} . La fuerza ejercida sobre el plano es igual a

$$F = \begin{cases} \int_{\tilde{d}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (l + \tilde{d} - d), & \text{para } d - \Delta d_{crit} < \tilde{d} \\ \int_{d - \Delta d_{crit}}^{\infty} \frac{N_0}{l} e^{-\frac{z}{l}} c (z - d) dz = N_0 c e^{-\frac{\Delta d_{crit} - d}{l}} (l - \Delta d_{crit}), & \text{para } d - \Delta d_{crit} > \tilde{d} \end{cases}.$$

Para $l > \Delta d_{crit}$ la fuerza que actúa sobre el plano es *siempre positiva*, y por tanto *no existe adherencia macroscópica*. Para $l < \Delta d_{crit}$ la fuerza alcanza el valor máximo negativo cuando $d = \tilde{d} + \Delta d_{crit}$. Dicho valor es la fuerza de adhesión:

$$|F_A| = N_0 c e^{-\frac{\tilde{d}}{l}} (\Delta d_{crit} - l).$$

El cociente entre la fuerza de adhesión y la carga de compresión

$$\frac{|F_A|}{F_N} = \frac{\Delta d_{crit} - l}{l}$$

no depende en este modelo de la carga de compresión, y se denomina *coeficiente de adherencia*. Para $l = \Delta d_{crit}$, la fuerza de adhesión es cero.

Problema 6: De acuerdo con la pregunta planteada en el problema 5, calcular de nuevo la fuerza que actúa sobre el plano, en esta ocasión para la siguiente distribución de alturas

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} \cdot r$$

Resolución: La fuerza se calcula de

$$F_N = \int_{d-\Delta d_{crit}}^{\infty} N_0 \left(\frac{1}{2\pi l^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{2l^2}} c(z-d) dz.$$

Los resultados de la integración numérica se muestran en la fig. 7.12 como gráficas de $F_N(d)$ en función de d/l . Para $\Delta d_{crit} < 0,3l$ no existe distancia alguna para la que F_N sea negativa (no existe adherencia macroscópica).

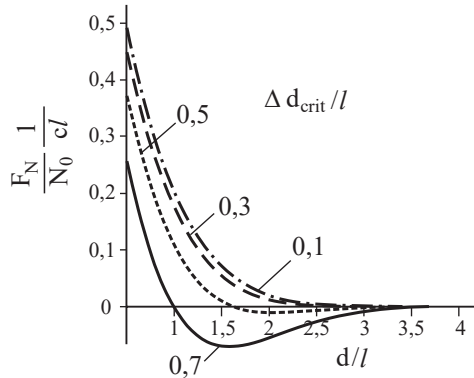


Fig. 7.12 Dependencia de la carga normal con la distancia normalizada frente a $\frac{\Delta d_{crit}}{l}$.

Problema 7. Estimar la presión –o esfuerzo– promedio sobre el área de contacto real entre un semi-espacio elástico y una superficie rugosa constituida por puntas cónicas con ángulos de inclinación idénticos e iguales a θ (fig. 7.13)

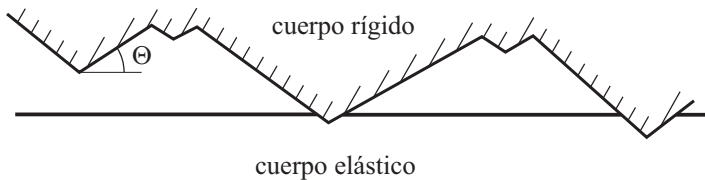


Fig. 7.13 Contacto entre una superficie rugosa constituida por asperezas en forma de cono y un cuerpo elástico.

Resolución: De las igualdades (5.37) y (5.39) se tiene que, al imprimir una punta cónica rígida sobre un semi-espacio elástico, se establece la siguiente relación entre la fuerza normal F_N y el ángulo de contacto a :

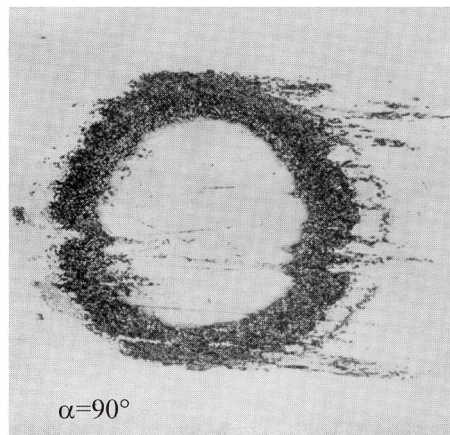
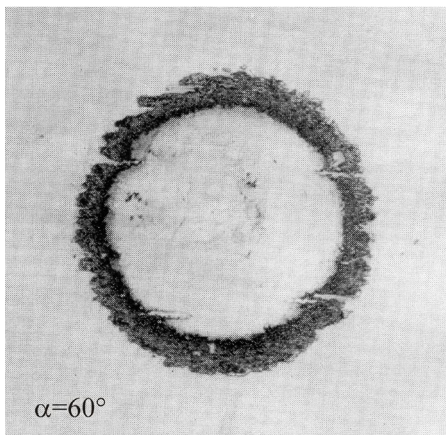
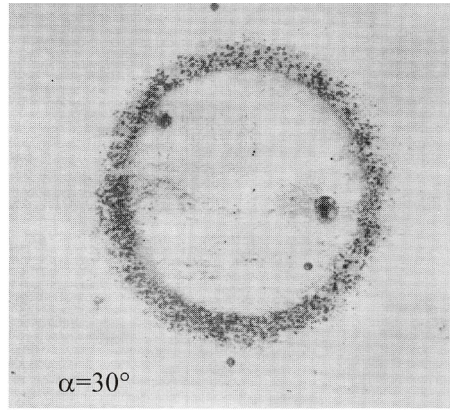
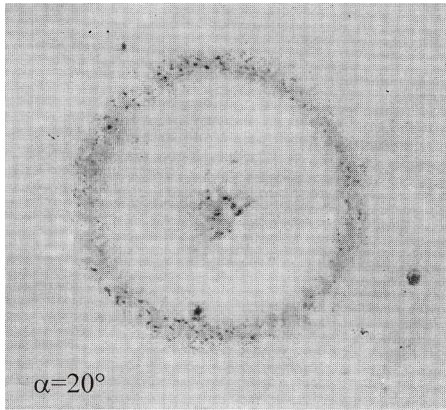
$$F_N = \frac{1}{2} E^* \pi a^2 \tan \theta.$$

Por tanto, el esfuerzo promedio en un micro-contacto viene dado por:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{\pi a^2} = \frac{1}{2} E^* \tan \theta = \frac{1}{2} E^* \nabla z,$$

donde $\nabla z = \tan \theta$ (constante, en este caso) es la pendiente o inclinación del perfil de la superficie. Este esfuerzo no depende de la profundidad de indentación y es por tanto válido como expresión del esfuerzo promedio en toda el área de contacto. Se concluye, pues, que también para el caso de superficies abrasivas con asperezas puntiagudas se obtiene el mismo resultado (7.16) que para el contacto entre superficies de rugosidad aleatoria.

8. EL CONTACTO TANGENCIAL



En todos los casos de contacto tratados hasta ahora, se ha asumido que las superficies de los cuerpos en contacto son absolutamente lisas y exentas de rozamiento. En consecuencia, no se generan esfuerzos cortantes en la región de contacto. En el caso de que además se establecieran puntos de contacto en dirección tangencial, las fuerzas de rozamiento y de adhesión en el contacto cobrarían importancia. En este capítulo, se analizan los esfuerzos cortantes, o tensiones de cizalla, en los contactos tangenciales.

Hay que tener en cuenta que, generalmente, los esfuerzos cortantes aparecen también en contactos normales con rozamiento. Si dos cuerpos con propiedades elásticas diferentes entran en contacto, se establece un desplazamiento relativo en dirección tangencial como resultado de la contracción transversal producida por el propio contacto. En consecuencia, los esfuerzos por rozamiento entran en juego en las superficies en contacto. Solo en el caso del contacto normal entre dos cuerpos con idénticas propiedades elásticas, los esfuerzos cortantes no juegan

ningún papel, puesto que ambos cuerpos se expanden lateralmente de la misma manera. Por consiguiente, los esfuerzos cortantes tampoco aparecen en el caso de que se establezca adherencia, o agarre, en el contacto.

En este capítulo se considerará primero el caso del contacto tangencial en el que la adherencia es completa (modo de no deslizamiento o «pegado»), para luego extender el tratamiento a aquellos contactos en los que tiene lugar deslizamiento, bien sea parcial o total.

8.1 DEFORMACIÓN DE UN SEMI-ESPACIO ELÁSTICO BAJO LA ACCIÓN DE FUERZAS TANGENCIALES

El contacto a analizar se encuentra esquematizado en la fig. 8.1: dos sólidos elásticos se comprimen entre sí y seguidamente se desplazan en dirección tangencial. En primer lugar, se supondrá que el esfuerzo tangencial no genera deslizamiento en el contacto. Se parte, por tanto, del hecho de que los cuerpos se hallan «pegados». Otro caso para el que no se produce deslizamiento es en el que los coeficientes de fricción son infinitamente grandes.

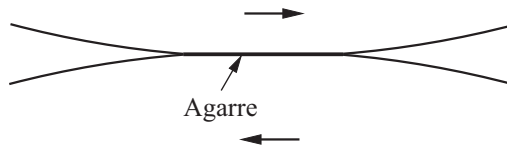


Fig. 8.1 Contacto tangencial entre dos cuerpos sólidos elásticos.

Como en el caso del contacto normal, se trabajará con la «aproximación de semi-espacio». La inclinación de las superficies de los cuerpos en contacto debe ser pequeña en la región de interés.

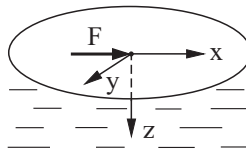


Fig. 8.2 Fuerza individual tangente a la superficie de un semi-espacio.

Como paso preliminar, se considera la deformación de un semi-espacio elástico bajo la acción de una fuerza actuando en un punto de la superficie, que se tomará como origen de coordenadas. La fuerza \vec{F} tiene solo una componente en la dirección x . El desplazamiento de la superficie ($z = 0$) viene dado por las expresiones siguientes¹

1. L.D. Landau, E.M. Lifschitz. *Teoría de la Elasticidad*. Curso de Física Teórica, vol. 7, 1.^a edición. Editorial Reverté, Barcelona (2009).

$$\begin{aligned}
 u_x &= F_x \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1-\nu) + \frac{2\nu x^2}{r^2} \right\} \frac{1}{r} \\
 u_y &= F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{2\nu}{r^3} xy \\
 u_z &= F_x \frac{1}{4\pi G} \cdot \frac{(1-2\nu)}{r^2} x \quad ,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde G es el módulo de cizalla.

8.2 DEFORMACIÓN DE UN SEMI-ESPACIO ELÁSTICO BAJO LA ACCIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS TANGENCIALES

1. Considérese ahora el desplazamiento de la superficie sobre la que actúa la siguiente distribución de fuerzas tangenciales (en la dirección del eje x)

$$\sigma_{zx}(x, y) = \tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{-1/2} , \tag{8.2}$$

con $r^2 = x^2 + y^2 \leq a^2$. El desplazamiento tangencial en la dirección x se calcula según

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \cdot 2 \iint_A \left\{ \frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(x-x')^2}{s^3} \right\} \tau(x', y') dx' dy' \tag{8.3}$$

con

$$s^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 . \tag{8.4}$$

La integración proporciona el desplazamiento dentro de la región afectada² ($r \leq a$)

$$u_x = \frac{\pi(2-\nu)}{4G} \tau_0 a = const . \tag{8.5}$$

Una sencilla reflexión sobre la simetría del problema lleva a concluir que

$$u_y = 0 . \tag{8.6}$$

2. Los detalles pueden encontrarse en: K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. 6.ª reimpresión de la 1.ª edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).

Por el contrario, u_z no es cero sino una función impar con respecto a la coordenada x que, para el caso de una única fuerza, se deduce la expresión (8.1). Dicha propiedad se da también para cualquier distribución simétrica de esfuerzos. La fuerza total en la región de contacto se calcula como

$$F_x = \int_0^a \tau(r) 2\pi r dr = 2\pi\tau_0 a^2. \quad (8.7)$$

2. De manera análoga, se puede mostrar que la distribución de esfuerzos

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2}, \quad (8.8)$$

produce un desplazamiento de los puntos de la superficie en la región afectada ($r \leq a$) dado por

$$u_x = \frac{\tau_0 \pi}{32Ga} \left[4(2 - \nu)a^2 - (4 - 3\nu)x^2 - (4 - \nu)y^2 \right]. \quad (8.9)$$

La fuerza total es igual a

$$F_x = \frac{2}{3} \pi \tau_0 a^2. \quad (8.10)$$

3. Si a un cuerpo elástico, en una franja de anchura $2a$ (fig. 8.3), se le somete en la dirección x al siguiente esfuerzo cortante

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - x^2 / a^2\right)^{1/2}, \quad (8.11)$$

el desplazamiento de los puntos de la superficie viene dado por

$$u_x = \text{const} - \tau_0 \frac{x^2}{aE^*}. \quad (8.12)$$

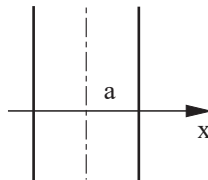


Fig. 8.3 Banda de anchura $2a$, sobre la que se aplica la distribución de esfuerzos cortantes definida por la expresión (8.11).

4. Un caso especial del esfuerzo tangencial es la *torsión*. Si en cada punto de un área de contacto circular de radio a , se establecen fuerzas tangenciales perpendiculares al radio polar tales que

$$\sigma_{zx} = -\tau(r) \sin \varphi, \quad \sigma_{zy} = \tau(r) \cos \varphi \quad (8.13)$$

donde

$$\tau(r) = \tau_0 \frac{r}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (8.14)$$

entonces las componentes polares del desplazamiento de los puntos de la superficie vienen dadas por³

$$u_\varphi = \frac{\pi \tau_0 r}{4G}, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0. \quad (8.15)$$

Por consiguiente, la región de contacto gira exactamente un ángulo igual a $\pi \tau_0 / 4G$, y la distribución de esfuerzos se genera a partir de una torsión producida por un troquel, o indentador cilíndrico, adherido a la superficie. El par de torsión es igual a

$$M_z = \frac{4}{3} \pi a^3 \tau_0. \quad (8.16)$$

8.3 EL CONTACTO TANGENCIAL SIN DESLIZAMIENTO

Ahora se discutirá el problema del contacto tangencial. Considérense dos cuerpos contiguos en los que se produce, en sendas regiones circulares de radio a , un desplazamiento constante de magnitud u_x y $-u_x$, en uno y otro respectivamente. Para ello, es necesario aplicar la distribución de esfuerzos (8.2) por uno de los lados, y la misma pero con signo negativo, por el otro. Si se uniesen ambas regiones, estas se mantendrían en equilibrio por el principio de acción-reacción. Aquí es importante tener en cuenta que las superficies a unir también encajarían perfectamente en la dirección z , dado que el desplazamiento producido en la dirección x es también antisimétrico con respecto al eje z . Esta reflexión lleva a concluir que, cuando tiene lugar un desplazamiento tangencial relativo de magnitud $2u_x$ entre dos cuerpos *con las mismas propiedades elásticas*, aparece la distribución de esfuerzos (8.2):

$$\tau(x, y) = \tau_0 \left(1 - r^2 / a^2 \right)^{-1/2}. \quad (8.17)$$

3. K. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001.

Hay que tener en cuenta, que el esfuerzo cortante en el borde de la unión se aproxima a infinito, mientras que el esfuerzo axial se aproxima a cero. Esto significa que, en la mayoría de los casos, la condición de no deslizamiento o «pegado» no se cumple en la región cercana al borde, y se produce un cierto desplazamiento relativo. Este movimiento parcial, o pseudo-deslizamiento, se discute en la siguiente sección.

Se define la *rigidez a cortadura* o *rigidez a cizalladura* c_{\parallel} de un contacto entre dos cuerpos elásticos, al cociente entre la fuerza tangencial y el desplazamiento tangencial relativo entre ambos cuerpos. De las igualdades (8.5) y (8.7) se obtiene, para la rigidez a cortadura,

$$c_{\parallel} = \frac{F_x}{2u_x} = \frac{4Ga}{(2-\nu)} = 2G^* a, \quad (8.18)$$

donde se ha introducido el módulo efectivo de cizalla $G^* = \frac{2G}{(2-\nu)}$. Al igual que en el caso de la rigidez normal, la rigidez a cortadura (8.18) es proporcional al *diámetro* del área de contacto.

Finalmente se debe también constatar que las igualdades mostradas anteriormente *no son exactamente* aplicables al contacto entre un semi-espacio elástico y un cuerpo rígido, ya que en este caso, los desplazamientos en la dirección vertical desaparecen, lo cual no sucede al aplicarse la distribución de esfuerzos (8.2). Sin embargo, dichas igualdades son buenas aproximaciones. Para un contacto entre dos cuerpos elásticos de constantes elásticas G_1, G_2, ν_1, ν_2 , la rigidez a cortadura se puede expresar, en buena aproximación, como

$$c_{\parallel} = \frac{F_x}{u_{rel}} \approx 2G^* a \quad (8.19)$$

donde

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2-\nu_1}{4G_1} + \frac{2-\nu_2}{4G_2}. \quad (8.20)$$

u_{rel} es, en la ecuación (8.19), el desplazamiento relativo entre ambos cuerpos. En el caso de dos cuerpos con propiedades elásticas distintas, la igualdad (8.5) adopta la forma

$$u_{rel} \approx \frac{\pi\tau_0 a}{G^*}. \quad (8.21)$$

8.4 EL CONTACTO TANGENCIAL CON DESLIZAMIENTO

Considérese ahora un tipo de problema mixto de contacto, caracterizado por la acción simultánea de fuerzas normales y tangenciales. Por ejemplo, dos esferas se comprimen entre sí con una fuerza normal F_N , y seguidamente se les aplica una fuerza F_x en dirección tangencial. Se asume que entre ambos cuerpos existe rozamiento seco, y que este sigue la ley de fricción de Coulomb: El esfuerzo máximo de rozamiento estático, τ_{\max} , es igual al esfuerzo de rozamiento dinámico y este a su vez es igual al esfuerzo normal o presión, p , multiplicado por el coeficiente de fricción μ

$$\tau_{\max} = \mu p, \quad \tau_d = \mu p. \quad (8.22)$$

La condición de no deslizamiento se expresa como

$$\tau \leq \mu p. \quad (8.23)$$

Suponiendo que los cuerpos se adhieren completamente en la región de contacto, se obtienen las siguientes expresiones para las distribuciones de esfuerzos axiales, o presiones, y de esfuerzos tangenciales

$$p = p_0 \left(1 - (r/a)^2\right)^{1/2}, \quad F_N = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2, \quad (8.24)$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - (r/a)^2\right)^{-1/2}, \quad F_x = 2\pi \tau_0 a^2. \quad (8.25)$$

Estas distribuciones se muestran en la fig. 8.4. Dado que el esfuerzo normal tiende a cero y el esfuerzo tangencial a infinito en el borde de la región de contacto, la condición (8.23) *nunca se cumple* en las inmediaciones del borde, ya que en dicha región existe siempre una cantidad finita de deslizamiento, o pseudo-deslizamiento, incluso cuando los esfuerzos tangenciales son pequeños. Por el contrario, la condición (8.23) siempre se cumple en el interior de la región de contacto para fuerzas tangenciales suficientemente pequeñas. En general, puede decirse que la región de contacto se divide en una zona interna no deslizante, o zona de adherencia, y una zona periférica deslizante, o zona de deslizamiento (fig. 8.5). El radio c de la frontera que separa las zonas deslizante y no deslizante, se determina a partir de la condición $\tau = \mu p$.

Evidentemente, la distribución de esfuerzos cortantes (8.25) en el contacto es solo válida si se asume que no hay desplazamiento en el contacto. Si bien esta distribución permite demostrar que dicha suposición es contradictoria y que, por tanto, siempre se da pseudo-deslizamiento en el borde de la región de contacto, no nos permite calcular la nueva distribución de esfuerzos ni el radio de la zona no deslizante.

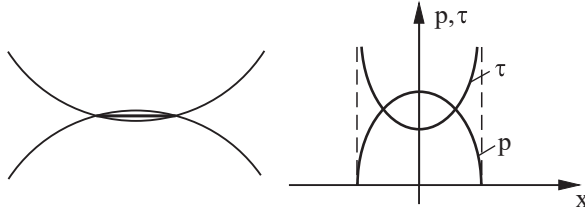


Fig. 8.4 Esfuerzos normales y tangenciales en un contacto.

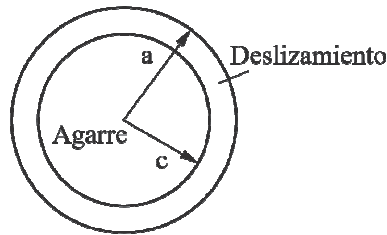


Fig. 8.5 Zonas deslizante –o de deslizamiento– y no deslizante –o de adherencia o agarre– de un contacto tangencial circular.

Como en el caso de otros muchos «problemas clásicos de contacto», también aquí es posible generar correctamente una distribución de esfuerzos mediante la combinación de distribuciones conocidas. En este caso, bastaría una superposición de dos distribuciones de esfuerzos de «tipo hertziano», dados por la expresión (8.8), para cumplir todas las condiciones del contacto. Junto con las distribuciones del tipo (8.25), las distribuciones de esfuerzos de tipo hertziano pueden considerarse como los «ladrillos» universales de la Mecánica de Contacto, mediante los cuales se pueden resolver todos los problemas clásicos de esta disciplina. Se busca pues una distribución de esfuerzos tangenciales en el contacto de la forma

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \quad (8.26)$$

donde

$$\tau^{(1)} = \tau_1 \left(1 - r^2 / a^2\right)^{1/2} \quad (8.27)$$

y

$$\tau^{(2)} = -\tau_2 \left(1 - r^2 / c^2\right)^{1/2}, \quad (8.28)$$

(fig. 8.6). La distribución del desplazamiento superficial que de ella resulta es, según la expresión (8.9), igual a

$$u_x = \frac{\tau_1 \pi}{32Ga} \left[4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right] - \frac{\tau_2 \pi}{32Gc} \left[4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right]. \quad (8.29)$$

La distribución de esfuerzos, o presiones, viene dada por la expresión hertziana (8.24).

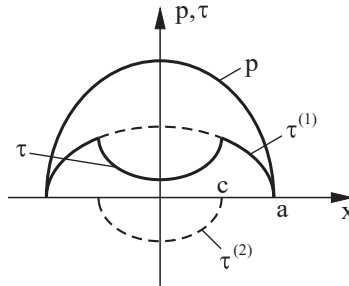


Fig. 8.6 Esfuerzo normal y tangencial en un contacto tangencial.

La presencia de adherencia dentro del círculo de radio c implica que, en dicha zona, el desplazamiento es *constante*:

$$u_x(r) = \text{const}, \quad \text{si } r < c. \quad (8.30)$$

La presencia de deslizamiento en la región restante, o pseudo-deslizamiento, implica que en ella se cumple la ley de rozamiento de Coulomb:

$$\tau(r) = \mu p(r), \quad \text{si } c < r < a. \quad (8.31)$$

La segunda condición lleva a concluir que

$$\tau_1 = \mu p_0. \quad (8.32)$$

De la condición (8.30) se deriva que

$$\tau_2 = \mu p_0 \frac{c}{a}. \quad (8.33)$$

El desplazamiento en la zona no deslizante es igual a

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu p_0}{8Ga} (a^2 - c^2). \quad (8.34)$$

Antes de producirse deslizamiento total ($c = 0$), los cuerpos pueden desplazarse en la dirección tangencial un máximo de

$$u_x = \frac{(2-\nu)\pi\mu p_0 a}{8G} = \frac{3(2-\nu)\mu F_N}{16Ga}. \quad (8.35)$$

La fuerza total tangencial en la región de contacto se calcula a partir de las expresiones (8.26), (8.27) y (8.28), dando como resultado

$$F_x = \frac{2}{3}\pi(\tau_1 a^2 - \tau_2 c^2) = \frac{2\pi}{3a}\mu p_0(a^3 - c^3). \quad (8.36)$$

Teniendo en cuenta la relación $F_N = \frac{2}{3}p_0\pi a^2$, la expresión puede escribirse de la siguiente manera

$$F_x = \mu F_N \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^3\right). \quad (8.37)$$

Por consiguiente, para el radio de la zona no deslizante se obtiene

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3}. \quad (8.38)$$

Como es de esperar, la fuerza tangencial, bajo cuya acción se produce deslizamiento total, es igual a $F_x = \mu F_N$. Se debe no obstante subrayar que, justo antes de alcanzar dicho valor de fuerza, ya existe pseudo-deslizamiento en la mayor parte de la zona de contacto. Por tanto, en el momento en el que se alcanza la fuerza $F_x = \mu F_N$, no se está frente a una transición de un estado de no deslizamiento a otro de deslizamiento, sino frente a una transición desde un estado de deslizamiento parcial a otro de deslizamiento total o completo.

Se ha mostrado que, aplicando cualquier fuerza tangencial de pequeña magnitud sobre un contacto hertziano previamente producido por una fuerza normal, se genera una zona deslizante en forma de anillo. Si al material se le somete a un esfuerzo periódico, aquel se desgastará solo en esa zona. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *fretting*.

8.5 AUSENCIA DE DESLIZAMIENTO EN UN INDENTADOR CILÍNDRICO RÍGIDO

Si un semi-espacio elástico se comprime mediante un indentador cilíndrico rígido y plano, la distribución de esfuerzos normales, o presiones, viene dada por $p = p_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$. Si a ello le sigue la aplicación de una fuerza tangencial, se origina la distribución de esfuerzos cortantes $\tau = \tau_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$. Por tanto, la condición de no deslizamiento $\tau < \mu p$ o bien se cumple en toda la región de contacto, o no se cumple. En este caso no existe zona deslizante.

8.6 EL CONTACTO TANGENCIAL EN CUERPOS CON SIMETRÍA AXIAL

En la sección 5.6 del capítulo 5 se presentó un método de reducción válido para cualquier caso de contacto normal con simetría axial, mediante el uso de una construcción unidimensional tipo Winkler, también llamada cimentación de tipo Winkler (método de reducción de dimensión, MRD). La propiedad básica que hace posible dicha reducción es la relación de proporcionalidad entre la rigidez incremental y el diámetro del área de contacto. Esta propiedad se da tanto en los contactos normales como en los contactos tangenciales. Los principios de reducción de la dimensionalidad pueden, por tanto, aplicarse directamente a los contactos tangenciales. En este capítulo se supone que los materiales son «elásticamente equivalentes», para los cuales se cumple la condición

$$\frac{1-2\nu_1}{G_1} = \frac{1-2\nu_2}{G_2} \quad (8.39)$$

Esta condición permite desacoplar los problemas de contacto tangencial de los problemas de contacto normal⁴.

La rigidez tangencial de un contacto circular de diámetro D entre dos semi-espacios elásticos viene dada por la igualdad (8.19):

$$k_x = DG^*, \quad (8.40)$$

donde G^* viene definido por la expresión (8.20). Esta rigidez se genera de forma trivial a partir de las rigideces tangenciales de los muelles que constituyen la cimentación, y que vienen dadas por

$$\Delta k_x = G^* \Delta x, \quad (8.41)$$

donde Δx es la distancia entre los muelles. En esta sección se mostrará cómo se pueden caracterizar de forma exacta los casos de contacto tangencial con rozamiento de tipo Coulomb entre dos perfiles de *simetría rotacional cualesquiera*, usando para ello una cimentación tipo Winkler de rigidez normal, dada por la expresión (5.51) definida en el capítulo 5, y de rigidez tangencial, dada por la ecuación (8.41). En lo que sigue, se describe el procedimiento de cálculo únicamente. La demostración de dicho procedimiento se muestra en el apéndice D.

Considérese un indentador con simetría axial de perfil $z = f(r)$, el cual se presiona sobre un semi-espacio elástico con la fuerza normal F_N , y seguidamente se le aplica una fuerza tangencial en la dirección x , F_x . Se supone que en el

4. K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).

contacto, se cumple la ley de rozamiento de Coulomb en su forma más sencilla. Así, mientras el esfuerzo tangencial, τ , sea menor que el producto del coeficiente de fricción, μ , y el esfuerzo normal o presión, p , las superficies se encuentran en modo «pegado» o de no deslizamiento. Tras la aparición del deslizamiento, el esfuerzo tangencial es constante e igual a μp :

$$\tau(r) \leq \mu p(r), \text{ en el modo de no deslizamiento,} \quad (8.42)$$

$$\tau(r) = \mu p(r), \text{ en el modo de deslizamiento.} \quad (8.43)$$

Al aplicar una fuerza tangencial se forma, en el borde del área de contacto, una zona deslizante en forma de anillo, la cual se extiende hacia el interior conforme la fuerza aumenta, hasta llegar al deslizamiento total. Al radio interno de la zona deslizante (o al radio de la zona no deslizante), se le denominará c .

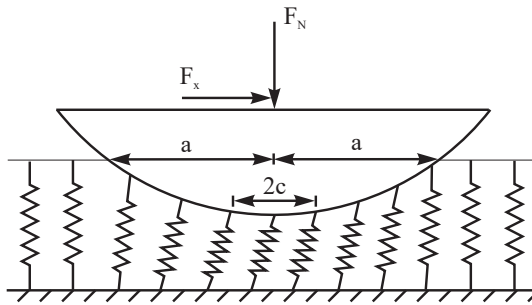


Fig. 8.7 Modelo que representa el contacto tangencial.

El MRD se aplica en el contacto tangencial de la forma siguiente. En primer lugar, se calcula el perfil modificado $g(x)$ con ayuda de la transformada (5.52). En segundo lugar, este perfil se presiona con la fuerza normal F_N sobre la cimentación Winkler, caracterizada por las rigideces (5.51) y (8.41), y seguidamente se desplaza tangencialmente una magnitud $u_x^{(0)}$ (fig. 8.7). Los muelles se agarrarán al indentador y se desplazarán junto a él, siempre y cuando la fuerza tangencial $\Delta F_x = k_x u_x^{(0)}$ en cada muelle sea menor que $\mu \Delta F_z$. Una vez que se alcanza la fuerza de rozamiento estático, los muelles comienzan a deslizarse, y la fuerza se mantiene constante e igual a $\mu \Delta F_z$. El procedimiento puede también formularse de manera incremental, de forma que puede aplicarse para cualquier secuencia de cargas. Así, para pequeños desplazamientos del indentador, $\Delta u_x^{(0)}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \Delta u_x(x) &= \Delta u_x^{(0)}, \quad \text{si } |k_x u_x(x)| < \mu \Delta F_z \\ u_x(x) &= \pm \frac{\mu \Delta F_z(x)}{k_x}, \quad \text{en modo de deslizamiento} \end{aligned} \quad (8.44)$$

El signo de la última igualdad depende del sentido en el que se mueva el indentador. En tanto se registren los cambios sucesivos de posición del indentador, se pueden determinar de manera unívoca los desplazamientos de todos los muelles en la región de contacto; de este modo, se conocerán todas las fuerzas tangenciales

$$\Delta F_x = k_x u_x(x) = G^* \Delta x \cdot u_x(x) \quad (8.45)$$

y las densidades lineales de carga

$$q_x(x) = \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = G^* u_x(x). \quad (8.46)$$

La distribución de los esfuerzos tangenciales $\tau(r)$, así como la de los desplazamientos $u_x(r)$ en el contacto tridimensional, vienen determinados por expresiones absolutamente análogas a las dadas en (5.59) y (5.60)⁵:

$$\tau(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'_x(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (8.47)$$

$$u_x(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{u_x(x) dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \quad (8.48)$$

Se aplicará este procedimiento al caso de un indentador que se desplaza con respecto a su posición de equilibrio en una determinada dirección. El radio c de la zona no deslizante se obtiene de la condición por la que la fuerza tangencial, $k_x u_x^{(0)}$, es igual al producto de μ por la fuerza normal, $k_z u_z(c)$:

$$G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - g(c)). \quad (8.49)$$

El desplazamiento tangencial es igual a

$$u_x(x) = \begin{cases} u_x^{(0)}, & \text{para } x < c \\ \mu \left(\frac{E^*}{G^*} \right) (d - g(x)), & \text{para } c < x < a \end{cases}, \quad (8.50)$$

la densidad lineal de carga es igual a

$$q_x(x) = \begin{cases} G^* u_x^{(0)}, & \text{para } x < c \\ \mu E^* (d - g(x)), & \text{para } c < x < a \end{cases} \quad (8.51)$$

5. Conviene indicar que todas las magnitudes macroscópicas calculadas mediante el procedimiento arriba descrito reproducen exactamente las soluciones tridimensionales de Cattaneo, Mindlin, Jäger y Ciavarella.

y para la fuerza tangencial se obtiene

$$F_x = 2 \int_0^a q_x(x) dx = 2 \mu E^* \left[c(d - g(c)) + \int_c^a (d - g(x)) dx \right] = 2 \mu E^* \int_c^a x g'(x) dx \quad (8.52)$$

La fuerza normal viene dada por la expresión (5.57),

$$F_N = 2E^* \int_0^a (d - g(x)) dx, \quad (8.53)$$

y el cociente $F_x / (\mu F_N)$ por la expresión

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = \frac{\int_c^a x g'(x) dx}{\int_0^a x g'(x) dx} \quad (8.54)$$

Esta igualdad determina la relación entre el cociente $F_x / (\mu F_N)$ y el radio de la zona no deslizante c (que es la generalización de la igualdad (8.37) para un indentador con simetría axial de cualquier tipo).

De la ecuación (8.49) se infiere la siguiente interesante conclusión de validez general. El desplazamiento tangencial máximo, $u_{x,\max}^{(0)}$, para el que la zona no deslizante *justo desaparece* (o el desplazamiento mínimo para el que ocurre deslizamiento completo), se obtiene siempre que se haga $c = 0$ (y por tanto, también $g(c) = 0$) en la igualdad (8.49):

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} d. \quad (8.55)$$

Por consiguiente, antes de que el deslizamiento completo tenga lugar, el desplazamiento depende de la profundidad de indentación, y no de la forma del indentador.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Considérense dos cuerpos elásticos que se extienden en los semi-espacios $z > 0$ y $z < 0$, respectivamente (fig. 8.7). El cuerpo superior se mueve en la dirección horizontal a la velocidad $du_{rel} / dt = v_c$. Los cuerpos se traban en una región circular de radio creciente con el tiempo, $a(t) = a_0 + v_1 t$; en el resto, el esfuerzo tangencial es nulo. Determinar la distribución de esfuerzos tangenciales en la región de contacto.

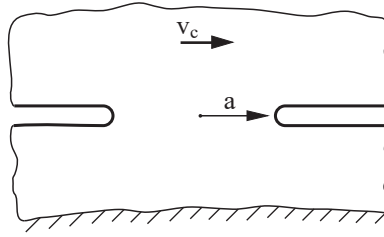


Fig. 8.8 Dos sólidos elásticos en contacto, donde el sólido superior se mueve con respecto al inferior a velocidad constante v_c .

Resolución: De las igualdades $du_{rel} / dt = v_c$ y $da / dt = v_1$, se obtiene

$$du_{rel} = \frac{v_c}{v_1} da.$$

El cambio del esfuerzo cortante en la región de contacto $r < a(t)$ por efecto de un desplazamiento tangencial de magnitud du_{rel} , se calcula de las expresiones (8.17) y (8.5)

$$d\tau(r) = \frac{G^*}{\pi a} du_{rel} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{G^* v_c}{\pi a v_1} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad r < a,$$

donde G^* viene definido por la igualdad (8.20). En el momento en el que el «frente de contacto» avanza desde radio inicial a_0 hasta el radio a_1 , el esfuerzo se calcula como sigue:

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad \text{para } r < a_0,$$

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \int_r^{a_1} \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2} da, \quad \text{para } a_0 < r < a_1.$$

El cálculo de las integrales resulta en

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{a_0 + \sqrt{a_0^2 - r^2}}, \quad \text{para } r < a_0,$$

$$\tau = \frac{G^* v_c}{\pi v_1} \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - r^2}}{r}, \quad \text{para } a_0 < r < a_1.$$

Esta dependencia está representada gráficamente en la fig. 8.8 para el caso $a_0 / a_1 = 0,1$.

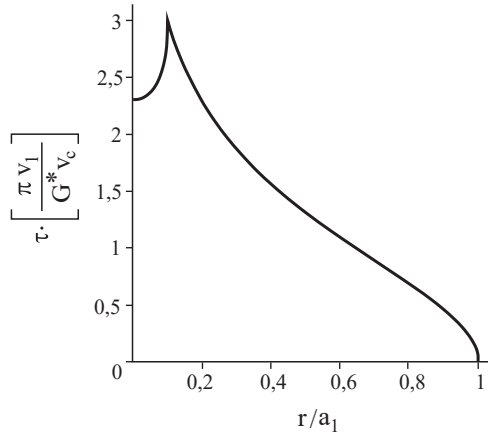


Fig. 8.9 Distribución de esfuerzos tangenciales en la zona de contacto.

Problema 2: Una esfera elástica se comprime sobre un plano rígido de tal forma que la dirección de la fuerza de compresión es siempre la misma (fig. 8.9). Determinar las condiciones bajo las cuales la región de contacto no se desliza nunca.

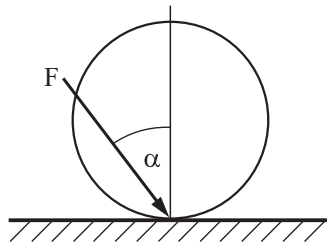


Fig. 8.10 Esfera elástica que se comprime sobre un plano rígido por acción de una fuerza inclinada.

Resolución: Se supone que no existe deslizamiento en la región de contacto, y al final se demostrará la validez de dicha suposición. El crecimiento continuo de la fuerza se puede dividir en pequeños pasos, en cada uno de los cuales se aumenta la fuerza normal en la magnitud dF_N y la fuerza tangencial en la magnitud dF_x . Los incrementos dF_N y dF_x cumplen la relación geométrica $dF_x / dF_N = \tan \alpha$. Un aumento en dF_x de la fuerza tangencial bajo la condición de no deslizamiento, lleva consigo un aumento en el esfuerzo cortante

$$d\tau(r) = \frac{dF_x}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{dF_N \tan \alpha}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}, \quad r < a.$$

De la relación $F_N = \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R}$ entre la fuerza normal y el radio de contacto se obtiene $dF_N = 4 \frac{E^* a^2 da}{R}$. El aumento del esfuerzo cortante puede escribirse, por consiguiente, de la forma

$$d\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a.$$

Si por acción de la fuerza aplicada, el radio de la zona de contacto crece desde a_0 hasta a_1 , aumenta también el esfuerzo tangencial en la magnitud

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \int_{a_0}^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad r < a_0,$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \int_r^{a_1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} da, \quad a_0 < r < a_1.$$

El cálculo de las integrales resulta en

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \cdot \left[(a_1^2 - r^2)^{1/2} - (a_0^2 - r^2)^{1/2} \right], \quad r < a_0,$$

$$\tau(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \tan \alpha \cdot (a_1^2 - r^2)^{1/2}, \quad a_0 < r < a_1.$$

La distribución de presiones hertzianas se calcula según

$$p(r) = \frac{p_0}{a_1} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{3F_N}{2\pi a_1^3} (a_1^2 - r^2)^{1/2} = \frac{2E^*}{\pi R} (a_1^2 - r^2)^{1/2}.$$

En la región de contacto no se da deslizamiento siempre y cuando se cumpla la condición $\tau(r) \leq \mu p(r)$ en todos los puntos de la misma, lo que sucede cuando

$$\tan \alpha \leq \mu.$$

Si el ángulo de aplicación de la fuerza es menor que el ángulo crítico, no ocurre deslizamiento en el contacto. De hecho, el ángulo crítico es igual al ángulo de *inclinación crítica* (véase capítulo 10), por lo que este resultado coincide con la observación puramente macroscópica, según la cual no se da deslizamiento si el ángulo de acción de la fuerza es menor que el ángulo de inclinación crítica.

Problema 3: Resolver el problema 2 mediante el método de reducción de dimensiones.

Resolución: La solución de este problema mediante el MDR es trivial. Dado que todo muelle adherido está sometido a carga bajo un ángulo α , no existe deslizamiento cuando el ángulo α es menor que el ángulo de inclinación crítico (véase la igualdad (10.5) en el capítulo 10):

$$\tan \alpha \leq \mu.$$

Problema 4: Un perfil rígido con simetría axial de la forma $z = Ar^n$ se presiona sobre un semi-espacio elástico con una fuerza F_N , para luego aplicarle la carga tangencial F_x . Determinar la relación entre la fuerza tangencial, el desplazamiento tangencial y el radio c de la zona no deslizante.

Resolución: El perfil transformado por el MRD tiene, en este caso, la forma $g(x) = A\kappa_n |x|^n$ (véase capítulo 5, problema 7). Sustituyendo $g(x)$ en la expresión, resulta

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^{n+1},$$

donde a es el radio de contacto. La relación entre el desplazamiento tangencial del indentador y el radio de la zona no deslizante se obtiene sustituyendo la función $g(x)$ en la igualdad:

$$G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - A\kappa_n c^n).$$

Problema 5: Un troquel cilíndrico y plano de cantos redondeados (fig. 8.11) se presiona sobre un semi-espacio elástico con una fuerza normal F_N , y seguidamente se le aplica una fuerza tangencial F_x , que produce un desplazamiento tangencial relativo entre ambos cuerpos, $u_x^{(0)}$. Se supone que ambos materiales son elásticamente equivalentes, y que el perfil del indentador está dado por

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r < b \\ \frac{1}{2R}(r-b)^2 & \text{para } b \leq r \leq a \end{cases}$$

(fig. 8.11). Empleando el método de reducción, determinar la profundidad de indentación y la fuerza normal en función del radio de contacto. Aparte, calcular el desplazamiento y la fuerza tangencial en función del radio de la zona no deslizante.

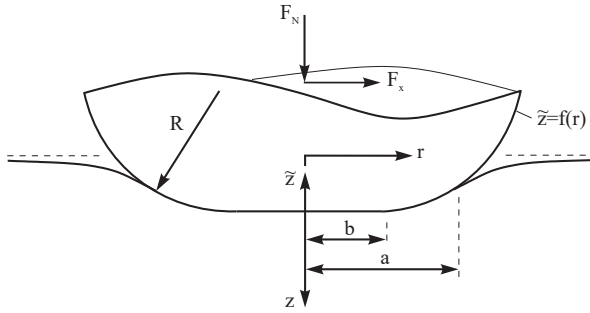


Fig. 8.11 Contacto tangencial entre un troquel plano con cantos redondeados (de radio R) y un semi-espacio elásticamente equivalente.

Resolución: En un primer paso, se ha de determinar el perfil unidimensional equivalente mediante (5.52):

$$g(x) = x \int_0^x \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < b \\ x \int_b^x \frac{r-b}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr & \text{para } b \leq x \leq a \end{cases}$$

El cálculo de la integral da como resultado

$$\int_b^x \frac{r-b}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr = \sqrt{x^2 - b^2} - b \arccos\left(\frac{b}{x}\right),$$

de forma que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| < b \\ \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} - \frac{b|x|}{R} \arccos\left(\frac{b}{|x|}\right) & \text{para } b \leq |x| \leq a \end{cases}$$

La fig. 8.12 muestra los perfiles original y equivalente, representados en coordenadas normalizadas.

La profundidad de indentación en función del radio de contacto se obtiene del perfil unidimensional mediante

$$d = g(a) = \frac{a}{R} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{ba}{R} \arccos\left(\frac{b}{a}\right)$$

y la fuerza normal en función del radio de contacto mediante

$$\begin{aligned} F_N &= 2E^* \int_0^a [d - g(x)] dx \\ &= 2E^* \int_0^b d dx + 2E^* \int_b^a \left[d - \left(\frac{x}{R} \sqrt{x^2 - b^2} - \frac{bx}{R} \arccos\left(\frac{b}{x}\right) \right) \right] dx \end{aligned}$$

El cálculo de la integral y la relación entre la profundidad de indentación y el radio de contacto, permite obtener

$$F_N = \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} - \frac{3}{4} \frac{b}{a} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \right].$$

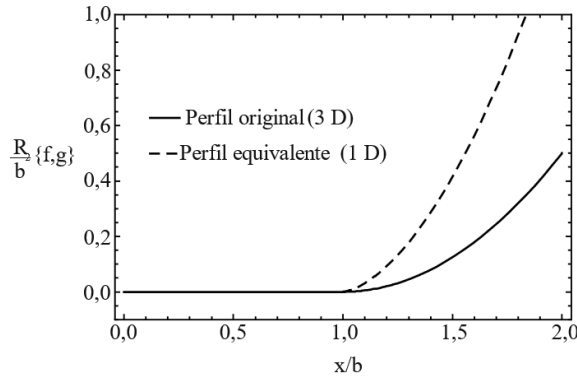


Fig. 8.12 Troquel plano de cantos redondeados. Perfil tridimensional y el correspondiente perfil unidimensional mediante la transformación MRD.

El caso límite $b = 0$ corresponde a un perfil paraboloide. Es de esperar en este caso, que las expresiones encontradas reproduzcan las relaciones de Hertz.

Se determina el límite entre no deslizamiento y deslizamiento mediante la expresión

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \frac{a}{R} \left[\sqrt{a^2 - b^2} - b \arccos \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{c}{a} \left(\sqrt{c^2 - b^2} - b \arccos \left(\frac{b}{c} \right) \right) \right].$$

La fuerza tangencial se calcula mediante la expresión, que resulta en

$$F_x = \mu \frac{E^*}{3R} \left[(4a^2 - b^2) \sqrt{a^2 - b^2} - 3a^2 b \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \right] - \mu \frac{E^*}{3R} \left[(4c^2 - b^2) \sqrt{c^2 - b^2} - 3c^2 b \arccos \left(\frac{b}{c} \right) \right].$$

La fig. 8.13 muestra la dependencia, en coordenadas normalizadas, entre el radio de la zona no deslizante y la fuerza tangencial para distintos valores de la relación geométrica b/a . El caso límite $b = 0$ representa el resultado clásico de Cattaneo y Mindlin para un indentador parabólico. Si por el contrario, la región de contacto se extiende un poco más allá de la zona plana ($b = 0,95a$), la curva se aproxima a la del contacto de un troquel plano.

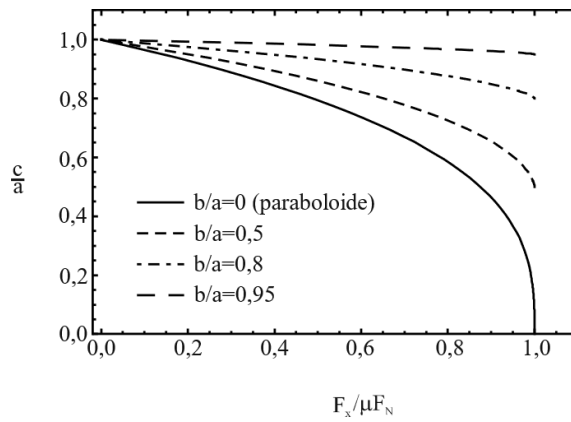


Fig. 8.13 Radio de la zona de contacto no deslizante, c , en función de la fuerza tangencial aplicada para un troquel plano con cantos redondeados.

9. EL CONTACTO RODANTE



El contacto rodante está implicado en innumerables aplicaciones técnicas. Entre los ejemplos más conocidos se encuentran los contactos rueda-raíl y rueda-asfalto, los rodamientos, los engranajes, así como diversos mecanismos de alimentación y transmisión (como por ejemplo, los de una impresora).

De la mecánica del contacto rodante ya se ocupó Reynolds¹. De sus investigaciones experimentales con rodillos de goma, constató la existencia de zonas deslizantes y no deslizantes en un contacto sometido a rodadura. Observó que, conforme aumentaba el par de arranque o el par de frenado, mayor era la zona deslizante, hasta alcanzar un punto en el que toda la región de contacto se deslizaba. El deslizamiento hace que la velocidad de traslación de una rueda no coincida con la de su perímetro ΩR . La diferencia entre ambas velocidades se denomina *velocidad de deslizamiento*, y juega un papel muy importante en la mecánica de contacto.

Sin embargo, el deslizamiento en la región de contacto no es la única causa de la diferencia entre las velocidades de traslación y rotación. Cuando el par de arranque o el de frenado es pequeño, no hay apenas deslizamiento. Aun así, la velocidad de traslación difiere de la de rotación, y la diferencia es proporcional al par, o momento, de arranque. Esta relación la encontró Carter por primera

1. O. Reynolds. «On rolling friction». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 166(I), 155-174 (1876).

vez en sus cálculos del año 1916². Estos pequeños deslizamientos son debidos a las deformaciones elásticas en la rueda.

El pseudo-deslizamiento que se produce en la región de contacto es de especial interés en aplicaciones técnicas, ya que incluso en las condiciones para las que no ocurre el deslizamiento completo, este puede conducir a desgaste.

9.1 DISCUSIÓN CUALITATIVA DE LOS PROCESOS EN UN CONTACTO RODANTE

El hecho de que en una rueda sometida a arranque o frenado se den zonas deslizantes y no deslizantes, puede derivarse de la analogía entre el contacto tangencial y el contacto rodante. Si se pone en contacto una rueda con un plano rígido y se aplica un par de fuerza (también llamado momento o torque), la región de contacto se somete a un esfuerzo tangencial. En el capítulo anterior se vio que un contacto hertziano sometido a esfuerzo produce siempre una zona deslizante en dirección tangencial. Lo mismo se aplica en el caso de una rueda sometida a rodadura. Como en el caso de un contacto tangencial, en un contacto rodante se genera en principio una pequeña zona deslizante si el par de arranque es pequeño, la cual se irá agrandando conforme el momento vaya aumentando, hasta llegar a un punto en el que el deslizamiento ocurre en toda la región de contacto.

Discutamos cualitativamente los procesos que tienen lugar en una rueda sometida a rodadura. Para entender mejor estos procesos, se usará el modelo sencillo esquematizado en la fig. 9.1 a, de una rueda elástica constituida por un anillo rígido, rodeado de una hilera de elementos elásticos unidos entre sí. Entre estos elementos y el sustrato existe rozamiento, caracterizado por un coeficiente de fricción μ . Si en primer lugar se presiona la rueda contra el sustrato rígido (fig. 9.1 b), y luego se aplica un torque (fig. 9.1 c), los muelles a la derecha de la región de contacto soportan compresión, mientras que los de la izquierda soportan tracción. En consecuencia, el interior rígido de la rueda gira un ángulo determinado, que depende a su vez del número y rigidez de los muelles. Si se deja rodar la rueda a la derecha (fig. 9.1d), los muelles sometidos a compresión que están en equilibrio pero que aún no se encuentran en contacto con la superficie rígida, entran ahora en la región de contacto, sin que por ello cambie la distancia de separación o el estado de equilibrio. En la región de contacto, los elementos sometidos a compresión se verán arrastrados por el sustrato rígido. Cuando aquellos alcanzan el borde posterior o borde de salida, donde la tracción actúa y la carga disminuye, se destensan. Consecuentemente, la rueda gira un poco más.

En una rueda que frena, los muelles en el borde anterior o borde de entrada están sometidos a tracción y los del borde posterior a compresión. Los muelles entrantes se encuentran en equilibrio antes de entrar en la zona de contacto, y

2. F.W. Carter. «The electric locomotive». *Proc. Inst. Civil Engr.*, **201**, 221-252 (1916). Discusión en páginas 253-289.

se mantienen en ese estado hasta que llegan al borde trasero. Se llega por tanto, a la siguiente observación:

En una rueda en arranque o frenado, existe siempre una zona no deslizante o de agarre en el borde anterior de la región de contacto, y una zona deslizante en el borde posterior.

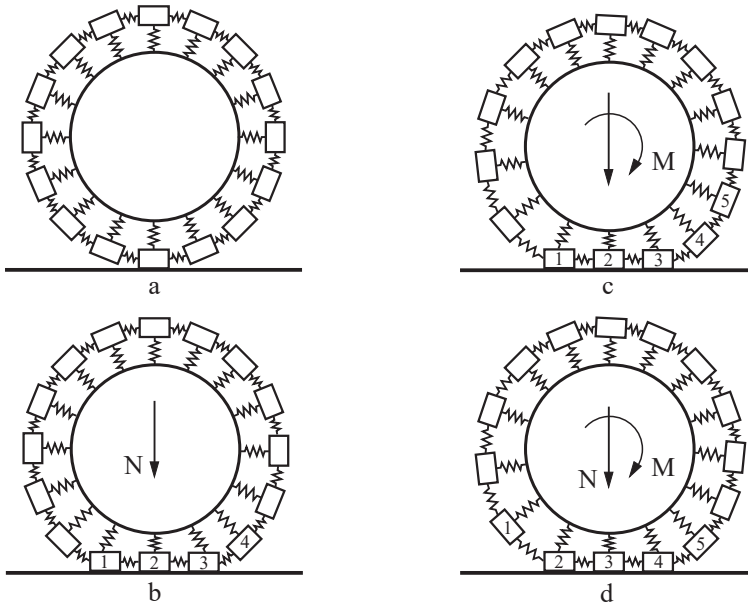


Fig. 9.1 Modelo simplificado de una rueda en funcionamiento.

En cada giro de ángulo correspondiente a un solo elemento de la rueda, esta experimenta una «rotación elástica» además de una «rotación rígida». La rotación del perímetro de la rueda será por tanto mayor que la velocidad de traslación de la misma. Por el contrario, en el caso de una rueda que frena (donde el torque y el giro tienen sentidos opuestos), la velocidad en el perímetro es menor que la de traslación. Es evidente que el giro elástico es siempre el mismo en el paso de un elemento al contiguo. De ahí se deduce que la diferencia en velocidad, $v_{\text{deslizamiento}} = v - \Omega R$, es proporcional a la velocidad de traslación v . Por tanto, para caracterizar el grado en el que se produce deslizamiento, tiene sentido introducir una magnitud adimensional,

$$s = \frac{v - \Omega R}{v} = 1 - \frac{\Omega R}{v} \quad (9.1)$$

que se denominará *grado de deslizamiento*, y que es negativo para una rueda durante el arranque y positivo para una rueda durante el frenado. Es fácil ver que el deslizamiento, tal y como se ha definido, es igual a la *deformación* ε_{xx} en la zona no deslizante del contacto. Esto puede demostrarse de una forma muy sencilla mediante el análisis de transporte de masa a través de la región de contacto. La densidad del material en la zona de agarre es igual a $\rho_0/(1+\varepsilon_{xx})$. La región de contacto se mueve con una velocidad de traslación v . La densidad de flujo de masa sobre la región de contacto es igual a $v\rho_0/(1+\varepsilon_{xx})$. Por otra parte esta magnitud es, por definición, igual a $\rho_0\Omega R$. De ahí se deduce que

$$\Omega R = \frac{v}{(1+\varepsilon_{xx})}. \quad (9.2)$$

Y para el grado de deslizamiento se tiene que

$$s = \frac{\varepsilon_{xx}}{1+\varepsilon_{xx}} \approx \varepsilon_{xx}. \quad (9.3)$$

9.2 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN UN CONTACTO RODANTE ESTACIONARIO

A. Pasos preliminares

En lo que sigue, se utilizarán los resultados de la Teoría de la Elasticidad (véase sección 8.2). Si en una región circular, se aplica un esfuerzo tangencial

$$\tau(r) = \sigma_{zx}(r) = \tau_0 \sqrt{1-r^2/a^2} \quad (9.4)$$

(fig. 9.2 a), este conduce a un desplazamiento

$$u_x = \frac{\pi\tau_0}{32Ga} \left[4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2 \right] \quad (9.5)$$

en dirección tangencial. Una distribución de esfuerzos de la forma

$$\tau = \sigma_{zx}(x) = \tau_0 \sqrt{1-x^2/a^2} \quad (9.6)$$

aplicada en una franja de anchura $2a$ (fig. 9.2 b) produce un desplazamiento

$$u_x = \text{const} - \tau_0 \frac{x^2}{aE^*}. \quad (9.7)$$

Con esta distribución de esfuerzos, se puede generar la distribución de esfuerzos en una rueda en funcionamiento.

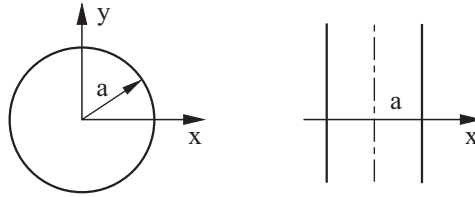


Fig. 9.2 Distintas regiones de contacto producidas por esfuerzos tangenciales: (a) circular, (b) en forma de banda.

B. La teoría de Carter

El problema del contacto rodante bidimensional, como la rodadura de un rodillo sobre un plano, lo solucionó Carter en el año 1926. Como muchas otras soluciones de casos de contacto normal y tangencial, la suya se basa en la hipótesis de que la distribución de esfuerzos en un contacto rodante se puede construir como superposición de dos distribuciones hertzianas de esfuerzos, para las cuales existen soluciones analíticas que describen los desplazamientos en la superficie del continuo. En una rueda en funcionamiento, se busca por tanto una distribución de esfuerzos de la forma

$$\tau = \tau^{(1)}(x) + \tau^{(2)}(x) \quad (9.8)$$

donde

$$\tau^{(1)}(x) = \tau_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.9)$$

y

$$\tau^{(2)}(x) = -\tau_2 \left(1 - \frac{(x-d)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9.10)$$

a es la mitad de la anchura del contacto y c la mitad de la anchura de la zona no deslizante en el borde anterior. La definición de la magnitud d se puede deducir de la fig. 9.3 siendo $d = a - c$. La distribución de presiones en toda la región del contacto viene dada por la expresión hertziana

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.11)$$

Para que la distribución de esfuerzos dada corresponda realmente con un *contacto rodante*, se deben cumplir determinadas condiciones cinemáticas y dinámicas. En primer lugar conviene considerar que las zonas de la rueda que entran al contacto se encuentran deformadas de antemano. En cuanto estas entran en contacto con

el sustrato, no pueden desplazarse de forma relativa entre sí hasta que dejan la zona de agarre. De ahí se desprende que:

1. En la zona de agarre, la deformación es constante. (9.12)

Si se asume que en la zona deslizante se cumple la ley de rozamiento de Coulomb, se infiere que:

2. En toda la zona deslizante se ha de cumplir la condición

$$\tau(x) = \mu p(x). \quad (9.13)$$

Estas dos condiciones garantizan que se pueda tratar como un contacto rodante estacionario, siempre que se muestre que las dos condiciones se cumplen, asumiendo la distribución de esfuerzos dada por la expresión (9.8).

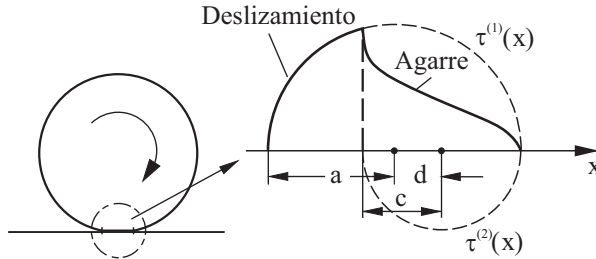


Fig. 9.3 Distribución de esfuerzos tangenciales en la región de contacto para el caso del contacto rodante de un rodillo elástico en funcionamiento.

Los desplazamientos causados por los esfuerzos $\tau^{(1)}(x)$ y $\tau^{(2)}(x)$ son, respectivamente, iguales a $u_x^{(1)} = C^{(1)} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*}$ y $u_x^{(2)} = C^{(2)} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*}$. Para el desplazamiento global se tiene

$$u_x = \text{const} - \tau_1 \frac{x^2}{aE^*} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE^*}, \quad (9.14)$$

y para la deformación

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\tau_1 \frac{2x}{aE^*} + \tau_2 \frac{2(x-d)}{cE^*}. \quad (9.15)$$

Para que la condición (9.12) se cumpla, debe darse que

$$\tau_2 = \frac{c}{a} \tau_1. \quad (9.16)$$

De la condición (9.13), se llega a que

$$\tau_1 = \mu p_0. \quad (9.17)$$

La deformación en la zona de agarre es constante e igual a

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0 d}{aE^*}. \quad (9.18)$$

La fuerza transversal total en la región de contacto se calcula de la siguiente manera

$$F_x = \int_{-a}^a L \cdot \tau(x) dx = \left(\frac{\pi}{2} a \mu p_0 - \frac{c}{a} \frac{\pi}{2} c \mu p_0 \right) L = \mu F_N \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right). \quad (9.19)$$

El radio de la zona de agarre se obtiene según

$$\frac{c}{a} = 1 - \frac{d}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2}, \quad (9.20)$$

y el grado de deslizamiento mediante las expresiones (9.3) y (9.18)

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0}{E^*} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/2} \right]. \quad (9.21)$$

Teniendo en cuenta las igualdades $F_N = \frac{\pi a p_0}{2} L$ y $F_N = \frac{\pi E^* L a^2}{4R}$ (véase la ecuación 5.34), la expresión para el grado de deslizamiento se puede escribir de la forma siguiente:

$$s = -\frac{\mu a}{R} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{F_x}{\mu F_N}} \right]. \quad (9.22)$$

Esta relación se representa de forma gráfica en la fig. 9.4 y se denomina curva de fuerza-deslizamiento.

En el caso de fuerzas tangenciales pequeñas, el grado de deslizamiento puede expresarse como serie de Taylor en $F_x/\mu F_N$. Truncando la serie en el término de primer orden, se obtiene que

$$s \approx -\frac{aF_x}{2RF_N} \quad \text{para} \quad F_x \ll \mu F_N. \quad (9.23)$$

Por consiguiente y en el caso de fuerzas tangenciales pequeñas, el grado de deslizamiento no depende del coeficiente de fricción μ , lo cual no es sorprendente dado que en este caso límite no hay deslizamiento neto en la región de contacto. La recta $|s| = \frac{aF_x}{2RF_N}$ se muestra en la fig. 9.4 como línea de puntos.

La desviación de esta con respecto al deslizamiento que se produce en realidad,

viene dada por la distancia entre la curva y la línea de puntos, la cual muestra la contribución del «deslizamiento puro», en la región de contacto. El deslizamiento se produce en toda la región cuando $F_x = \mu F_N$. En ese momento, $s = -\frac{\mu a}{R}$. Este valor máximo es el doble del «deslizamiento elástico» (ecuación (9.23)), para el mismo valor de fuerza. La diferencia entre ambos

$$s_{\text{dinámico}} = -\frac{\mu a}{2R} \quad (9.24)$$

proporciona la máxima contribución dinámica al deslizamiento. El valor característico correspondiente a la velocidad de deslizamiento en un contacto rodante en condiciones de acción críticas (justo antes de producirse deslizamiento total) viene dado por

$$v_{\text{deslizamiento}} \approx \frac{\mu a}{2R} v, \quad (9.25)$$

donde v es la velocidad de traslación. Para fuerzas pequeñas, el grado de deslizamiento dinámico puede estimarse como la diferencia entre el grado de deslizamiento global, dado por la expresión (9.22), y la contribución elástica (ecuación (9.23))

$$s_{\text{dinámico}} = -\frac{\mu a}{8R} \left(\frac{F_x}{\mu F_N} \right)^2. \quad (9.26)$$

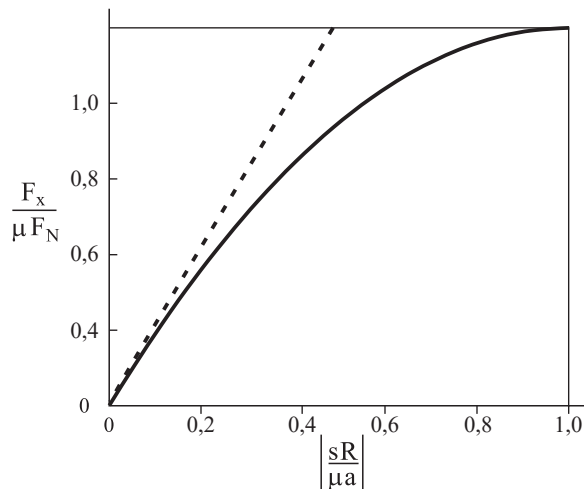


Fig. 9.4 Curva fuerza-deslizamiento.

C. El caso del contacto rodante tridimensional

También en el caso tridimensional, se puede determinar la distribución de esfuerzos en la región de contacto mediante un procedimiento semejante al de Carter, mediante el cual se superponen dos distribuciones de esfuerzos de la forma

$$\tau^{(1)}(x, y) = \tau_1 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad (9.27)$$

y

$$\tau^{(2)}(x, y) = -\tau_2 \sqrt{1 - \frac{(x-d)^2 + y^2}{c^2}}. \quad (9.28)$$

La distribución de esfuerzos (9.28) se define en la zona de agarre. El desplazamiento de los puntos de la superficie que resulta de la suma de estas distribuciones de esfuerzos es, según la expresión (9.5), igual a

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_1}{a} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \\ -\frac{\tau_2}{c} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)(x-d)^2 - (4-\nu)y^2] \end{array} \right\}. \quad (9.29)$$

El componente de la deformación $\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$ es

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \left\{ -\frac{\tau_1}{a} x + \frac{\tau_2}{c} x - \frac{\tau_2}{c} d \right\}. \quad (9.30)$$

De las condiciones (9.12) y (9.13), se derivan las mismas expresiones (9.16) y (9.17), como en un contacto de un rodillo. Consecuentemente, la deformación y por tanto el deslizamiento, es igual a

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\pi(4-3\nu)}{16G} \mu p_0 \frac{d}{a}. \quad (9.31)$$

La fuerza tangencial se obtiene mediante

$$F_x = \frac{2}{3} \pi a^2 \tau_1 - \frac{2}{3} \pi c^2 \tau_2 = \mu F_N \left(1 - \left(\frac{c}{a} \right)^3 \right). \quad (9.32)$$

El radio de la zona de agarre se obtiene a través de la misma fórmula que para el contacto tangencial:

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \quad (9.33)$$

Y el grado de deslizamiento se obtiene a través de³

$$s = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{3(4-3\nu)\mu F_N}{32Ga^2} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right]. \quad (9.34)$$

Teniendo en cuenta la relación $F_N = \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R}$, aquel puede escribirse también de la siguiente manera

$$s = -\frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right]. \quad (9.35)$$

Y para el caso de fuerzas pequeñas, se obtiene, en primer orden de aproximación

$$s \approx -\frac{(4-3\nu)F_x}{32Ga^2}. \quad (9.36)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Estimar la velocidad de deslizamiento (a) en una rueda de tren, (b) en una rueda de coche.

Resolución: (a) Para una rueda de tren, el grado de deslizamiento se calcula mediante la expresión (9.35):

$$s = -\frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right].$$

El deslizamiento para una rueda accionada en el estado crítico, se obtiene mediante la sustitución $F_x = \mu F_N$:

$$|s| = \frac{(4-3\nu)\mu}{4(1-\nu)} \frac{a}{R}.$$

3. Esta ecuación es válida para el caso de una rueda elástica sobre un plano rígido. Cuando el contacto se establece entre materiales idénticos, el grado de deslizamiento es el doble del valor dado por la expresión.

La velocidad de deslizamiento se calcula multiplicando el grado de deslizamiento por la velocidad de traslación v . Con los valores $\mu \approx 0,3$, $a \approx 7 \text{ mm}$, $R = 0,5 \text{ m}$ y $v = 1/3$, se obtiene una velocidad de deslizamiento $v_{\text{deslizamiento}} \approx 5 \cdot 10^{-3} v$. Para una velocidad de traslación de 30 m/s (108 km/h), la velocidad de deslizamiento alcanza el valor característico $v_{\text{deslizamiento}} \approx 0,14 \text{ m/s}$.

(b) En el caso de una rueda de coche «accionada en el estado crítico» se obtiene, con los valores $\mu \approx 1$, $a \approx 5 \text{ cm}$, $R = 0,3 \text{ m}$ y $v = 1/2$, una velocidad de deslizamiento $v_{\text{deslizamiento}} \approx 0,2v$. Para una velocidad de traslación de 15 m/s (54 km/h), la velocidad de deslizamiento es 3 m/s .

Bajo «condiciones normales de funcionamiento» (velocidad de desplazamiento constante e igual a 15 m/s), la velocidad de deslizamiento en un contacto rodante entre el neumático y la carretera es mucho más pequeña y, por regla general, tiene un valor de 1 cm/s .

Problema 2: Estimar la pérdida de energía asociada a una rueda en arranque o en frenado.

Resolución: Se puede obtener una estimación de la potencia producida por rozamiento en el contacto, si se multiplica la fuerza tangencial dominante en el contacto por el valor medio de la velocidad de desplazamiento:

$$\dot{W} \approx |s| F_x v = |s| \dot{W}_0,$$

donde $\dot{W}_0 = F_x v$ es la «potencia de desplazamiento» de la fuerza de rozamiento.

Problema 3: Si a una rueda elástica rodando se le aplica una fuerza en dirección perpendicular a la dirección de rodadura, experimenta un deslizamiento parcial o pseudo-deslizamiento, en la dirección de aplicación de la fuerza debido a deformaciones elásticas (*deslizamiento trasversal*). Calcular el deslizamiento trasversal en una esfera elástica en rodadura.

Resolución: El eje de giro de la esfera ha de ser paralelo al eje x ; sin fuerza trasversal, la esfera rodaría en la dirección y . La zona de agarre es independiente de la forma en la que se aplique la fuerza, y se encuentra siempre al frente en la dirección de rodadura (fig. 9.5).

El esfuerzo se calcula de la siguiente manera

$$\tau(x, y) = \mu p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} - \mu p_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2 + (y-d)^2}{c^2}}.$$

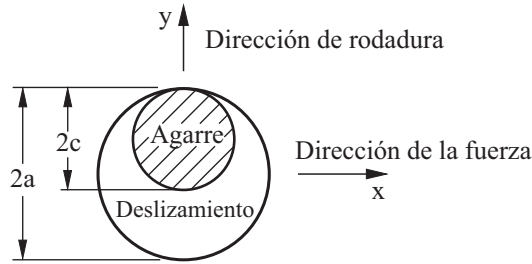


Fig. 9.5 Zonas de agarre y deslizamiento en una rueda elástica rodando bajo la acción de una fuerza perpendicular a la dirección de rodadura.

El campo de desplazamientos que este genera, se obtiene a partir de la expresión

$$u_x = \frac{\pi}{32G} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu p_0}{a} [4(2-\nu)a^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)y^2] \\ -\frac{\mu p_0}{a} [4(2-\nu)c^2 - (4-3\nu)x^2 - (4-\nu)(y-d)^2] \end{array} \right\},$$

así como la componente relevante del tensor de deformaciones

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\pi \mu p_0 (4-\nu) d}{16G a}.$$

Este resultado proporciona el ángulo entre la dirección de rodadura real y la ideal. De forma análoga al procedimiento seguido en la obtención de las ecuaciones (9.32) - (9.35), se obtiene, para el grado de deslizamiento trasversal

$$s_{\perp} = \varepsilon_{xy} = -\frac{3\mu(4-\nu)}{32Ga^2} \mu F_N \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right] = -\frac{(4-\nu)\mu a}{4(1-\nu)R} \left[1 - \left(1 - \frac{F_x}{\mu F_N} \right)^{1/3} \right].$$

Problema 4: El sistema de transmisión de poleas y correa mostrado en la fig. 9.6 se analiza a continuación. La rueda conductora (derecha) se acciona mediante un par M , mediante el cual gira a velocidad angular constante e igual a ω_1 . La rueda conducida (izquierda) gira, en cambio, con una velocidad angular $\omega_2 < \omega_1$. En el caso de la rueda conductora, se muestran tanto la zona de agarre, en la que la fuerza en la correa es constante e igual a F_1 , como la zona de deslizamiento, en la que la fuerza en la correa disminuye a F_2 . Cabe esperar que una transición del estado de agarre al de deslizamiento, ocurra también en la rueda conducida. Determinar el grado de deslizamiento s y la pérdida de potencia mecánica.

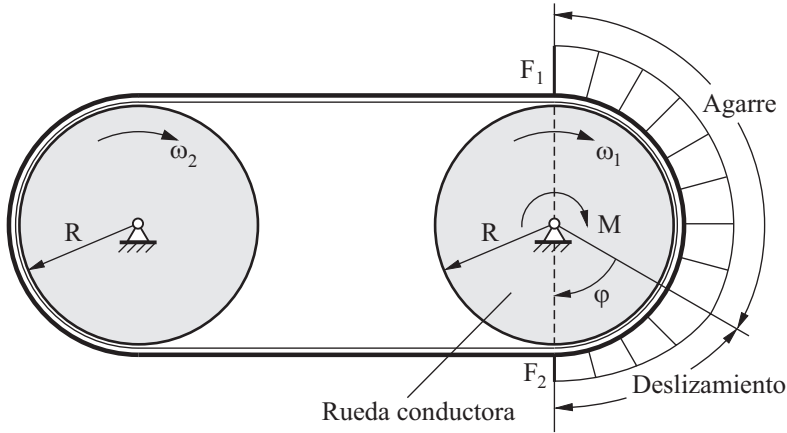


Fig. 9.6 Correa elástica que transmite un par M entre dos ruedas giratorias.

Resolución: El par producido por la acción de la correa es igual a

$$M = (F_1 - F_2)R.$$

Dado que la elongación de la correa es constante en la zona de agarre, también lo es la fuerza de tensión en toda ella e igual a F_1 . En el equilibrio, la fuerza disminuye al valor F_2 , de lo que se desprende que

$$F_1 / F_2 = e^{\mu\phi}$$

(véase capítulo 10, problema 4). La deformación elástica que experimenta la correa es igual a $\varepsilon = F / EA$, donde E es el módulo de elasticidad y A la sección transversal. Por tanto, en las zonas superior e inferior se cumple que

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{EA}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F_2}{EA}.$$

El flujo de masa debe ser constante en cada punto. De ahí se obtiene que

$$\frac{v_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{v_2}{1 + \varepsilon_2}.$$

El grado de deslizamiento –adimensional– es igual a

$$s = 2 \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \approx \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{F_1 - F_2}{EA} = \frac{M}{REA}.$$

Y la pérdida en potencia igual a

$$\dot{W} = M(\omega_1 - \omega_2),$$

donde

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{R}.$$

En el caso de que la diferencia entre las velocidades angulares de cada rueda sea pequeña, es válida la expresión

$$\dot{W} \approx \frac{M^2 \bar{\omega}}{REA}.$$

donde $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ es la velocidad angular media.

Problema 5: Una rueda se mueve a una velocidad angular ω y al mismo tiempo se la hace girar en torno al eje vertical con una velocidad angular Ω ⁴ (piénsese por ejemplo, en la conducción de un coche). Determinar el *grado de deslizamiento por torsión*, definido como el cociente $s = \Omega / \omega$, en función del par de torsión. Se supone que el coeficiente de fricción es infinito.

Resolución: Las distribuciones de esfuerzos

$$\tau_x = \frac{8G(3-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \frac{s}{R} \frac{(a+x)y}{(a^2-r^2)^{1/2}},$$

$$\tau_y = \frac{8G(1-\nu)}{3\pi(3-2\nu)} \frac{s}{R} \frac{(a^2-2x^2-ax-y^2)}{(a^2-r^2)^{1/2}}$$

conducen a un desplazamiento superficial que cumple la condición de no deslizamiento o de agarre (deformación constante en toda la región de contacto)⁵. La fuerza tangencial desaparece ($F_x = F_y = 0$), mientras que el par de torsión es igual a

$$M_z = \frac{32(2-\nu)}{9(3-2\nu)} \frac{a^4}{R} Gs.$$

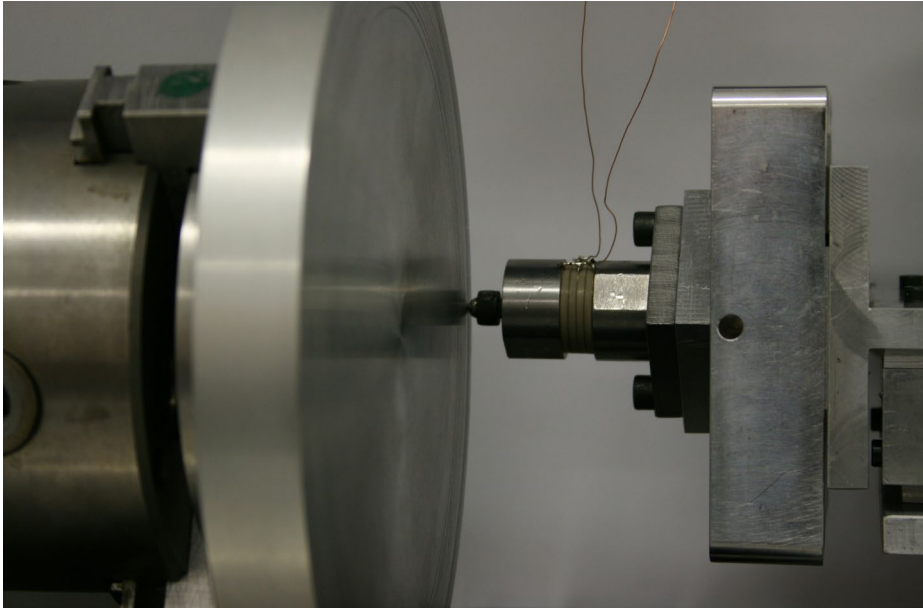
De ahí se obtiene el grado de deslizamiento como

$$s = \frac{9(3-2\nu)}{32(2-\nu)} \frac{R}{a^4} \frac{M_z}{G}.$$

4. La rotación en torno a un eje perpendicular al plano de contacto se denomina *giro*.

5. K.L. Johnson, «The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane». *Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics* **25**, 332-338 (1958).

10. LA LEY DE ROZAMIENTO DE COULOMB



10.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo tratará exclusivamente de la *fricción seca* o *fricción de Coulomb*, entre dos sólidos. El rozamiento entre sólidos es un fenómeno físico de extraordinaria complejidad. En él intervienen deformaciones elásticas y plásticas de las superficies de los cuerpos en contacto, interacciones con el medio intersticial, micro-puentes y el restablecimiento de la continuidad del material, la excitación de electrones y fonones, reacciones químicas y la transmisión de partículas de un cuerpo a otro. Esto hace aún más impactante el hecho de que la fricción pueda formularse mediante una ley muy sencilla, la cual permite resolver muchas aplicaciones ingenieriles, al menos en una primera aproximación, ya que la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal y prácticamente independiente de la velocidad. La propiedad más sorprendente de la fricción seca es que esta no depende ni del área aparente de contacto ni de la rugosidad. Estas propiedades permiten utilizar el concepto de coeficiente de fricción. Sin embargo, el coeficiente de fricción es una aproximación muy burda del cociente entre la fuerza de rozamiento y la fuerza normal.

Leonardo da Vinci fue el primero en investigar experimentalmente las leyes de rozamiento, y el primero en formular las generalizaciones más relevantes, por ejemplo, que la resistencia al movimiento por fricción es proporcional al peso

e independiente del área de contacto. Esta última característica la dedujo con la ayuda del experimento mostrado en la fig. 10.1.



Fig. 10.1 Dibujo extraído de un escrito de Leonardo da Vinci, donde se ilustra la independencia de la fuerza de rozamiento con la magnitud de la superficie de apoyo.

10.2 FRICCIÓN ESTÁTICA Y DINÁMICA

Tras minuciosas investigaciones experimentales, Coulomb (1736-1806) encontró que la fuerza de fricción o fuerza de rozamiento, F_R , entre dos cuerpos presionados entre sí por una carga o fuerza normal F_N (fig. 10.2), cumple, en una primera y burda aproximación, las siguientes propiedades:

A. *La fricción estática.* Para sacar del reposo a cuerpos apoyados sobre un plano, se ha de superar una fuerza crítica –la llamada *fuerza de rozamiento estático*, *fuerza de fricción estática*, o simplemente *fricción estática*– F_e . Esta fuerza es, en primera aproximación, proporcional a la carga de compresión, o fuerza normal, F_N ¹:

$$F_e = \mu_e F_N . \quad (10.1)$$

El coeficiente μ_e se denomina coeficiente de rozamiento estático (también coeficiente de fricción estática). Este depende de ambos materiales en contacto, pero apenas depende del área de contacto o de la rugosidad de las superficies.

B. *La fricción dinámica* (también llamada *fuerza de rozamiento dinámico* o *cinético*), F_d , es la resistencia al movimiento, una vez se ha superado el agarre y aquel se ha iniciado. Coulomb encontró las siguientes propiedades de la fuerza de fricción dinámica:

- La fricción dinámica es proporcional a la carga de compresión, o fuerza normal, F_N :

$$F_d = \mu_d F_N . \quad (10.2)$$

1. Esta proporcionalidad se la conoce como ley de Amonton.

- La fricción dinámica no depende ni del área de contacto ni de la rugosidad de las superficies.
- El *coeficiente de rozamiento dinámico* o *cinético* (también llamado *coeficiente de fricción dinámica* o *cinética*) es aproximadamente igual al coeficiente de rozamiento estático:

$$\mu_d \approx \mu_e. \quad (10.3)$$

- La fricción dinámica no depende (o si lo hace, muy débilmente) de la velocidad de deslizamiento.

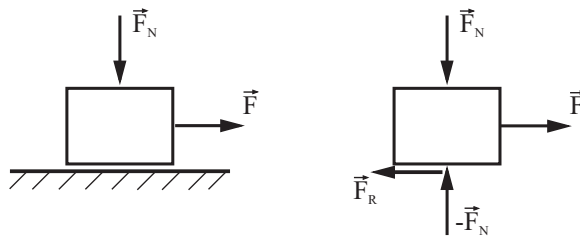


Fig. 10.2 Un bloque apoyado sobre un plano, al cual se le aplica una fuerza normal y otra tangencial; en el diagrama de cuerpo libre, se indican la fuerza de reacción del plano y la fuerza de rozamiento.

Las leyes mencionadas anteriormente proporcionan solo una descripción *grosso modo* de las propiedades de la fricción seca. Un análisis más detallado muestra que las fuerzas de fricción estática y dinámica tienen el mismo origen físico y, en muchos casos mecánicos, no se pueden considerar por separado. Ya se indicó que en el caso de un contacto sometido a un esfuerzo tangencial, se da también un deslizamiento parcial, o pseudo-deslizamiento, aún cuando no se produce ningún «deslizamiento macroscópico». De ahí que la diferencia entre los coeficientes de rozamiento estático y dinámico sea de naturaleza relativa. Con frecuencia, la transición entre un contacto estático a uno dinámico ocurre de manera gradual (como en el caso de una rueda en funcionamiento), o la «fricción estática» se manifiesta como fricción dinámica en la realidad cuando la velocidad de deslizamiento es muy pequeña (este es el caso del rozamiento en la goma, por ejemplo, el caso de un neumático sobre asfalto).

10.3 EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN CRÍTICO

El método experimental más sencillo de obtención de los coeficientes de rozamiento, y que prácticamente está al alcance de cualquiera, es la medida del ángulo mínimo al que ha de inclinarse un plano para que un cuerpo apoyado en él comience a resbalar. Este ángulo se denominará ángulo de inclinación *crítico*

o simplemente *ángulo crítico*. Las fuerzas que actúan en el cuerpo se muestran en la fig. 10.3 b.

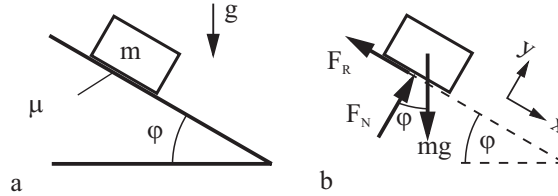


Fig. 10.3 Un cuerpo sobre un plano inclinado.

Cuando se llega al ángulo crítico, la fuerza de fricción estática alcanza su máximo valor $F_e = \mu_e F_N$. El equilibrio de fuerzas en ese estado crítico (el descrito por el sistema de coordenadas de la fig. 10.3 b) se expresa como:

$$\begin{aligned} x: \quad mg \operatorname{sen} \varphi - \mu_e F_N &= 0 \\ y: \quad F_N - mg \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

De ahí se deduce que

$$\tan \varphi = \mu_e. \quad (10.5)$$

La tangente del ángulo de inclinación crítico es, por tanto, igual al coeficiente de rozamiento estático.

10.4 DEPENDENCIA DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CON EL TIEMPO DE CONTACTO²

Fue también Coulomb el que se percató de la existencia de desviaciones con respecto a la sencilla ley del rozamiento. Entre otras cosas descubrió que, desde que se deja el estado de reposo, la fuerza de fricción estática crece con el tiempo. En la tabla 10.1 se muestran los datos experimentales de Coulomb. La fig. 10.4 muestra una gráfica de la variación de la fuerza de fricción frente al logaritmo del tiempo. En este sistema de coordenadas, aquella adopta la forma de una recta, es decir, la fuerza de fricción estática crece logarítmicamente con el tiempo.

Las razones físicas de esta dependencia temporal pueden ser muy diversas. En el caso de los metales, el área en los micro-contactos crece con el tiempo debido a procesos de reptación (*creep*, en inglés), los cuales siempre están presentes. Este crecimiento se acelera a altas temperaturas. El proceso se ralentiza conforme aumenta el área de contacto, lo que conduce a que la fuerza de fricción estática dependa logarítmicamente. Este tipo de dependencia comienza a escala atómica desde el primer momento en que los cuerpos entran en contacto –del

2. Véase también la sección 20.3.

orden de subnanosegundos— y no cesa hasta después de un tiempo muy largo. En elastómeros, este efecto está asociado con el aumento del área de contacto debido a la viscoelasticidad del material. También las fuerzas capilares contribuyen a la fuerza de fricción y, según recientes descubrimientos, son responsables de que la fuerza de fricción estática dependa aproximadamente de forma logarítmica con el tiempo.

Hay que reconocer que la dependencia temporal de los coeficientes de rozamiento «estáticos» hacen de la fricción estática un proceso dinámico. Si el coeficiente de rozamiento crece con el tiempo de contacto, esto también se cumple en el caso de un contacto rodante, dado que la rodadura se puede considerar a su vez como el establecimiento sucesivo de nuevas regiones de contacto. Para una velocidad de rodadura alta, el tiempo de contacto es pequeño, por lo que se espera que la fricción «estática» también lo sea.

Tabla 10.1 Fuerza de fricción estática en función del tiempo de contacto para el caso de un contacto de madera de roble frente al mismo material lubricado con grasa (u.a. = unidades arbitrarias).

t , min	F_e , u.a.
0	5,02
2	7,90
4	8,66
9	9,25
26	10,36
60	11,86
960	15,35

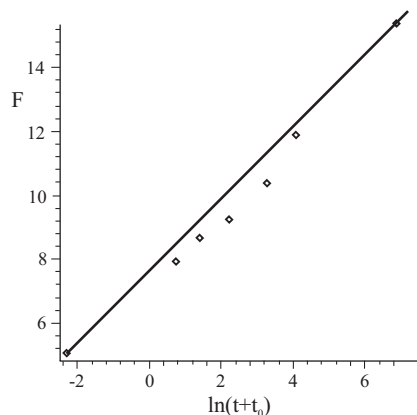


Fig. 10.4 Representación gráfica de los datos de Coulomb mostrados en la tabla 10.1. La fuerza de fricción estática se puede representar como una función del logaritmo del tiempo:

$$F = a + b \ln(t + t_0) \text{ con } a = 7,28, b = 1,10 \text{ y } t_0 = 0,101 \text{ min.}$$

También la fuerza de fricción dinámica surge de las micro-rugosidades y hace que los contactos tengan una duración variable con la velocidad de deslizamiento, lo cual conduce a una fricción dinámica que asimismo depende de la velocidad. Estos casos muestran que la diferencia entre la fuerza de fricción estática y dinámica es relativa y que esta ofrece una visión muy simplificada de la realidad. De hecho, en muchos procesos ambas fuerzas están estrechamente interrelacionadas, tanto entre sí como con la dinámica de contacto, y de maneras distintas.

10.5 DEPENDENCIA DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CON LA FUERZA NORMAL

También la dependencia lineal de la fuerza de fricción con respecto a la fuerza de compresión (expresión (10.1) o (10.2)) es solo válida en un determinado intervalo de fuerzas –ni demasiado grandes ni demasiado pequeñas. En el caso de metales, este intervalo puede comprender fuerzas de compresión de varios órdenes de magnitud, como se ilustra en la fig. 10.5³.

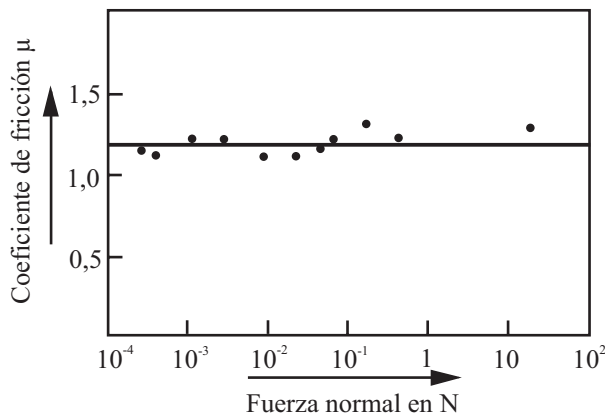


Fig. 10.5 Coeficiente de fricción del acero sobre aluminio pulido mediante electrólisis. El coeficiente de fricción es constante para cargas desde 10 mg a 10 kg, es decir, para cambios de carga del orden de 10^6 .

La dependencia lineal deja de ser válida cuando el área real de contacto es comparable al área aparente de contacto. Este límite se alcanza muy fácilmente en el caso de metales blandos como Indio o Plomo, pero especialmente en polímeros y elastómeros en los que, por este motivo, se detectan a menudo desviaciones con

3. F.P. Bowden, D. Tabor. *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford (2001).

respecto a la ley de Amonton. En la fig. 10.6 se representa la fuerza de fricción entre acero y teflón en función de la carga normal. La fuerza de fricción es, en buena aproximación, proporcional a $F_N^{0.85}$. El coeficiente de fricción disminuye por tanto con la carga normal.

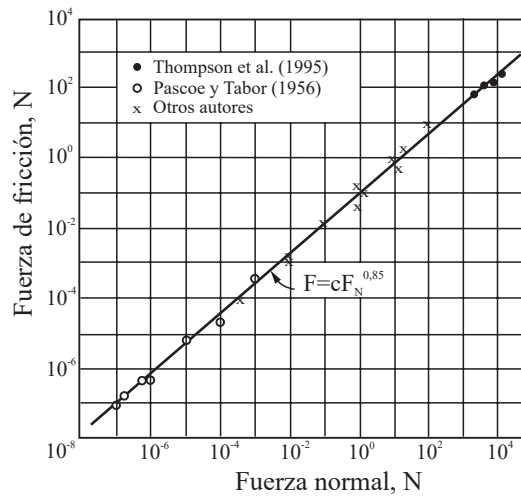


Fig. 10.6 Coeficiente de fricción entre acero y teflón en función de la carga normal. Fuente: E Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. 2.ª edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).

10.6 DEPENDENCIA DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CON LA VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO⁴

A menudo y por simplicidad, se asume que el coeficiente de fricción dinámica no depende de la velocidad. También en este caso, se trata de una buena aproximación pero burda, la cual es válida para velocidades ni demasiado pequeñas ni demasiado grandes. La dependencia exacta de la fuerza de fricción con la velocidad es importante en muchas aplicaciones. Si la fuerza de fricción disminuye con la velocidad, en general el deslizamiento estacionario no es estable, y de ahí surgen inestabilidades en el rozamiento⁵.

4. Véase también la sección 20.3.

5. Las inestabilidades del rozamiento se discutirán en detalle en el capítulo 12.

10.7 DEPENDENCIA DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CON LA RUGOSIDAD SUPERFICIAL

A menudo se relaciona el origen de la fricción con la aspereza de las superficies. De hecho, en Ingeniería Mecánica se denominan «ásperas» a aquellas superficies en las que ocurre o bien rozamiento o bien adherencia, frente a las llamadas «lisas», en las que no existe rozamiento. Cualquier tribólogo sabe que esta clasificación no corresponde a la realidad. En una amplia tipología de rugosidades superficiales, la fuerza de fricción no depende, o si lo hace muy débilmente, de la rugosidad. Contrariamente a lo que podría esperarse, el coeficiente de fricción de superficies metálicas especialmente lisas puede ser incluso mayor que el de superficies rugosas. El efecto de la rugosidad en el rozamiento depende de muchos factores, entre los cuales figuran la presencia de impurezas o de películas de fluido en el contacto tribológico.

Una impresionante demostración de la dependencia débil de la fricción (y del desgaste) con la rugosidad superficial, es la que muestran los experimentos de transporte de elementos radiactivos entre dos cuerpos en contacto.

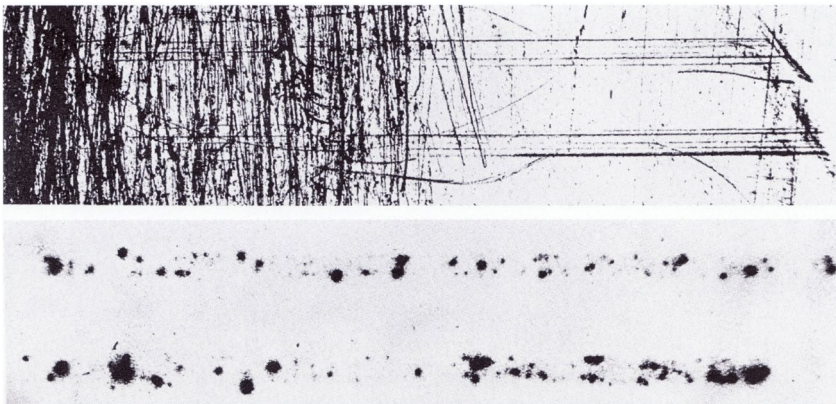


Fig. 10.7 Fotografía y radiografía de una superficie de cobre tras realizar un experimento de fricción con una carga de 40 N y una velocidad de deslizamiento igual a 0,01 cm/s. La superficie está dividida en dos zonas. En una zona, la rugosidad es de 25 nm y en la otra 20 veces mayor (500 nm). Tanto la fuerza de fricción como el desgaste son prácticamente independientes de la rugosidad⁶.

En la fig. 10.7 se muestran los resultados de un experimento en el que un bloque de cobre radiactivo se arrastra sobre una placa de cobre, la cual tiene una rugosidad de 25 nm en una parte, y en la otra rugosidad 20 veces mayor (500 nm). La gran diferencia en rugosidad no tiene apenas efecto en la fuerza de fricción ni en la transferencia de material de un cuerpo a otro (lo que se deja entrever al

6. E Rabinowicz. *Friction and wear of materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).

medir la radiactividad tras el ensayo mecánico). La rugosidad no tiene ni siquiera influencia en el tamaño de la región de contacto.

10.8 EL ORIGEN DE LA LEY DE ROZAMIENTO SEGÚN COULOMB

Coulomb propuso el primer modelo para explicar el origen físico del rozamiento, el cual explica algunas de las propiedades importantes de la fricción seca. Según su interpretación, el factor responsable la fuerza de fricción es el encaje que se produce entre las micro-rugosidades de ambas superficies en contacto, tal y como muestra de forma esquemática el dibujo de la fig. 10.8. Como ya se ha mencionado, el efecto de la rugosidad de las superficies sobre el rozamiento es en realidad mucho más complejo. No obstante, los análisis más modernos y complicados siempre conducen, una y otra vez, a las ideas más sencillas, que de hecho fueron propuestas por Coulomb. Por consiguiente, se van a repasar brevemente estas ideas.

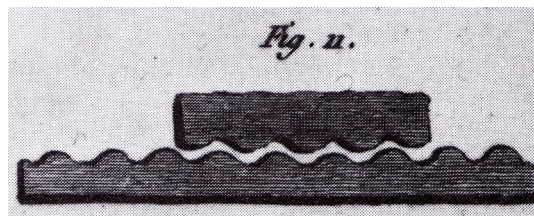


Fig. 10.8 Acoplamiento de rugosidades como causa de la fuerza de fricción (esquema de Coulomb).

Como hizo Coulomb en su día, considérese un cuerpo que se presiona sobre una superficie ondulada como modelo de fricción seca. Para simplificar aún más, se reduce el cuerpo a una masa puntual. Esto proporciona el sencillo modelo representado en la fig. 10.9 a.

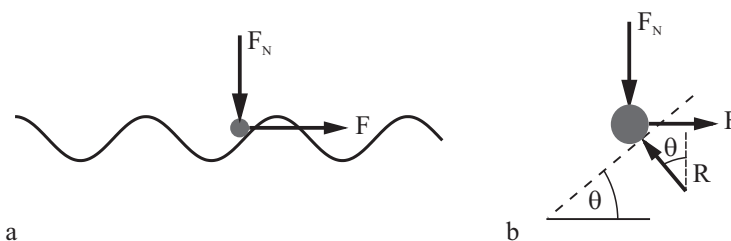


Fig. 10.9 El modelo sencillo de Coulomb para la fricción seca.

Entre la superficie ondulada y la masa puntual no debería existir fricción estática. Del perfil mostrado en la fig. 10.9 b se deducen las siguientes condiciones de equilibrio

$$R \cos \theta = F_N, \quad R \operatorname{sen} \theta = F. \quad (10.6)$$

De ahí se desprende que

$$F = F_N \tan \theta. \quad (10.7)$$

La fuerza de fricción estática F_e es, por definición, igual a la fuerza máxima F para la que aún se mantiene el equilibrio:

$$F_e = F_{\max} = F_N \tan \theta_{\max}. \quad (10.8)$$

Por tanto, el coeficiente de rozamiento estático es igual a la pendiente máxima de la superficie:

$$\mu_e = \tan \theta_{\max}. \quad (10.9)$$

Este modelo permite obtener de forma sencilla una de las características más importantes de la fricción seca –su proporcionalidad con la carga normal– y además proporciona una sencilla explicación geométrica del coeficiente de fricción. Aplicado a cuerpos extensos que exhiben un «encaje» periódico –como en el esquema de Coulomb–, este modelo también explica la independencia del coeficiente de fricción en el área de contacto. Sin embargo, no explica la observación experimental de que la fuerza de fricción es independiente (o depende muy débilmente) de la rugosidad superficial.

10.9 LA TEORÍA DE BOWDEN Y TABOR

Se han realizado muchos intentos de explicar la universalidad y la sencillez de la ley de Coulomb, y todo indica que la robustez de la ley de rozamiento de Coulomb tiene varias causas concurrentes. Una razón importante que explica la proporcionalidad de la fuerza de fricción con la fuerza normal tiene que ver con las propiedades del contacto entre superficies rugosas. En el capítulo 7 se mostró que propiedades tales como el área real de contacto y la extensión de contacto crecen aproximadamente de forma lineal con la fuerza de compresión, y no dependen del área aparente de contacto. Por el contrario, el ángulo de inclinación de la superficie en los micro-contactos no depende de la fuerza de compresión (o lo hace muy débilmente). Si se combinase la interpretación de la fuerza de fricción de Coulomb y el concepto de ángulo de inclinación de las superficies en contacto, el coeficiente de fricción sería independiente de la fuerza de compresión. En este caso, el coeficiente de fricción sería muy distinto para superficies rectificadas y para superficies pulidas, lo cual casi nunca sucede.

En 1949 Bowden y Tabor propusieron una teoría sencilla que explica el origen de la fricción dinámica entre superficies metálicas mediante el establecimiento de uniones de soldadura. Cuando dos cuerpos se presionan entre sí, se crean algunas zonas puntuales en las que ambos se aproximan tanto que los átomos de un cuerpo entran en contacto con los del segundo cuerpo; al mismo tiempo existen zonas de extensión considerable, en las que la distancia de separación es tan grande que las interacciones interatómicas son despreciables. Las zonas donde se produce contacto se denominarán uniones, y al área total de dichas uniones se denominará área real de contacto A . El resto, que comprende un área mucho mayor que el área real de contacto, no contribuye apenas a la fricción dinámica.

En metales, el área real de contacto se puede estimar medianamente bien en la mayoría de los casos prácticos. Para ello se supone que todos los micro-contacts se deforman plásticamente y que el esfuerzo es igual a la dureza a compresión σ_0 del material. Esta suposición permite obtener la siguiente expresión para el área real de contacto

$$A \approx F_N / \sigma_0 . \quad (10.10)$$

Si para cizallar una unión de soldadura fuese necesario el esfuerzo tangencial τ_c , entonces la fricción estática máxima sería igual a

$$F_e = F_N \frac{\tau_c}{\sigma_0} . \quad (10.11)$$

Dado que para cuerpos plásticos e isotropos, la resistencia o tenacidad a la cizalla es aproximadamente igual a $1/\sqrt{3}$ de la resistencia o tenacidad a la tracción, y esta a su vez igual a $1/3$ de la dureza, en general debería darse la siguiente dependencia universal $F_e \approx \left(\frac{1}{6} \div \frac{1}{5}\right) F_N$, con un coeficiente de fricción $\mu \approx \frac{1}{6} \div \frac{1}{5}$.

Para muchos pares de metales no lubricados (como por ejemplo, acero con acero, acero con bronce, acero con fundición gris, entre otros), el coeficiente de fricción es del orden $\mu \sim 0,16 - 0,2$. Para fuerzas de compresión altas y entre metales puros, este puede alcanzar valores más altos, lo cual puede estar relacionado con una deformación plástica mayor y la consiguiente transformación de la topografía superficial.

Los coeficientes de fricción entre materiales distintos dependen de muchos parámetros. No obstante, se puede establecer una clasificación, si bien aproximada, de acuerdo con las ideas de Bowden y Tabor. Téngase en cuenta que en un contacto tribológico con alta adherencia, existen zonas de contacto sometidas tanto a compresión (área $A_{\text{compresión}}$) como a tracción (área $A_{\text{tracción}}$). El esfuerzo en la zona sometida a compresión es aproximadamente igual a la dureza $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$. En la zona sometida a tracción se cumple que $\sigma \approx \zeta\sigma_c$, donde ζ es, generalmente, menor que 3. La fuerza normal es por tanto igual a

$$F_N = \sigma_c \left(3A_{\text{compresión}} - \zeta A_{\text{tracción}} \right). \quad (10.12)$$

Si todas las uniones de soldadura se sometieran a cizalladura, se obtendría la siguiente fuerza de fricción estática

$$F_e \approx \tau_c \left(A_{\text{compresión}} + A_{\text{tracción}} \right). \quad (10.13)$$

Para el coeficiente de fricción se obtiene la estimación

$$\mu \approx \frac{\tau_c \left(A_{\text{compresión}} + A_{\text{tracción}} \right)}{\sigma_c \left(3A_{\text{compresión}} - \zeta A_{\text{tracción}} \right)}. \quad (10.14)$$

Suponiendo que $\tau_c \approx \sigma_c / \sqrt{3}$, lo cual es válido para medios plásticos e isótropos, se obtiene la aproximación

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{A_{\text{compresión}} + A_{\text{tracción}}}{3A_{\text{compresión}} - \zeta A_{\text{tracción}}} \right). \quad (10.15)$$

Considérense a continuación los casos siguientes:

1. *Metales puros en presencia de trazas de lubricante que no producen ningún efecto lubricante, pero que evitan la alta adherencia metálica.* En este caso, $A_{\text{tracción}} = 0$ y el coeficiente de fricción adquiere el valor universal mencionado anteriormente, dado por

$$\mu \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0,19. \quad (10.16)$$

Este coeficiente de fricción es, por tanto, característico de la fricción seca entre metales bajo condiciones normales, es decir, aquellas donde las superficies presentan trazas de óxido u otras impurezas en muy pequeña cantidad.

2. *Metales puros con superficies sin lubricante, pero con una capa de óxido.* En este caso se puede suponer que la adherencia es alta y que las superficies sometidas a compresión y tracción son aproximadamente iguales. La función de soporte de los micro-contacts se mantiene intacta gracias a la diferencia entre las propiedades plásticas bajo tracción y bajo compresión. Para el coeficiente de fricción se obtiene la aproximación

$$\mu \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3-\zeta} \right). \quad (10.17)$$

Para $\zeta = 1 - 2$, se obtienen coeficientes de rozamiento del orden de $\mu \approx 0,6 - 1,2$. Estos coeficientes son típicos de metales puros con estructura cristalina cúbica (como por ejemplo, Fe, Al, Cu, Ni, Pb, Sn). Para metales con estructura cristalina hexagonal (Mg, Ti, Zn, Cd), el coeficiente de rozamiento es en torno a 0,6.

3. *Metales puros con una capa delgada de un metal más blando* (como por ejemplo, plomo o zinc sobre acero, cobre, plata, ...). Siempre y cuando la capa sea suficientemente delgada (aprox. 100 nanómetros), la ecuación (10.11) será válida, donde σ_0 es la dureza del material más duro y τ_c la resistencia o tenacidad a la cizalla del metal más blando. El coeficiente de fricción es, en este caso, menor que para metales puros, y puede ser 0,1 o incluso menor.

4. *Materiales multifásicos*. La mayor parte de los materiales de interés en aplicaciones tribológicas no son metales puros, sino aleaciones multifásicas que, por regla general, están compuestas de una matriz dura y de una serie de inclusiones más blandas. Esta estructura la tienen, por ejemplo, el latón y el bronce, los cuales se emplean como materiales en la elaboración de cojinetes. Se cree que la función de estas aleaciones se basa en la extrusión del metal más blando, el cual forma una capa delgada sobre la superficie de deslizamiento y reduce la fricción mediante el mecanismo descrito en el caso 3.

5. *Superficies que solo se deforman elásticamente*. En el caso del diamante o de recubrimientos amorfos de carbono, la ecuación (10.11) no es aplicable, dado que las superficies se deforman de forma puramente elástica.

10.10 DEPENDENCIA DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CON LA TEMPERATURA

Dado que el cociente entre la resistencia a la cizalla y la dureza no depende de la temperatura, el coeficiente de fricción entre metales puros tampoco lo hace. Esto se cumple siempre que las condiciones no cambien de forma que induzcan alguna transición entre las categorías anteriormente descritas. En soportes duros recubiertos con capas delgadas y blandas, el coeficiente de fricción crece rápido cuando se alcanza la temperatura de fusión de la capa. En recubrimientos metálicos, esto ocurre de forma especialmente abrupta a la temperatura de fusión del metal más blando, y en grasas lubricantes o en el caso de que se formen jabones metálicos en la superficie deslizante, a la temperatura de distorsión térmica de la grasa o del jabón.

Bajo condiciones normales, que en la sección anterior se describieron bajo el epígrafe de caso 1, el coeficiente de fricción de muchos pares metálicos depende de la temperatura solo débilmente hasta aprox. 150 °C. Entre 200 °C y 300 °C. aquel sufre un fuerte aumento. En estas condiciones, el coeficiente de fricción puede aumentar el doble o el triple. A temperaturas aún más altas, se mantiene prácticamente constante o aumenta ligeramente. La fig. 10.10 muestra un ejemplo típico de comportamiento térmico. A menudo este proceso se asocia a una distorsión o desajuste del recubrimiento, típicamente en forma de restos de grasa.

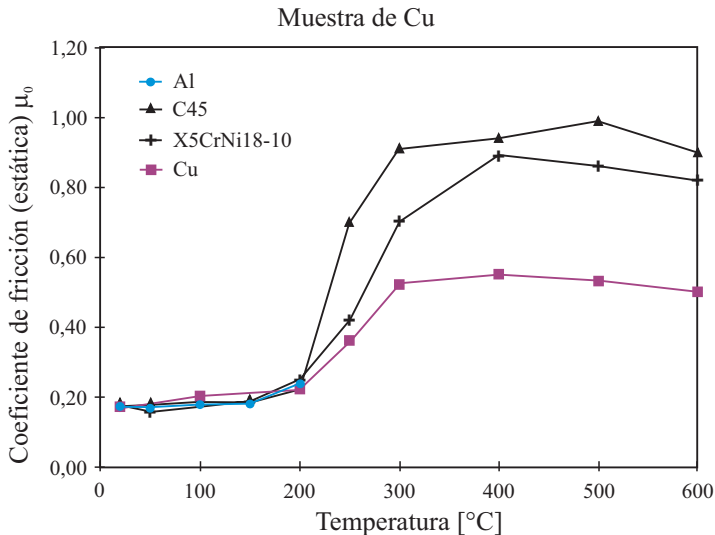


Fig. 10.10 Coeficiente de fricción estática en función de la temperatura para muestras de cobre frente a aluminio, acero (C45 y X5CrNi18-10) y cobre. Fuente: Martin Köhler. *Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten zwischen zwei metallischen Festkörpern*. Cuvillier Verlag, Göttingen (2005).

En la región de bajas temperaturas, el coeficiente de fricción es constante y relativamente bajo. Este depende tan solo débilmente de los materiales en contacto y tiene un valor del orden de 0,16-0,22. Dicha región se caracteriza por unas condiciones en las que la capa de óxido u otras capas de otro(s) material(es) añadidas a la superficie del metal se mantienen íntegras. La región de coeficientes de fricción altos es característica de condiciones en las que se produce el contacto metálico.

PROBLEMAS RESUELTOS⁷

Problema 1: El autobloqueo. Una varilla se sujeta a modo de brazo a una vara vertical, que actúa de soporte, mediante un casquillo de altura ajustable. En dicho brazo se coloca un peso corredizo (fig. 10.11 a). Siempre que el peso se encuentre lo bastante lejos del soporte, aquel se detendrá debido a las fuerzas de fricción que actúan en las esquinas del casquillo (autobloqueo). Determinar la condición de autobloqueo.

7. En los problemas de este capítulo se utilizará la ley de rozamiento de Coulomb en sus formas más sencillas, dadas por las expresiones (10.1) y (10.2).

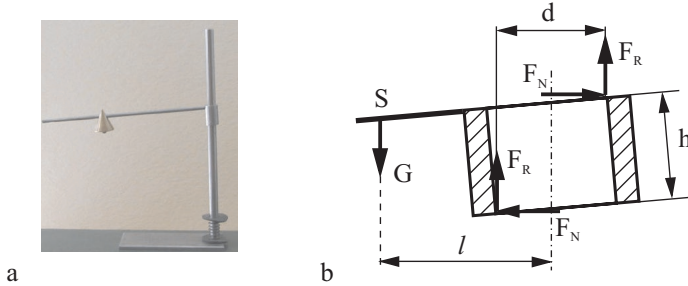


Fig. 10.11 Sistema sencillo de autobloqueo y su correspondiente diagrama de fuerzas de cuerpo libre.

Resolución: Del equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal se observa que las dos fuerzas de reacción F_N que actúan en las esquinas son iguales en magnitud (así aparecen dibujadas en la fig. 10.11 b). En el límite entre el deslizamiento y el bloqueo, la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo $F_e = \mu_e F_N$. Del equilibrio de fuerzas en la dirección vertical se tiene que

$$2\mu_e F_N - G = 0$$

y del equilibrio de pares de fuerzas con respecto al centro del casquillo

$$Gl - 2F_N \frac{h}{2} = 0$$

se obtiene la longitud crítica:

$$l_c = \frac{h}{2\mu_e}.$$

Problema 2: Fuerza lateral. Un coche acelera o frena por la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y la carretera. En estos casos, la fuerza de rozamiento F_R debe ser más pequeña que la fuerza de fricción estática⁸: $F_R < F_e = \mu_k F_N$. Determinar la fuerza lateral F_{\perp} , a la que el coche empieza a resbalar lateralmente.

Resolución: Tanto la fuerza de frenado como la fuerza lateral son componentes de la fuerza de rozamiento en el contacto rodante. El deslizamiento puro comienza cuando $F_R^2 + F_{\perp}^2 > F_s^2$. De aquí se deduce que

8. Durante la rodadura, la máxima fuerza de fricción se determina mediante el coeficiente de rozamiento *dinámico*, $F_e = \mu_d F_N$, puesto que se da la transición entre el deslizamiento parcial y el total.

$$F_{\perp} > \sqrt{(\mu_d F_N)^2 - F_R^2} .$$

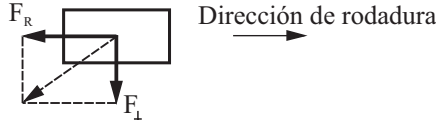


Fig. 10.12 La fuerza resultante de la fricción en el contacto rodante.

Problema 3: Al frenar completamente, las ruedas de un coche se bloquean y deslizan con una velocidad v_0 sobre la carretera. ¿Qué velocidad lateral producirá una fuerza pequeña F_{\perp} actuando en esa dirección?

Resolución: La magnitud de la fuerza de fricción dinámica no depende de la velocidad, pero la orientación es contraria a la dirección del deslizamiento. De ello se deduce que: $\frac{v_{\perp}}{v_0} \approx \frac{F_{\perp}}{\mu_d F_N}$ y

$$v_{\perp} \approx F_{\perp} \left(\frac{v_0}{\mu_d F_N} \right) .$$

La velocidad lateral es proporcional a la fuerza lateral.

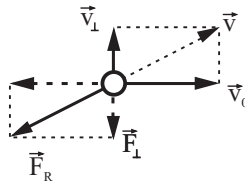


Fig. 10.13 Componentes de la fuerza y la velocidad en una rueda deslizando sobre la que actúa una pequeña fuerza lateral F_{\perp} .

Problema 4: Rozamiento de una cuerda. Una cuerda o cable se hace pasar en torno a un poste de sección circular (fig. 10.14 a). El ángulo de contacto entre la cuerda y el poste es igual a $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. De un extremo de la cuerda se tira con la fuerza F_2 . Determinar la fuerza F_1 necesaria para parar el movimiento de la cuerda.

Resolución: Considérese un elemento infinitesimal de la cuerda (fig. 10.14 b). El equilibrio de fuerzas en la dirección de orientación del elemento se formula como

$$F(\varphi + d\varphi) - F(\varphi) - dF_R = 0$$

o

$$\frac{dF}{d\varphi} d\varphi - dF_R = 0 .$$

En la dirección perpendicular se cumple que

$$dN - Fd\varphi = 0 .$$

Donde dN es la fuerza de reacción que actúa sobre el elemento y dF_R es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el elemento. La cuerda no deslizará hasta que la fuerza de rozamiento alcance su valor máximo $dF_R = \mu dN$. De estas tres ecuaciones se obtiene que

$$\frac{dF}{d\varphi} = \mu F .$$

Tras separar variables, $dF / F = \mu d\varphi$, e integrar, se obtiene $\ln F \Big|_{F_1}^{F_2} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu\alpha$. De aquí resulta

$$F_2 = F_1 e^{\mu\alpha} \text{ o } F_1 = F_2 e^{-\mu\alpha} .$$

Ejemplo numérico: Para $\mu = 0,4$, $\alpha = 2\pi$ (una vuelta de cuerda completa) se obtiene $F_2 \approx 12 \cdot F_1$. Para dos vueltas de cuerda se obtendría $F_2 \approx 152 \cdot F_1$.

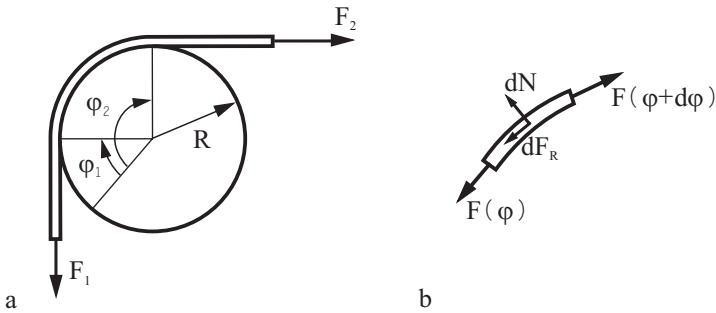


Fig. 10.14 Una cuerda en torno a un poste y el correspondiente diagrama de cuerpo libre en un elemento infinitesimal de la misma.

Problema 5: Un contenedor cilíndrico (radio R) está lleno de arena. El coeficiente de fricción de la arena con la pared del contenedor es igual a μ . Calcular la presión sobre la arena en función de la altura.

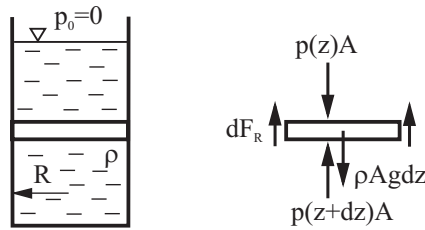


Fig. 10.15 Corte infinitesimal de una columna de arena.

Resolución: En el caso de que el coeficiente de fricción no sea muy grande, la presión en la arena es «casi isotropa» (como en un fluido). Teniendo en cuenta esta aproximación, se considera el equilibrio de fuerzas en un corte de la columna de arena de espesor infinitesimal (fig. 10.15):

$$\rho g \pi R^2 dz + (p(z) - p(z + dz)) \pi R^2 - dF_R = 0$$

o

$$\rho g \pi R^2 dz - \frac{dp}{dz} dz \cdot \pi R^2 - dF_R = 0.$$

La fuerza de rozamiento se deriva de la ley de Coulomb $dF_R = \mu p 2\pi R dz$. De ambas ecuaciones se obtiene

$$\rho g - \frac{dp}{dz} - 2 \frac{\mu p}{R} = 0.$$

Separando variables, $dz = \frac{dp}{(\rho g - 2\mu p/R)}$, e integrando, resulta

$$p = \frac{\rho g R}{2\mu} \left(1 - e^{-\frac{2\mu z}{R}} \right).$$

Para z alta, la presión alcanza el valor de saturación $p_\infty = \rho g R / 2\mu$.

Problema 6: Para controlar la dirección de las ruedas delanteras de un coche, se instalan brazos de control. En un primer paso, el brazo se fabrica a partir de una chapa metálica por embutición profunda (fig. 10.16 a). En un segundo paso, el cojinete de goma y metal (fig. 10.16 b) se inserta a presión en el orificio cilíndrico del brazo (fig. 10.16 c). Para garantizar la calidad, el fabricante del vehículo exige, como mínimo, una carga de extracción del cojinete de 5,5 kN. Calcular la carga de extracción. ¿Qué factores influyen en la misma? Utilizar los siguientes datos: altura del orificio cilíndrico $L = 2$ cm, radio del orificio $R = 1,6$ cm, espesor de la chapa metálica $t = 1,6$ mm, límite de fluencia de la chapa $\sigma_c = 300$ MPa, coeficiente de rozamiento $\mu = 0,16$.



Fig. 10.16 (a) Brazo de control y detalle del orificio (b) Foto de perfil del cojinete ranurado goma-metal, (c) Brazo de control terminado, con el rodamiento encajado a presión.

Resolución: El esfuerzo radial σ_r que actúa sobre el orificio cilíndrico del brazo de control produce un esfuerzo de tracción σ_ϕ en la chapa (fig. 10.17). La relación entre ambos esfuerzos viene dada por la fórmula de la tensión circunferencial en un cilindro de pared delgada $\sigma_\phi = \sigma_r R / t$. El encaje a presión del cojinete hace que la chapa se deforme plásticamente: $\sigma_\phi = \sigma_c$.

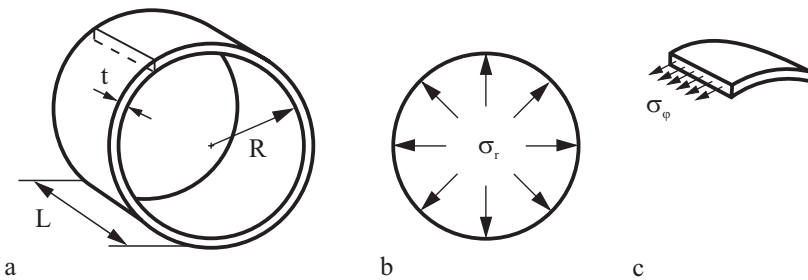


Fig. 10.17 (a) Cilindro de pared delgada. (b) Esfuerzos radiales constantes causados por la presión sobre la pared del cilindro. (c) Tensión circunferencial σ_ϕ , visible en una sección del cilindro.

Para el esfuerzo radial se tiene, por tanto,

$$\sigma_r = \sigma_c \frac{t}{R}.$$

La fricción estática máxima se calcula multiplicando este esfuerzo por el área de la pared interna del orificio $2\pi RL$ y por el coeficiente de fricción:

$$F_{extracción} = 2\pi L \mu \sigma_c t.$$

La fuerza de extracción del cojinete para los valores dados en el enunciado del problema resulta ser $F_{extracción} \approx 9,6 \text{ kN}$.

Problema 7: Reptación térmica (o creep térmico). A una placa de longitud L apoyada sobre un plano con coeficiente de fricción μ , se le aplica una fuerza en dirección horizontal F , la cual es más pequeña que la fuerza de fricción dinámica.

La presencia de la fuerza F hace que, cuando la placa se caliente, esta se dilate de manera asimétrica con respecto al sustrato. Cuando la temperatura se disminuye a su valor inicial, la placa se contrae a su tamaño original. Determinar el desplazamiento de la placa tras un ciclo térmico completo (fig. 10.18).

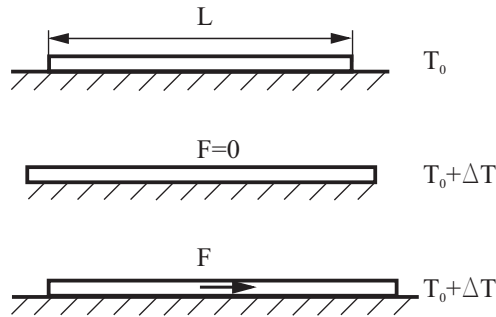


Fig. 10.18 Proceso de *creep* térmico en una placa sobre un sustrato con coeficiente de fricción μ .

Resolución: Supóngase que la placa es suficientemente rígida. Si esta se calentase, se dilataría en la magnitud $\Delta L = \alpha \Delta T L$ con respecto al sustrato, y esta elongación sería simétrica en ambas direcciones, de forma que su centro de gravedad permanecería en la misma posición. Si durante el calentamiento se le aplica a la placa una fuerza F en dirección horizontal y hacia la derecha, la placa se desplazará de forma asimétrica. En vez del centro de gravedad, el punto que permanece constante es ahora el que se encuentra a una distancia Δl a la izquierda del mismo. Esto es debido a que la contribución a la fuerza de fricción que actúa a la derecha debe ser menor que la que actúa a la izquierda, de tal modo que la fuerza de fricción resultante está en equilibrio mecánico con F (fig. 10.19).

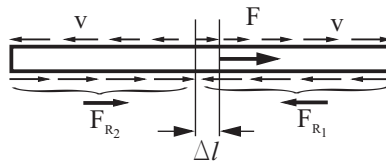


Fig. 10.19 Dinámica del proceso de reptación (del inglés, *creep*).

Dado que la fuerza de fricción se opone a la dirección del movimiento, la contribución de la fuerza de fricción que se opone al movimiento hacia la izquierda debe ser mayor que la que se opone al movimiento hacia la derecha. La condición de equilibrio mecánico durante el calentamiento de la placa se enuncia, por tanto, de la siguiente manera:

$$F - \mu mg \left(\frac{L/2 + \Delta l}{L} \right) + \mu mg \left(\frac{L/2 - \Delta l}{L} \right) = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\Delta l = \frac{F}{\mu mg} \frac{L}{2}.$$

En consecuencia, el centro de gravedad se desplaza durante el calentamiento una magnitud

$$u_G = \varepsilon_l \Delta l = \frac{FL}{2\mu mg} \alpha \Delta T.$$

Durante el enfriamiento, el centro de gravedad se desplaza en el *mismo* sentido y en la *misma* magnitud. El punto en reposo debe ahora estar a la *derecha* del centro de gravedad, dado que la orientación de la elongación y la de la fuerza de fricción son contrarias. El desplazamiento global en un ciclo completo es, por tanto, igual a

$$u_{global} = \frac{FL}{\mu mg} \alpha \Delta T.$$

El desplazamiento es proporcional a la fuerza –también en el caso de fuerzas muy pequeñas. Procesos de índole parecida suelen darse entre fases con diferentes coeficientes de dilatación térmica, y son la causa del *creep termo-cíclico* en materiales multifásicos y composites.

Problema 8: Calcular el coeficiente de rozamiento estático de una superficie ondulada de pendiente máxima tal que $\mu_1 = \tan \theta_1$ (fig. 10.20) en presencia de rozamiento «microscópico» caracterizado por el coeficiente μ_0 .

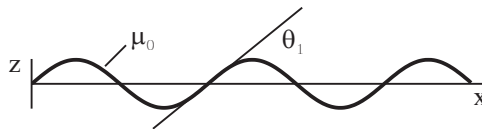


Fig. 10.20 Superficie ondulada con rozamiento.

Resolución: Partiendo del diagrama de cuerpo libre de la fig. 10.20, se pueden formular las ecuaciones del equilibrio (en las direcciones x' y z') en el estado crítico:

$$F_N \cos \theta_1 + F \operatorname{sen} \theta_1 = R,$$

$$F_N \operatorname{sen} \theta_1 + \mu_0 R = F \cos \theta_1.$$

De lo cual se desprende que

$$\mu = \frac{F}{F_N} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1}.$$

Hay que tener en cuenta, que esta especie de «superposición» de coeficientes de fricción a diferentes escalas tiene una interpretación geométrica sencilla, e implica que los ángulos críticos a distintas escalas se suman. En efecto, si se escribe $\mu_1 = \tan \theta_1$, $\mu_0 = \tan \theta_0$ y $\mu = \tan \theta$ tal que $\theta = \theta_0 + \theta_1$, se llega al mismo resultado

$$\mu = \tan \theta = \frac{\sin(\theta_0 + \theta_1)}{\cos(\theta_0 + \theta_1)} = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_1 + \cos \theta_0 \sin \theta_1}{\cos \theta_0 \cos \theta_1 - \sin \theta_0 \sin \theta_1} = \frac{\tan \theta_0 + \tan \theta_1}{1 - \tan \theta_0 \cdot \tan \theta_1} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{1 - \mu_0 \mu_1}.$$

En consecuencia, se puede formular la siguiente «regla de superposición» de coeficientes de fricción a distintas escalas:

$$\mu_{total} = \tan \left(\sum_i \arctan \mu_i \right),$$

donde μ_i son los coeficientes de fricción que se dan en cada una de las escalas espaciales.

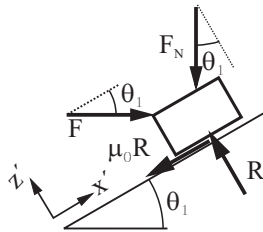


Fig. 10.21 Diagrama de fuerzas de un cuerpo sobre una superficie ondulada con rozamiento.

Problema 9: Dos discos de masas m_1 y m_2 y coeficientes de rozamiento dinámicos μ_1 y μ_2 , están unidos por una barra rígida de longitud l (fig. 10.22). Determinar las condiciones bajo las que el desplazamiento del sistema en la dirección de la barra es estable.

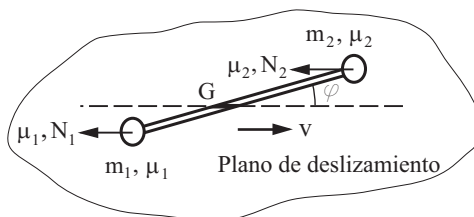


Fig. 10.22 Dos discos unidos por una barra ligera y rígida.

Resolución: Se supone que la orientación de la barra se desvía de la dirección de deslizamiento un pequeño ángulo φ (fig. 10.22), y en base a ello, se calculan las componentes del par de fuerzas que tiende a girar la barra en el plano del

deslizamiento. El movimiento es estable cuando el par es negativo, de manera que el ángulo φ decrece; por el contrario, un par positivo conduce a un aumento del ángulo. Se denominarán a_1 y a_2 a las distancias respectivas de los discos al centro de gravedad:

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

Las fuerzas normales N_1 y N_2 se calculan mediante

$$N_1 = m_1 g, \quad N_2 = m_2 g.$$

Solo los coeficientes de fricción contribuyen a la proyección del par de fuerzas sobre el eje normal al plano de deslizamiento. El par de fricción resultante con respecto al centro de gravedad G es igual a:

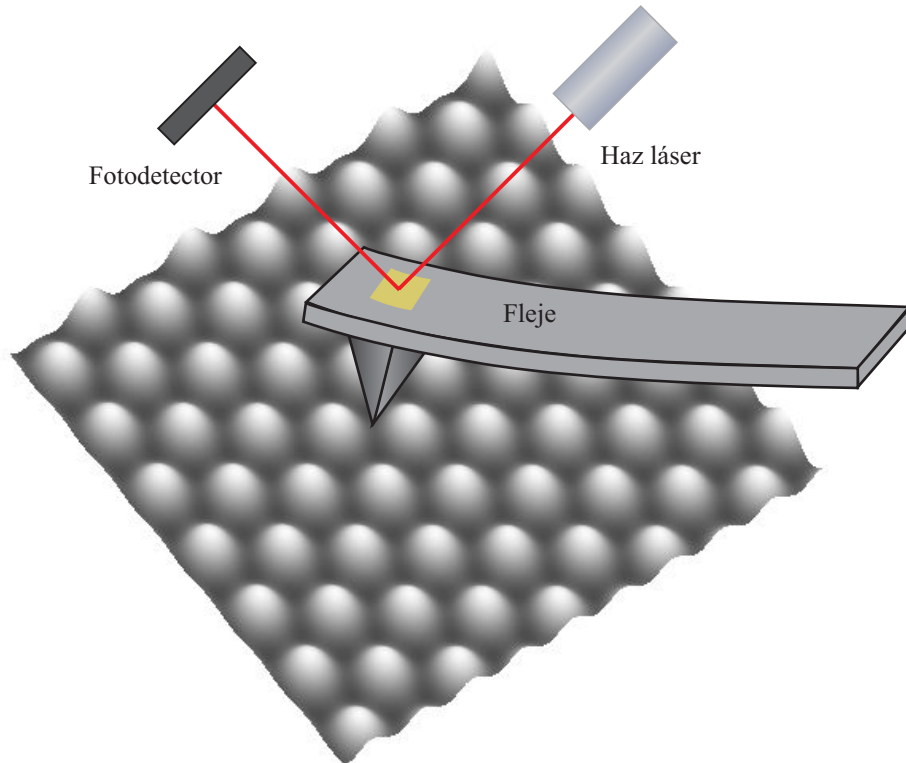
$$M^{(G)} = (-\mu_1 N_1 a_1 + \mu_2 N_2 a_2) \operatorname{sen} \varphi = (-\mu_1 + \mu_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g l \operatorname{sen} \varphi.$$

El par es negativo y el movimiento estable cuando

$$\mu_1 > \mu_2.$$

El movimiento también es estable cuando el disco al frente se desliza con el menor coeficiente de fricción. De lo contrario, el deslizamiento es inestable, y la barra gira para deslizarse después, también en este caso, con el disco de menor coeficiente de fricción al frente.

11. EL MODELO PRANDTL-TOMLINSON DE LA FRICCIÓN SECA



11.1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos experimentales para la investigación de los procesos de fricción a escala atómica, así como de métodos de simulación numérica, ha provocado un rápido aumento en el número de trabajos científicos en el área de la fricción de cuerpos sólidos a escala atómica. Como base de muchas investigaciones sobre los mecanismos de fricción a dicha escala, se puede emplear un modelo sencillo, el cual se conoce como modelo Tomlinson. Este fue propuesto por Prandtl en el año 1928 para describir la deformación plástica en cristales¹. La publicación de Tomlinson² que se suele citar en este contexto, no contiene

-
1. L. Prandtl: «Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper», *ZAMM* **8**, 85-106 (1928).
 2. G.A. Tomlinson: *A molecular theory of friction*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1929, Vol. 7 (Suplemento 46), p. 905.

el «modelo Tomlinson»³ como tal, sino que se centra en fundamentar la contribución de la adherencia en el rozamiento. No obstante, se referirá al modelo como «modelo Prandtl-Tomlinson» de ahora en adelante. Prandtl consideró el movimiento unidimensional de una masa puntual sometida a la acción de una fuerza F con un potencial periódico caracterizado por un número de onda k y un amortiguamiento proporcional a la velocidad⁴ (Fig. 11.1):

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N \operatorname{sen} kx. \quad (11.1)$$

donde x es la coordenada de posición del cuerpo, m es su masa, F es la fuerza externa aplicada sobre el cuerpo, η es el coeficiente de amortiguamiento, N es la amplitud de la fuerza periódica y k el número de onda.



Fig. 11.1 Modelo Prandtl-Tomlinson: Una masa puntual en un potencial periódico.

El modelo Prandtl-Tomlinson describe muchas propiedades fundamentales de la fricción seca. En efecto, hay que aplicar al cuerpo una determinada fuerza mínima para que pueda iniciarse el movimiento a escala macroscópica. A dicha escala, esta fuerza mínima no es otra que la fricción estática. En general, si el cuerpo está en movimiento y se deja de aplicar la fuerza, aquel se moverá incluso en el caso de se encuentre bajo la acción de una fuerza menor a la fuerza de fricción estática, dado que, gracias a su inercia, el cuerpo puede reunir parte de la energía necesaria. Desde el punto de vista macroscópico, esto significa que la fricción dinámica puede ser menor que la fricción estática, una característica de la fricción seca que suele darse a menudo. La fuerza de fricción estática en el modelo caracterizado por la ecuación (11.1) es igual a N .

El éxito del modelo, el cual ha sido analizado en incontables publicaciones en sus múltiples variantes y generalizaciones, y empleado en la interpretación de numerosos procesos tribológicos, radica en que es minimalista y reproduce las dos propiedades básicas más importantes de todo sistema sometido a fricción.

3. Esto demuestra lo certera que es la siguiente definición de la ciencia:

*Die Wissenschaft, sie ist und bleibt,
Was einer ab vom andern schreibt.
Doch trotzdem ist, ganz unbestritten,
Sie immer weiter fortgeschritten...*

Eugen Roth

(La ciencia es y sigue siendo,
lo que uno de otra fuente escribe.
Y sin embargo, incuestionablemente,
avanza permanentemente...).

4. De esta manera se puede, por ejemplo, describir el movimiento de la punta de un microscopio de fuerza atómica sobre una superficie cristalina.

Por un lado, describe el comportamiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza conservativa periódica de valor medio cero en combinación con una fuerza disipativa proporcional a la velocidad. Sin fuerza conservativa, puede no producirse agarre, y sin amortiguamiento, no hay fuerza de fricción macroscópica. Para modelizar dicha fuerza, ambos requisitos están incluidos en el modelo. En este sentido, el de Prandtl-Tomlinson es el modelo práctico más sencillo para un sistema tribológico. En esencia, el modelo es una reformulación y una simplificación más del enfoque de Coulomb sobre el origen del rozamiento como «encaje» entre superficies.

Evidentemente, el modelo no puede reproducir todos los detalles de un sistema tribológico real. Por ejemplo, el modelo no contempla el cambio del potencial superficial, el cual se produce por efecto del desgaste. No obstante, conviene resaltar que, en principio, es posible incorporar la deformación plástica mediante una extensión apropiada del modelo. En este sentido, cabe mencionar una vez más que el modelo de Prandtl del año 1928 se propuso para describir la deformación plástica en cristales.

En este capítulo se considera el modelo Prandtl-Tomlinson así como algunas de sus aplicaciones y generalizaciones.

11.2 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL MODELO PRANDTL-TOMLINSON

Si el cuerpo se encuentra en reposo y se le aplica una fuerza F , el equilibrio se desplaza al punto x donde se cumple que

$$F = N \operatorname{sen} kx. \quad (11.2)$$

Esta ecuación tiene solución solo si $F < N$. La fuerza de fricción estática en este modelo es, por tanto, igual a

$$F_e = N. \quad (11.3)$$

Si se aplica una fuerza mayor, el equilibrio no es posible, y el cuerpo se desplaza macroscópicamente⁵. Todo movimiento macroscópico del cuerpo se considera, en este modelo y desde el punto de vista microscópico, como superposición de un movimiento uniforme y una oscilación periódica, según muestra la fig. 11.2 a. En esta figura se han representado los resultados de la integración numérica de la ecuación (11.1). La fuerza tangencial aumenta de forma lenta desde cero hasta un valor máximo que es mayor que la fuerza de fricción estática, para disminuir una vez alcanzado ese valor. La curva muestra la velocidad instantánea en función de la fuerza instantánea. Tras alcanzarse la fuerza crítica, el cuerpo comienza a desplazarse con una velocidad macroscópica finita. Conforme disminuye la

5. El término «macroscópico» se refiere al desplazamiento del cuerpo en una escala espacial mayor que la longitud de onda del potencial. Por el contrario, la escala definida por la longitud de onda del potencial se denomina «microscópica».

fuerza, el cuerpo se mantiene en movimiento incluso cuando dicha fuerza es menor que la fuerza de fricción estática. Para un determinado valor crítico de velocidad, el desplazamiento macroscópico deja de producirse, y el cuerpo oscila varias veces en un mínimo de potencial antes de alcanzar el estado de reposo.

A escala macroscópica no se detectan las oscilaciones microscópicas. El movimiento descrito anteriormente corresponde a un proceso de fricción cuasi estacionario. La dependencia de la velocidad media con la fuerza aplicada se percibe, por un observador a esa escala, como *ley macroscópica del rozamiento* (fig. 11.2 b).

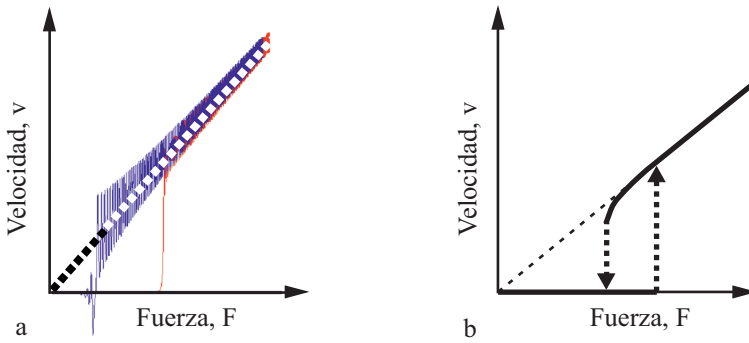


Fig. 11.2 (a) Velocidad instantánea en función de la fuerza (que a su vez aumenta de forma lineal con el tiempo) según el modelo Prandtl-Tomlinson. (b) Ley macroscópica del rozamiento – Dependencia de la velocidad media con la fuerza.

Caso límite – amortiguamiento débil

Si el amortiguamiento es nulo $\eta = 0$, y el cuerpo se pone en movimiento, este continuará moviéndose de forma ininterrumpida aún en ausencia de fuerzas externas ($F = 0$). Según la ley de conservación de la energía se tiene que

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{N}{k} \cos kx = \text{const}, \quad \text{para } \eta = 0, \quad F = 0. \quad (11.4)$$

La velocidad en función de la coordenada viene dada en este caso por

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)}, \quad \text{para } \eta = 0, \quad F = 0. \quad (11.5)$$

En presencia de un amortiguamiento débil, hay que aplicar una fuerza pequeña para poder mantener un movimiento estacionario. Este se alcanza siempre que el trabajo producido por la fuerza externa F a lo largo de una distancia igual a la longitud de onda $a = 2\pi/k$, Fa , sea igual a la energía que se consume $\int_0^T \eta v^2(t) dt$:

$$\frac{2\pi F}{k} = \int_0^T \eta v^2(t) dt = \int_0^a \eta v(x) dx = \eta \int_0^a \sqrt{\frac{2}{m} \left(E_0 + \frac{N}{k} \cos kx \right)} dx. \quad (11.6)$$

La fuerza mínima, F_1 , para la que aún se detecta movimiento macroscópico, viene dada por la expresión (11.6) con $E_0 = N/k$:

$$\frac{F_1}{N} = \frac{4}{\pi} \frac{\eta}{\sqrt{mkN}}. \quad (11.7)$$

El amortiguamiento para el que la fricción dinámica es igual a la fricción estática, es del orden de

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \approx 1, \quad (11.8)$$

y determina el límite entre el caso débilmente amortiguado (sistema *subamortiguado*) y el caso fuertemente amortiguado (sistema *sobreamortiguado*).

Caso límite – amortiguamiento fuerte

Bajo un amortiguamiento fuerte, el término inercial en la expresión (11.1) se puede despreciar:

$$0 = F - \eta \dot{x} - N \sin kx. \quad (11.9)$$

Se habla en este caso de un movimiento *sobreamortiguado*. La ecuación de movimiento es, en este caso, una ecuación diferencial de primer orden, la cual se puede expresar de la siguiente forma

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx. \quad (11.10)$$

La distancia correspondiente a una longitud de onda se recorrerá en el período dado por la siguiente expresión

$$T = \int_0^{2\pi/k} \frac{dx}{\frac{F}{\eta} - \frac{N}{\eta} \sin kx} = \frac{\eta}{kN} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{\frac{F}{N} - \sin z} = \frac{\eta}{kN} \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{F}{N}\right)^2 - 1}}. \quad (11.11)$$

La velocidad media de deslizamiento es, por tanto, igual a

$$\bar{v} = \frac{a}{T} = \frac{\sqrt{F^2 - N^2}}{\eta}. \quad (11.12)$$

La fuerza en función de la velocidad media se obtiene mediante la expresión

$$F = \sqrt{N^2 + (\eta \bar{v})^2}. \quad (11.13)$$

Dicha dependencia se representa en la fig. 11.3.

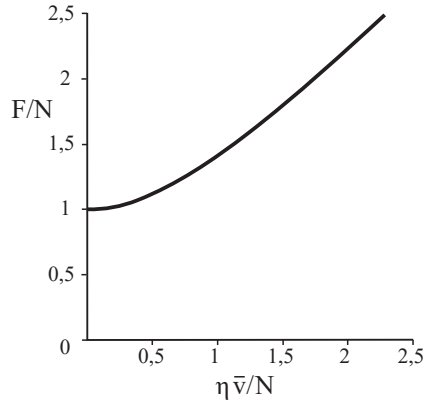


Fig. 11.3 La ley de rozamiento en el modelo Prandtl-Tomlinson en el caso sobreamortiguado.

El «diagrama de fases» del modelo Prandtl-Tomlinson

Para investigar las propiedades de la ecuación de Prandtl-Tomlinson para cualquier parámetro, se introducen en la expresión (11.1) las siguientes variables adimensionales

$$x = \xi \tilde{x}, \quad t = \tau \tilde{t}. \quad (11.14)$$

La ecuación de movimiento adquiere la forma

$$\frac{m\xi}{N} \frac{\tilde{x}''}{\tau^2} = \frac{F}{N} - \frac{\eta\xi}{N} \frac{\tilde{x}'}{\tau} - \text{sen}(k\xi\tilde{x}), \quad (11.15)$$

donde el símbolo «prima» denota la derivada $\partial/\partial\tilde{t}$. Se elige

$$k\xi = 1, \quad \tau^2 \frac{N}{m\xi} = 1, \quad (11.16)$$

y de esta manera, se transforma la expresión (11.15) en

$$\tilde{x}'' + \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} \tilde{x}' + \text{sen} \tilde{x} = \frac{F}{N}. \quad (11.17)$$

En función de las nuevas variables, la expresión contiene dos nuevos parámetros adimensionales

$$\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}}, \quad \kappa_2 = \frac{F}{N}. \quad (11.18)$$

La naturaleza del movimiento en las coordenadas adimensionales \tilde{x}, \tilde{t} depende tan solo de la posición del sistema en el plano determinado por los parámetros (κ_1, κ_2) . La fig. 11.4 representa el «retrato de fases» del sistema.

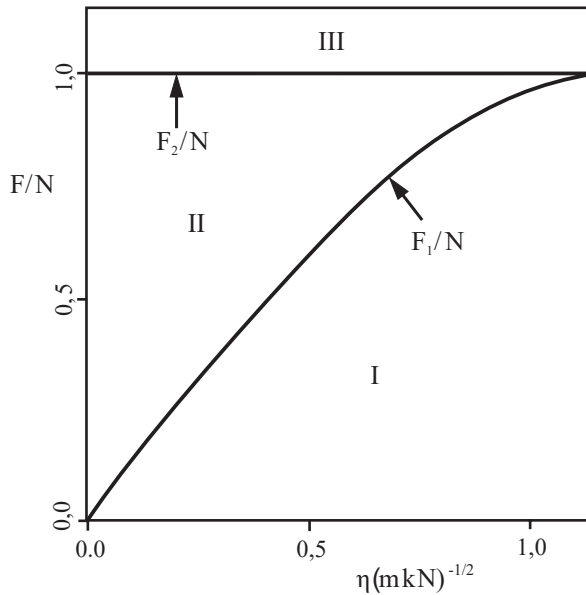


Fig. 11.4 Dos fuerzas críticas, F_1 y F_2 , en función del coeficiente de amortiguamiento.

Para $\kappa_1 = \frac{\eta}{\sqrt{mkN}} < 1,193$ se dan tres regiones I, II y III, separadas por las fuerzas críticas F_1 y F_2 . Para $F > F_2$ no existen soluciones en el equilibrio y el cuerpo se desplaza de forma continua. Si la fuerza decrece, el cuerpo alcanza el reposo cuando $F < F_1$. Entre las dos regiones existe otra en la que no dominan ni el reposo ($F < F_1$) ni el movimiento ($F > F_2$), la llamada *región de biestabilidad*, en la que el cuerpo, según su historia, se encuentra o bien en reposo o bien en movimiento. Esta región no existe cuando el amortiguamiento es superior a un valor crítico:

$$\frac{\eta}{\sqrt{mkN}} > 1,193. \quad (11.19)$$

En el caso de amortiguamientos menores, la fuerza crítica F_1 viene dada por la expresión (11.7).

11.3 INESTABILIDAD ELÁSTICA

La generalización más simple del modelo Prandtl-Tomlinson se representa en la fig. 11.5. En vez de aplicar una fuerza constante, el cuerpo se acopla a un fleje de rigidez c , sujeto a su vez a un dispositivo de deslizamiento que permite desplazarlo horizontalmente. Este modelo permite describir mejor el movimiento de la punta en un microscopio de fuerza atómica que el modelo original de Prandtl-Tomlinson, dado que aquel considera la rigidez del fleje de un microscopio de fuerza atómica de manera más sencilla.

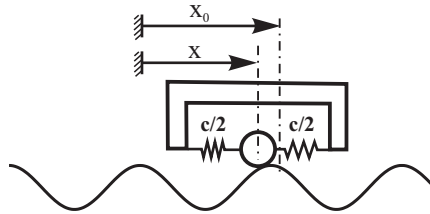


Fig. 11.5 Un cuerpo en un potencial periódico arrastrado por un fleje.

En este caso, la ecuación de movimiento se expresa de la forma siguiente

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = c(x_0 - x). \quad (11.20)$$

Si el dispositivo se desplaza lentamente a velocidad constante, el cuerpo se encuentra en posición de equilibrio, $x(x_0)$, en todo momento, donde $x_0 = x_0(t)$ es la coordenada del dispositivo. El valor medio de la fuerza elástica del muelle es, en este caso, igual a la fuerza de fricción (macroscópica). Si para *cada valor de x_0* existe solo *un* valor de equilibrio $x(x_0)$, el valor medio de la fuerza aplicada sobre el cuerpo *es cero*. Para demostrar dicha afirmación, se analiza la energía potencial total del cuerpo

$$U_{total}(x, x_0) = U(x) + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2. \quad (11.21)$$

La posición de equilibrio se obtiene de la siguiente condición

$$U'_{total}(x, x_0) = U'(x) + c(x - x_0) = 0, \quad (11.22)$$

donde la notación prima representa la derivada parcial $\partial / \partial x$. El valor medio de esta fuerza (en el tiempo o, lo que es lo mismo en este caso, en la coordenada x_0), es igual a

$$\bar{F}_{cuerpo} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' dx_0, \quad (11.23)$$

donde L es la longitud de onda del potencial. Diferenciando la ecuación (11.22), se obtiene

$$(U''(x) + c) dx = c dx_0, \quad (11.24)$$

que a su vez se va a utilizar en la expresión para sustituir la integración en dx_0 por la integración en dx :

$$\bar{F}_{\text{cuerpo}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U' \left(1 + \frac{U''}{c} \right) dx = -\frac{1}{L} \left[U(x) + \frac{U'^2(x)}{2c} \right]_0^L = 0. \quad (11.25)$$

La fuerza promedio es cero dado que tanto $U(x)$ como $U'^2(x)$ son funciones periódicas con el mismo argumento x . De ahí se infiere que, *bajo dichas condiciones, la fuerza de rozamiento es cero*. Esto se cumple para cualquier potencial periódico.

La situación cambia de manera sustancial cuando la coordenada de equilibrio x no es una función continua de x_0 , de manera que no cumple la ecuación (11.24) en algunos puntos. Como ejemplo se analiza el sistema mostrado en la fig. 11.5 con un potencial definido por

$$U(x) = -\frac{N}{k} \cos kx. \quad (11.26)$$

La condición de equilibrio (11.22) adquiere la forma

$$-\text{sen } kx = \frac{c}{N} (x - x_0). \quad (11.27)$$

Las funciones $-\text{sen } kx$ y $\frac{c}{N}(x - x_0)$ se muestran en la fig. 11.6 para distintos valores de x_0 . El punto de corte entre ambas funciones proporciona las coordenadas de equilibrio del cuerpo. Si $c/Nk > 1$, entonces x es una función continua de la coordenada del dispositivo móvil x_0 , la cual se representa en la fig. 11.6 b para el caso $c/Nk = 1,5$. Contrariamente, en el caso de que la rigidez del fleje sea menor que un valor crítico:

$$c/Nk < 1, \quad (11.28)$$

la función $x(x_0)$ muestra saltos (fig. 11.6 d). En este caso, el promedio temporal de la fuerza no es cero. La dependencia de la fuerza con respecto a la coordenada x_0 se muestra en la fig. 11.7 para el caso de un muelle blando ($c/Nk = 0,1$).

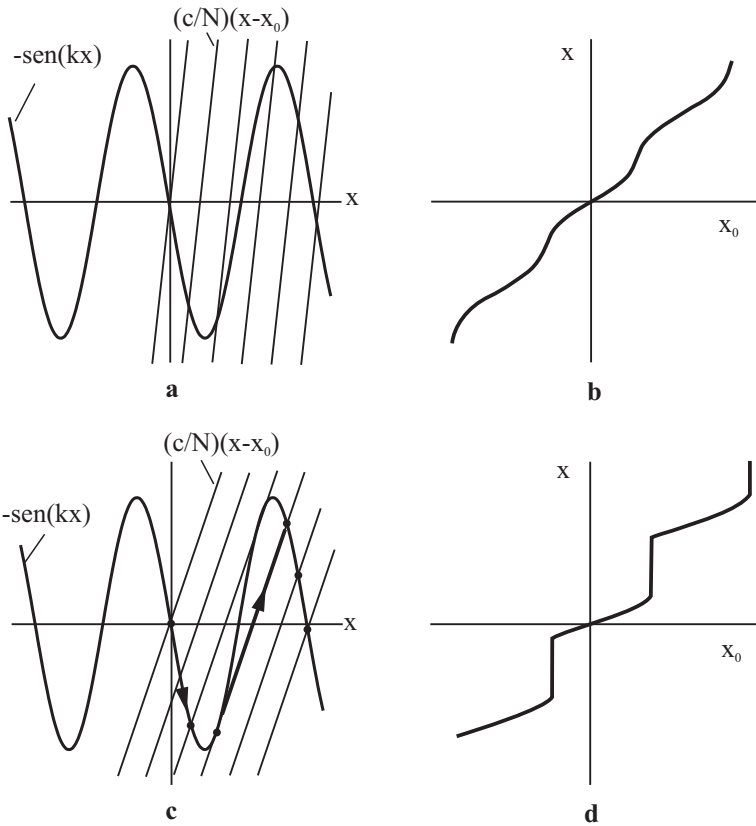


Fig. 11.6 Las funciones $-\text{sen} kx$ y $\frac{c}{N}(x-x_0)$ se muestran en (a) para el caso $c/Nk = 1,5$ y en (c) para el caso $c/Nk = 0,5$. Cuando x_0 aumenta, la recta se desplaza hacia la derecha. La coordenada de equilibrio varía con x_0 de forma continua cuando $c/Nk > 1$.

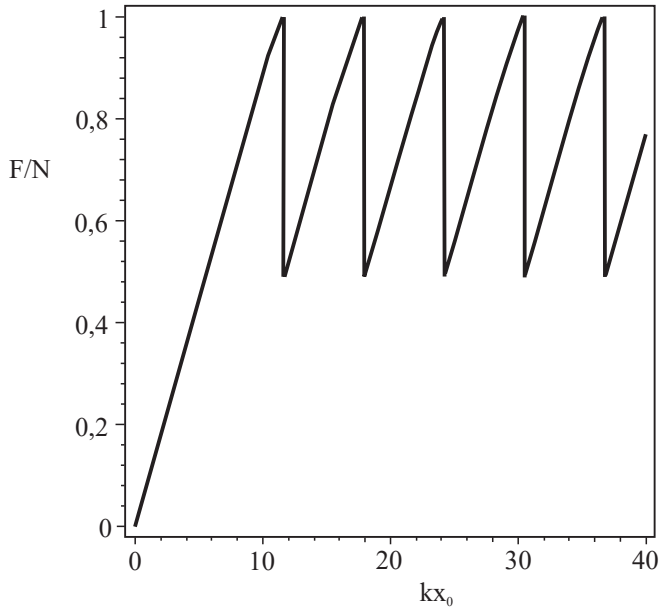


Fig. 11.7 Fuerza aplicada al cuerpo según el modelo caracterizado por la ecuación de movimiento (11.20) en función de la coordenada del dispositivo de deslizamiento, x_0 , para el caso $c/Nk = 0,1$. Debido a las inestabilidades elásticas, el valor medio de la fuerza no es cero.

11.4 SUPERDESLIZAMIENTO

Los estudios experimentales y teóricos de los últimos años apuntan a la conclusión de que, en un contacto «a escala atómica» entre dos cuerpos cristalinos, no puede haber fricción estática si las periodicidades de las respectivas redes cristalinas no coinciden, tal y como muestra la fig. 11.8. Aparte de este requisito, tampoco debe existir inestabilidad elástica en el contacto entre ambos cuerpos. La ausencia de fricción estática se debe a que los átomos de una de las redes cristalinas, por la diferencia de periodicidad, se encuentran en todos los estados de energía posibles con respecto a los átomos de la otra red cristalina. Cuando uno de los cuerpos se desplaza, la distribución de los átomos que ocupan posiciones de baja y alta energía cambia sin que por ello cambie la energía media (macroscópica) del cuerpo. Por este motivo, basta una fuerza infinitesimal para poner el cuerpo en movimiento.

Evidentemente, este razonamiento no depende de la escala y también se puede aplicar al contacto entre dos superficies con estructuras macroscópicas, por ejemplo, entre una suela de goma y una placa de acero onduladas. *Siempre que las periodicidades de las estructuras en ambas superficies sean diferentes y no se produzcan inestabilidades elásticas, dichas estructuras no generarán fricción estática.*

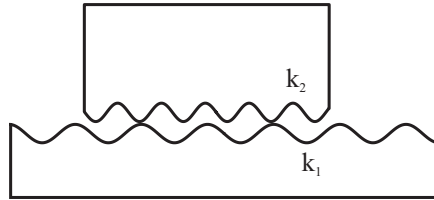


Fig. 11.8 Contacto entre dos superficies con estructura periódica (p. ejemplo, dos cristales) y distinta periodicidad de red.

11.5 NANOMÁQUINAS: CONCEPTOS PARA MICRO Y NANOACTUADORES

Dada la tendencia actual a la miniaturización de instrumentos mecánicos, es necesario preguntarse por el límite teórico de la miniaturización. Un aspecto importante a considerar es si es posible también convertir energía almacenada, bien térmica o química, en energía cinética en forma de un desplazamiento dirigido a la escala más pequeña o escala atómica. En numerosos estudios de investigación sobre nanoactuadores, se han tomado como referencia las llamadas proteínas motoras y su desplazamiento a lo largo de microfibras de estructura periódica. Todas las proteínas motoras poseen una estructura parecida, que consiste en dos «cabezas» y un elemento de unión. La longitud de la unión puede variar debido al consumo de ciertas «moléculas de energía». La proteína pasa de una conformación globular a la de ovillo estadístico, y a consecuencia de ello, la longitud de la unión aumenta. Dicho proceso lleva asociado un gasto de energía, que vuelve a almacenarse cuando la unión recupera su longitud original.

La mayor parte de los métodos discutidos en la literatura parten de este modelo para explicar que la puesta en movimiento dirigido de objetos microscópicos o moleculares es debida a la interacción entre el objeto a desplazar y un sustrato heterogéneo, el cual, en la mayoría de los casos, también es periódico. El objeto accionado puede consistir en uno o varios cuerpos con distancias de separación regulables, y el sustrato puede ser simétrico o asimétrico. En el caso de sustratos no simétricos se emplea el principio de «trinquete y gatillo»⁶. Sin embargo, en un potencial simétrico no es posible el desplazamiento dirigido.

En esta sección se ilustra la idea de los nanoactuadores tomando como ejemplo la «máquina de tres cuerpos». Desde el punto de vista matemático, se trata del desplazamiento de un sistema de varios cuerpos en un potencial periódico en el espacio que, de nuevo, representa una extensión sencilla del modelo Prandtl-Tomlinson.

A continuación se mostrará que, regulando las distancias de unión entre los cuerpos en un potencial periódico, se puede controlar el movimiento del sistema, tanto en dirección como en velocidad.

6. Estas «máquinas» se suelen conocer por el nombre de «trinquetes» o «carracas».

Puntos singulares y bifurcaciones en una máquina de tres cuerpos

Considérense tres masas puntuales en un potencial periódico (fig. 11.9), las cuales están unidas por dos barras sin masa de longitudes l_1 y l_2 . La energía potencial del sistema es igual a

$$U = U_0 (\cos(k(x - l_1)) + \cos(kx) + \cos(k(x + l_2))), \quad (11.29)$$

donde $k = 2\pi / a$ es el número de onda y a es la longitud de onda del potencial. La energía potencial puede reescribirse de la forma

$$U = U_0 \sqrt{(\sen kl_1 - \sen kl_2)^2 + (1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2} \cos(kx - \varphi), \quad (11.30)$$

donde

$$\tan \varphi = \frac{\sen kl_1 - \sen kl_2}{1 + \cos kl_1 + \cos kl_2}. \quad (11.31)$$

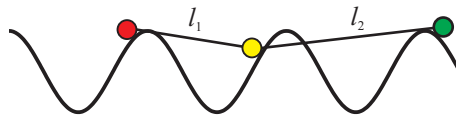


Fig. 11.9 Máquina de tres cuerpos.

La fase φ es una función continua y unívoca de los parámetros l_1 y l_2 para cualquier trayectoria en el plano formado por los parámetros (l_1, l_2) , siempre que dicha trayectoria no pase por los *puntos singulares*, en los que la amplitud del potencial (11.30) es cero y la fase (11.31) no está definida. La posición de estos puntos está determinada por las condiciones

$$\sen kl_1 - \sen kl_2 = 0 \quad (11.32)$$

y

$$1 + \cos kl_1 + \cos kl_2 = 0. \quad (11.33)$$

De ahí se obtiene que

$$kl_1 = \pi \pm \pi / 3 + 2\pi n, \quad kl_2 = \pi \pm \pi / 3 + 2\pi m, \quad (11.34)$$

donde m y n son números enteros. La posición de los puntos singulares en el plano (l_1, l_2) se muestra en la fig. 11.10. Todos estos puntos pueden obtenerse mediante la repetición periódica de dos puntos, $(kl_1, kl_2) = (2\pi / 3, 2\pi / 3)$ y $(kl_1, kl_2) = (4\pi / 3, 4\pi / 3)$.

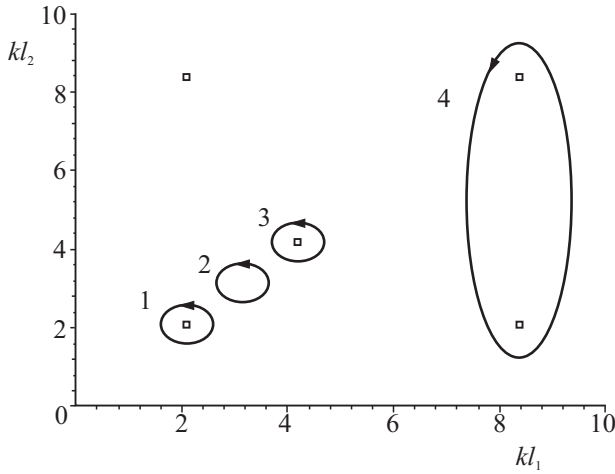


Fig. 11.10 Posición de los puntos singulares en la «máquina de tres cuerpos».

Condiciones de un desplazamiento dirigido

Se asume que las longitudes l_1 y l_2 se pueden regular a voluntad. Si estas cambian de manera que el primer punto singular de la fig. 11.10 se rodea por una trayectoria cerrada, la fase disminuye en 2π . Rodear el segundo punto implica un aumento en la fase de 2π . Al primer punto se le asigna el índice topológico -1 , y al segundo el índice $+1$. En términos generales, la fase en una trayectoria cerrada en el plano (l_1, l_2) cambiará en $2\pi i$, siendo i la suma de los índices de todos los puntos encerrados por la trayectoria. Por ejemplo, la trayectoria 2 de la fig. 11.10 no rodea ningún punto singular, y por tanto la fase no cambia al completar el recorrido. El camino 4 encierra dos puntos con el índice -1 , por lo que la fase cambia en -4π al efectuar un recorrido completo. Un cambio de fase de 2π implica que el sistema de tres cuerpos se desplaza una distancia igual a la longitud de onda del potencial.

Todo cambio periódico en las longitudes de las uniones l_1 y l_2 a lo largo de una trayectoria que encierre puntos singulares tales que la suma de sus respectivos índices topológicos no sea cero, produce un desplazamiento dirigido del sistema. Si el camino en dicho plano (l_1, l_2) se recorre de forma periódica con la frecuencia ω , el sistema se desplazará con una velocidad macroscópica (media) igual a $v = \frac{\omega i}{k}$.

Sería interesante preguntarse si esta «máquina» se desplazaría también al aplicarle una fuerza externa y, por tanto, si aquella podría utilizarse para transportar carga. Para responder a dicha pregunta, se aplica al sistema una fuerza

externa $-F$. Esta añade el término Fx a la energía potencial, de forma que la energía potencial total adquiere la forma

$$U_{total} = U_0 (\cos(k(x-l_1)) + \cos(kx) + \cos(k(x+l_2))) + Fx. \quad (11.35)$$

Se determinan ahora las *bifurcaciones* (también llamadas *catástrofes*) para este potencial. El término bifurcaciones designa el grupo de parámetros para los que el número de los puntos de equilibrio del potencial cambia, y en consecuencia, la posición de equilibrio deja de variar de forma continua con los parámetros l_1 y l_2 . Las bifurcaciones se determinan a través de dos condiciones:

$$\frac{\partial U_{total}}{\partial x} = 0 \quad (11.36)$$

y

$$\frac{\partial^2 U_{total}}{\partial x^2} = 0. \quad (11.37)$$

La primera condición implica tratar con posiciones de equilibrio, y la segunda indica el momento en el que el equilibrio pierde su estabilidad. En nuestro caso, la condición (11.36) adquiere la forma

$$\frac{\partial U_{total}}{\partial x} = U_0 k (-\sin(k(x-l_1)) - \sin(kx) - \sin(k(x+l_2))) + F = 0, \quad (11.38)$$

y la condición (11.37), la siguiente

$$\frac{\partial^2 U_{total}}{\partial x^2} = U_0 k^2 (-\cos(k(x-l_1)) - \cos(kx) - \cos(k(x+l_2))) = 0. \quad (11.39)$$

Aplicando los teoremas de adición trigonométrica, elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$(1 + \cos kl_1 + \cos kl_2)^2 + (\sin kl_1 - \sin kl_2)^2 = (F / U_0 k)^2. \quad (11.40)$$

Esta igualdad permite determinar las bifurcaciones representadas en la fig. 11.11 para 4 valores diferentes del parámetro $f = F / U_0 k$. Se inducirá un movimiento de traslación siempre que las longitudes l_1 y l_2 cambien a lo largo de una trayectoria cerrada que rodee completamente a las bifurcaciones, de tal forma que la fase en cada punto permanezca constante. Claramente, esto es posible solo cuando $f < 1$. La fuerza de acción máxima es por tanto igual a $F_{max} = U_0 k$.

El desplazamiento dirigido del sistema puede llegar a ser especialmente importante en el caso de que las longitudes l_1 y l_2 cambien con el tiempo de una forma especial. Si se elige

$$l_1 = (4/3)\pi / k + l_0 \cos(\omega t), \quad l_2 = (4/3)\pi / k + l_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.41)$$

donde

$$\varphi = (2/3)\pi \tag{11.42}$$

y $l_0 \ll 1/k$, la expresión de la energía potencial (11.29) adquiere la forma

$$\begin{aligned} &U_0kl_0 [\text{sen}(kx + \pi/3)\cos(\omega t + 2\pi/3) - \text{sen}(kx - \pi/3)\cos\omega t] \\ &= U_0kl_0 (\sqrt{3}/2)\cos(kx + \omega t + \pi/3) \end{aligned} \tag{11.43}$$

Este corresponde a un perfil periódico, el cual se propaga a lo largo del eje negativo de x y con velocidad constante ω/k . El sistema, alojado en uno de sus mínimos, se desplaza junto con esta onda.

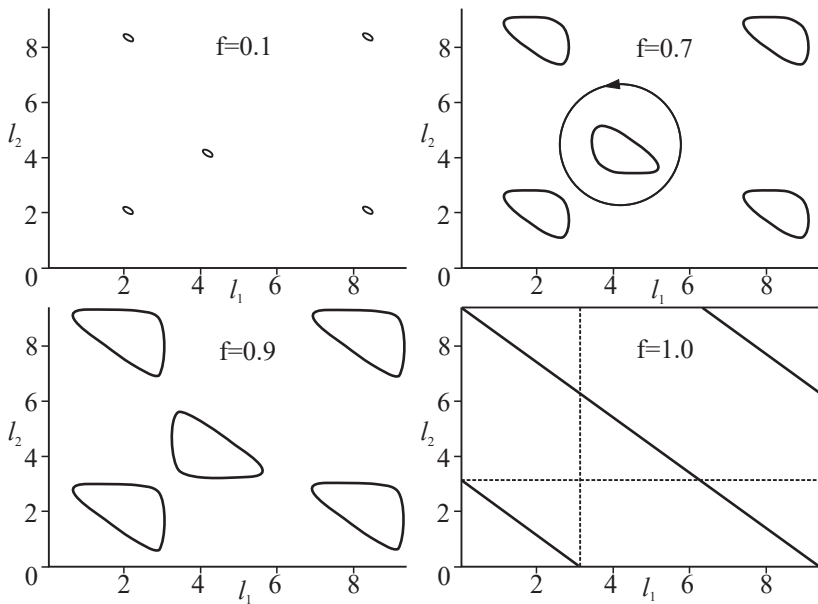


Fig. 11.11 Bifurcaciones del potencial (11.35) para distintos valores de fuerza externa $f = F/U_0k$. Será posible un movimiento dirigido siempre que las bifurcaciones generen figuras cerradas tales que puedan rodearse sin perturbarlas.

Las ideas discutidas en esta sección se utilizan activamente en la Nanotribología, por ejemplo, en la descripción de motores moleculares en células o durante la contracción muscular, así como en el diseño de nanomotores.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Analizar la siguiente variante del modelo Prandtl-Tomlinson: una masa puntual (masa m) se desplaza bajo la acción de una fuerza F en un potencial periódico, definido por una sucesión de segmentos de parábola de la forma:

$$U(x) = \frac{1}{2} cx^2 \quad \text{para} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

donde

$$U(x+a) = U(x).$$

(fig. 11.12). Además, existe amortiguamiento, caracterizado por la constante η , el cual es proporcional a la velocidad. Determinar: (a) la fuerza de fricción estática, (b) la velocidad mínima para la que deja de existir movimiento macroscópico, (c) la fuerza de fricción dinámica como función de la velocidad de desplazamiento media y del amortiguamiento, (d) el «retrato de fases» del sistema a modo del modelo clásico de Prandtl-Tomlinson.

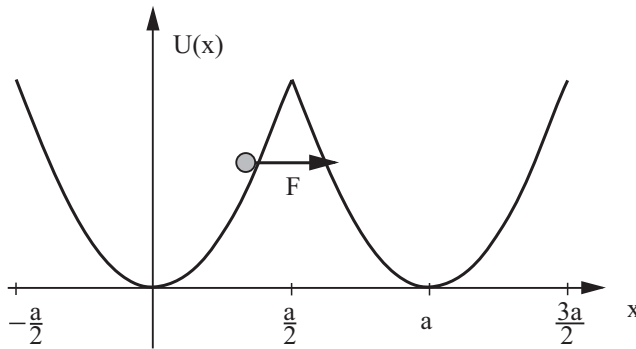


Fig. 11.12 Modelo Prandtl-Tomlinson modificado con potenciales parabólicos.

Resolución: La fuerza de fricción estática es igual a la pendiente máxima del potencial, la cual se alcanza al final de cada período, por ejemplo, para $x = a/2$:

$$F_e = \frac{ca}{2}.$$

La ecuación de movimiento en un período del potencial tiene la siguiente forma

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = F.$$

La fuerza mínima para la que aún es posible el desplazamiento macroscópico, corresponde a la situación en la que el cuerpo, situado en $x = -a/2$, comienza a moverse con velocidad $\dot{x} = 0$ y llega a la posición $x = a/2$, de nuevo con

velocidad $\dot{x} = 0$. Esto corresponde exactamente a la mitad del período de una vibración amortiguada en un potencial parabólico. La frecuencia de una vibración amortiguada es conocida e igual a

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

donde $\omega_0^2 = c/m$ y $\delta = \eta/2m$. Una longitud de onda del potencial se recorrerá, por tanto, en el tiempo

$$T = \frac{\pi}{\omega^*}.$$

La mínima velocidad media de un movimiento perpetuo y estacionario es igual a

$$v_{\min} = \frac{a}{T} = \frac{a\omega^*}{\pi} = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}.$$

La fuerza mínima para la que aún es posible el movimiento macroscópico, puede obtenerse de la forma más sencilla a partir del siguiente razonamiento. La energía potencial total del cuerpo, teniendo en cuenta la contribución de la fuerza externa F , es igual a

$$U = \frac{cx^2}{2} - Fx = \frac{c}{2} \left[\left(x - \frac{F}{c}\right)^2 - \left(\frac{F}{c}\right)^2 \right].$$

El cambio en la energía potencial desde el punto $x = -a/2$ hasta el mínimo de dicha energía potencial, es igual a $\Delta U_0 = \frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{F}{c}\right)^2$, y el cambio en energía potencial desde el mínimo hasta el punto $x = a/2$, es igual a $\Delta U_1 = -\frac{c}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{F}{c}\right)^2$.

Bajo la acción de la fuerza mínima, el cuerpo recorre desde $-a/2$ hasta $a/2$, una distancia igual a la mitad de la longitud de onda de la vibración amortiguada. De la teoría de vibraciones se sabe que la energía de una vibración amortiguada decrece exponencialmente según la expresión $e^{-2\delta t}$. Por tanto, el comportamiento de la energía mencionada anteriormente viene caracterizado por $e^{-2\delta T}$:

$$\left(\frac{a - 2F/c}{a + 2F/c}\right)^2 = e^{-2\delta T}.$$

De lo que se deduce que

$$F = \frac{ac}{2} \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}} = F_e \frac{1 - e^{-\delta T}}{1 + e^{-\delta T}}$$

donde

$$\delta T = \frac{\pi\eta}{\sqrt{4mc - \eta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4mc}{\eta^2} - 1}} .$$

La dependencia de la fuerza normalizada F / F_e con respecto al parámetro adimensional $\eta / \sqrt{4mc}$ se representa en la fig. 11.13.

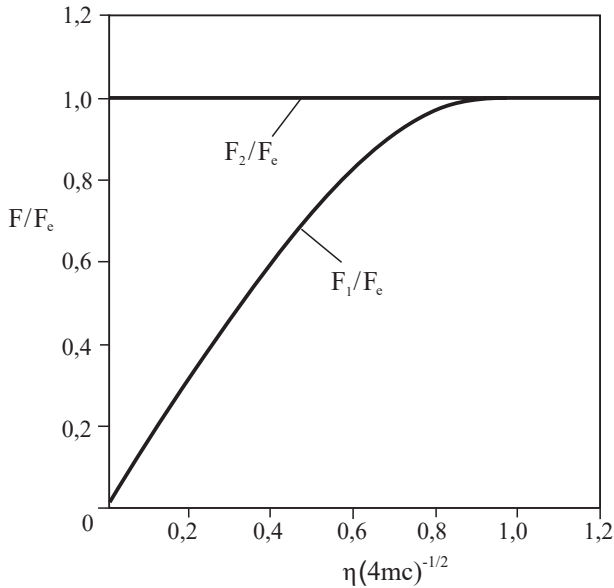


Fig. 11.13 Diagrama de fases del modelo modificado de Prandtl-Tomlinson con un potencial de segmentos parabólicos para dos fuerzas críticas F_1 y F_2 .

Problema 2: Una masa puntual está acoplada a un carro de desplazamiento rígido caracterizado por una rigidez vertical c_{\perp} y una tangencial c_{\parallel} ⁷. Esta se integra en un perfil sinusoidal ($y = h_0 \cos kx$), como muestra la fig. 11.14. A continuación, el carro se desplaza hacia la derecha. Determinar la condición bajo la cual aparecen inestabilidades elásticas en este sistema.

7. Este modelo puede, por ejemplo, describir un elemento de perfil elástico en una suela de goma.

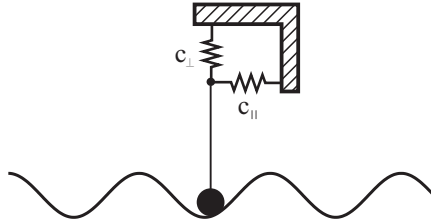


Fig. 11.14 Un cuerpo deslizando acoplado vertical y horizontalmente sobre una superficie ondulada.

Resolución: La energía potencial del sistema es igual a

$$U(x, y, x_0, y_0) = \frac{c_{\perp}}{2}(y - y_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2}(x - x_0)^2.$$

Para el sistema descrito en el enunciado, se tiene que $y = h_0 \cos kx$ y $y_0 = -h_0$. La energía potencial adquiere, por tanto, la siguiente forma

$$U(x, x_0) = \frac{c_{\perp}}{2}(h_0 \cos kx + h_0)^2 + \frac{c_{\parallel}}{2}(x - x_0)^2.$$

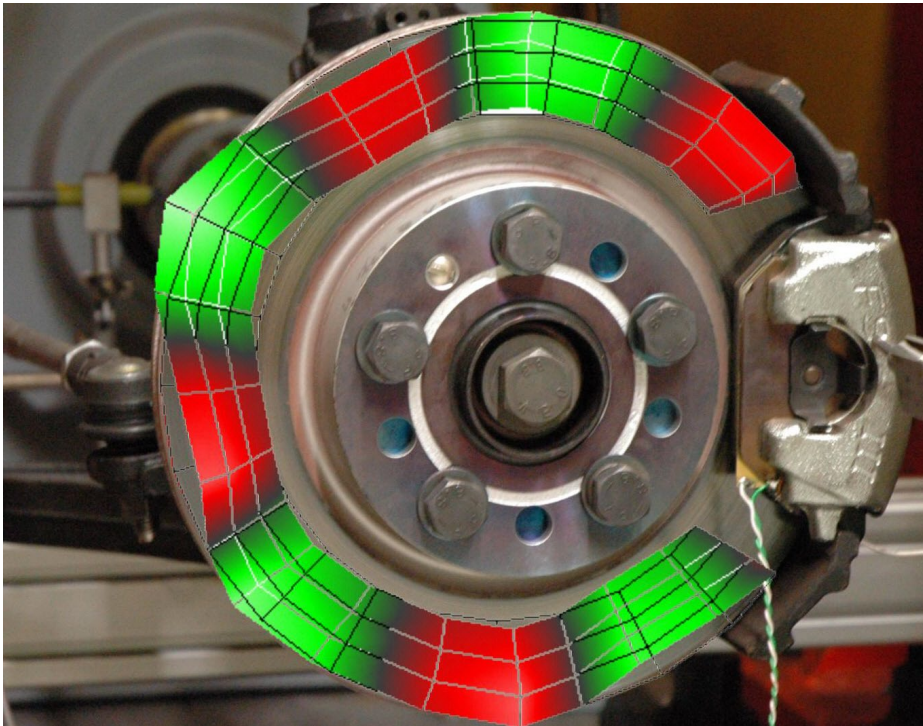
La condición bajo la cual ocurren inestabilidades elásticas es la siguiente

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -c_{\perp} h_0^2 k^2 [\cos kx + \cos 2kx] + c_{\parallel} = 0.$$

Esta ecuación tiene solución y, en consecuencia, el sistema exhibe inestabilidades elásticas cuando

$$c_{\parallel} < 2c_{\perp} h_0^2 k^2.$$

12. VIBRACIONES INDUCIDAS POR ROZAMIENTO



Desde el punto de vista de la Dinámica de Sistemas, los dispositivos técnicos con rozamiento son sistemas abiertos, no lineales y disipativos. Aún en el caso de que un sistema de este tipo fuese capaz de efectuar un movimiento estacionario, esto solo sería posible si el movimiento fuese estable bajo la acción de pequeñas perturbaciones. De lo contrario, el sistema comenzaría a balancearse, generando una vibración periódica o caótica. Si la amplitud de la vibración fuese tan alta que la velocidad de desplazamiento relativa de las superficies en rozamiento fuese cero, entonces el movimiento consistirá en fases alternas de paro (*stick*) y deslizamiento (*slip*). Dicho movimiento se conoce con el nombre de *stick-slip*.

Sin embargo, la inestabilidad en un movimiento estacionario y uniforme no es el único mecanismo por el que se producen vibraciones inducidas por rozamiento. Bajo determinadas condiciones, un sistema tribológico no experimenta ningún tipo de movimiento estacionario. En este caso solo es posible un tipo de movimiento oscilatorio, del cual es ejemplo el conocido como *sprag-slip*.

En muchos sistemas con rozamiento (como en los frenos, rodamientos, el contacto rueda-raíl, etc.), las vibraciones inducidas por rozamiento pueden

conllevar, por un lado, un mayor desgaste y la formación de estructuras no deseadas en las superficies sometidas a rozamiento (como por ejemplo, estrías en los raíles, grietas, poligonización de las ruedas ferroviarias, o patrones tipo tabla de lavar); por otro lado, pueden causar vibraciones o ruidos desagradables de distinta naturaleza (como traqueteos, repiqueteos, pitidos, chirridos). Para evitar el chirrido durante el frenado o durante la toma de curvas, no existen soluciones que puedan ponerse en práctica de manera efectiva y rentable hasta la fecha. Incluso en aquellas aplicaciones donde el ruido por rozamiento no perjudica el proceso, no es siempre posible implementar mejoras técnicas debido al ruido y a las molestias que estas pueden ocasionar. De ahí que en muchos campos de aplicación de la tecnología de rodamientos no puedan emplearse rodamientos de acero al manganeso, aún a pesar de su excelente resistencia al desgaste.

En este capítulo se considerarán algunos de los modelos de vibraciones inducidas por rozamiento, los cuales permiten comprender mejor las condiciones bajo las cuales se produce un movimiento estable o inestable, así como proponer medidas prácticas para evitar dichas vibraciones.

12.1 INESTABILIDAD DEL ROZAMIENTO CUANDO LA FUERZA DE FRICCIÓN DECRECE CON LA VELOCIDAD

En primer lugar, se considera el modelo más sencillo de un par de objetos sometidos a fricción, en el que uno de los objetos es como un plano rígido y el otro un bloque de masa m . La elasticidad total del sistema se representa por un único muelle de rigidez c . El bloque se traslada sobre la superficie rígida a la velocidad v_0 , mediante una combinación en paralelo de muelle y pistón. Se asume que la fuerza de rozamiento en la superficie de contacto se puede expresar como una función de la velocidad, $F(\dot{x})$, para cualquier valor de la misma. La ecuación de movimiento para el bloque es la siguiente:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0t + \eta v_0, \quad (12.1)$$

donde $F(\dot{x})$ es la fuerza de fricción dinámica, que depende de la velocidad.

La ecuación (12.1) tiene una solución estacionaria

$$x = x_0 + v_0t \quad (12.2)$$

con

$$x_0 = -\frac{F(v_0)}{c}. \quad (12.3)$$

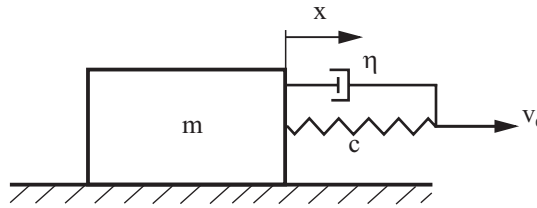


Fig. 12.1 Un bloque trasladándose mediante una combinación de muelle y pistón.

Que la solución estacionaria pueda darse en un proceso real depende de la estabilidad de la misma a las perturbaciones, que siempre están presentes. Para analizar dicha estabilidad, se va a suponer que la solución estacionaria (12.2) se perturba ligeramente:

$$x = x_0 + v_0 t + \delta x \tag{12.4}$$

donde $\delta \dot{x} \ll v_0$. Sustituyendo la igualdad (12.4) en la ecuación de movimiento (12.1) y linealizando con respecto a δx , se obtiene la siguiente expresión para la perturbación:

$$m\delta \ddot{x} + \left(\eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} \right) \delta \dot{x} + c\delta x = 0. \tag{12.5}$$

Esta ecuación describe la vibración de un cuerpo de masa m acoplado a un muelle de rigidez c y en presencia de amortiguamiento, que es proporcional a la velocidad y está caracterizado por la constante

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0}. \tag{12.6}$$

Aún en ausencia de un análisis de estabilidad formal, es evidente que la igualdad (12.5), en el caso de un amortiguamiento positivo

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} > 0, \quad (\text{movimiento estable}) \tag{12.7}$$

describe un modo de vibración amortiguada y el movimiento estacionario es estable. En el caso contrario

$$\alpha = \eta + \left. \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} < 0, \quad (\text{movimiento inestable}) \tag{12.8}$$

se estaría frente a un *amortiguamiento negativo* y por tanto frente a una oscilación *amplificada*; en este caso, la solución estacionaria es inestable.

La frecuencia de la oscilación débilmente amortiguada es igual a

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - (\alpha/2)^2}, \quad (12.9)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ es la frecuencia de vibración característica del cuerpo sin amortiguamiento o frecuencia fundamental del modo normal de vibración. Para un amortiguamiento débil, se tiene que $\omega^* \approx \omega_0$.

De lo enunciado anteriormente, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

I. En un sistema sin amortiguamiento ($\eta = 0$), la condición de estabilidad depende de cómo la fuerza de rozamiento varía con la velocidad:

- Si la fricción aumenta con la velocidad de deslizamiento, el movimiento es estable.
- Si la fricción disminuye con la velocidad de deslizamiento, entonces se produce una inestabilidad.

Si la fuerza de rozamiento, tal y como muestra la fig. 12.2, disminuye con la velocidad a valores de velocidad pequeños y aumenta a valores mayores¹, entonces el movimiento será inestable a velocidades pequeñas $v < v_{\min}$, y estable a velocidades mayores.

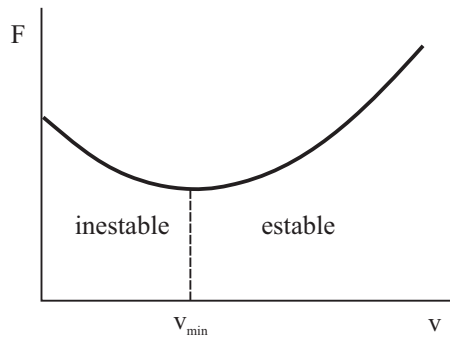


Fig. 12.2 En muchos sistemas tribológicos, la fuerza de rozamiento disminuye a velocidades pequeñas para aumentar posteriormente a velocidades mayores.

II. La frecuencia característica de las vibraciones causadas por dicho mecanismo viene determinada prácticamente por la frecuencia del modo normal del «resonador» (es decir, del tribosistema al completo). Esto se ha mostrado experimentalmente en muchos sistemas tribológicos durante el procesado de los metales. Es por ello que en muchos casos y durante el rozamiento, prácticamente todos los parámetros del tribosistema, entre los cuales se incluyen la composición, la velocidad de desplazamiento relativo de los cuerpos y la rugosidad de la superficie, pueden alterar la intensidad de la emisión acústica, pero no su espectro de frecuencias.

1. Por ejemplo, dicho comportamiento es típico de sistemas lubricados en la transición del rozamiento mixto al hidrodinámico (curva de Stribeck).

III. La inestabilidad observada puede corregirse si el sistema se somete a un amortiguamiento suficientemente fuerte. La condición de estabilidad (12.7) se cumple también en este caso si la derivada $dF / d\dot{x}$ es negativa.

12.2 INESTABILIDAD EN UN SISTEMA DE ELASTICIDAD DISTRIBUIDA

La modelización de un cuerpo deslizante mediante una masa rígida arrastrada por un muelle que se presentó en la sección anterior, es una cruda simplificación de la realidad. Ahora es pertinente preguntarse por el efecto de la distribución de la elasticidad de los cuerpos que componen el tribosistema. En particular, sería interesante demostrar si la presencia de amortiguamiento en el sistema puede evitar que la inestabilidad se desarrolle, también en el caso de que dicho amortiguamiento se introduzca «bastante lejos» de las superficies sometidas a rozamiento.

Como primera generalización al modelo sencillo, se analizará un sistema compuesto por un cuerpo rígido y otro elástico² (fig. 12.3). El cuerpo rígido se desplaza en la dirección horizontal a velocidad constante. La capa elástica inferior actúa de sustrato fijo. Por simplicidad, solo se considerarán las vibraciones por tracción en la capa elástica, es decir, se asume que el campo de desplazamientos solo tiene una componente x , y que esta solo depende de la coordenada z . La ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (12.10)$$

con las condiciones de frontera

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = (v_0 - \dot{u}) \Big|_{z=0} \quad (12.11)$$

y

$$u(z = -l) = 0. \quad (12.12)$$

$\sigma_R(v)$ es la tensión o esfuerzo de fricción que depende de la velocidad –la fuerza de rozamiento generada en la superficie. Cuando la fuerza de rozamiento depende débilmente de la velocidad, se pueden expresar dichas condiciones como un desarrollo en serie con respecto a \dot{u} hasta el término de primer orden:

$$\sigma_R(v_0 - \dot{u}) \Big|_{z=0} = \sigma_R(v_0) - \frac{d\sigma_R}{dv} \Big|_{v=v_0} \cdot \dot{u}(z=0) \quad (12.13)$$

2. La generalización al contacto de dos cuerpos elásticos se podría realizar sin problemas, pero esto introduciría una complicación innecesaria en el análisis.

La condición de frontera (12.11) adquiere la forma siguiente

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma_R(v_0) - \frac{d\sigma_R}{dv} \Big|_{v=v_0} \cdot \dot{u}(z=0). \quad (12.14)$$

La solución de la ecuación de onda (12.10) con las condiciones de frontera (12.12) y (12.14) puede expresarse como la suma

$$u(z,t) = u^{(0)}(z,t) + u^{(1)}(z,t), \quad (12.15)$$

donde

$$u^{(0)}(z,t) = \frac{\sigma_R(v_0)}{G} (z+l) \quad (12.16)$$

es la solución estática de la ecuación de movimiento que cumple las condiciones de frontera $u^{(0)}(-l) = 0$ y $G \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sigma_R(v_0)$, y $u^{(1)}(z,t)$ es la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2} \quad (12.17)$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{d\sigma_R}{dv} \Big|_{v=v_0} \cdot \dot{u}^{(1)}(0) \text{ y } u^{(1)}(-l) = 0. \quad (12.18)$$

La suma $u^{(0)}(z,t) + u^{(1)}(z,t)$ cumple tanto la ecuación de onda como las condiciones de frontera (12.12) y (12.14), y es por tanto la solución del problema.

Si el esfuerzo de fricción no dependiese de la velocidad ($d\sigma_R/dv = 0$), $u^{(1)}$ sería la solución de la ecuación de onda para el caso de la oscilación libre de una lámina sujeta por un extremo y sometida a las condiciones libres de frontera por el otro. Cuando la dependencia con la velocidad es pequeña y $d\sigma_R/dv > 0$, se trataría de oscilaciones libres en la lámina, las cuales estarían amortiguadas débilmente en la superficie, y dicho amortiguamiento sería directamente proporcional a la velocidad. Aún en ausencia de una solución formal de la ecuación movimiento, es intuitivamente evidente que, en este caso, se estaría frente a vibraciones amortiguadas en la lámina. Si por el contrario, la fuerza disminuyese con la velocidad, se introduciría en la superficie un pequeño *amortiguamiento negativo*. En este caso, se trataría de oscilaciones amplificadas. De este razonamiento se desprende que las condiciones de estabilidad en un sistema distribuido son las mismas que las que se dan en un sistema sencillo compuesto de una masa y un muelle.

También se puede concluir que la inestabilidad producida por la presencia de un amortiguamiento puede ser tratada en *cualquier* posición dentro del sistema. Tan solo hay que tener en cuenta que, para un determinado modo de vibración, el aumento de energía asociado a todos los amortiguamientos negativos (es decir, todos los que resultan del hecho de que la fricción disminuya con la velocidad), se compensa con la energía disipada a través de los amortiguamientos positivos.

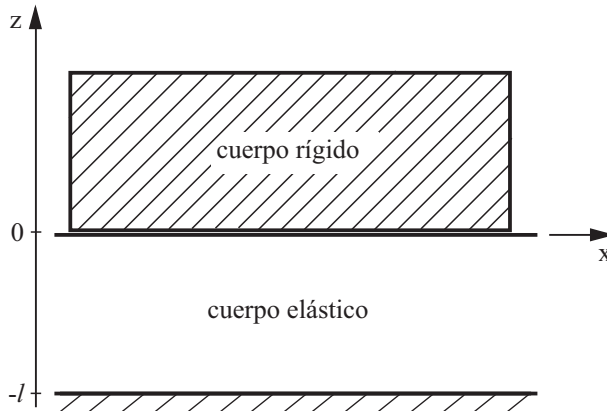


Fig. 12.3 Representación de un tribosistema compuesto por un cuerpo elástico y otro rígido. El cuerpo elástico actúa como sustrato fijo. El cuerpo rígido se desplaza en la dirección horizontal a velocidad constante v_0 .

En el caso de que la fricción dependa débilmente de la velocidad, se trataría, en primera aproximación, del modo normal de vibración del sistema, cuya amplitud cambia muy lentamente con el tiempo (es decir, aumenta o disminuye dependiendo de qué tipo de amortiguamiento –positivo o negativo– domine en el sistema). Desde el punto de vista d'Alembertiano, los modos normales de vibración pueden interpretarse como la propagación de una onda elástica que se refleja varias veces en la frontera del medio y que, con cada reflexión, pierde (amortiguamiento positivo) o gana (amortiguamiento negativo) una determinada cantidad de energía. Por tanto, la amortiguación determina la magnitud de la pérdida de energía asociada a la reflexión de la onda en la frontera del medio.

12.3 AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO Y SUPRESIÓN ÓPTIMA DEL RUIDO POR ROZAMIENTO

Partiendo del enfoque d'Alembertiano de las vibraciones características, se tendría «amortiguamiento ideal» en el caso de que la onda, al incidir en la frontera, *se absorbiese completamente*. A continuación se analizan las condiciones para las cuales esto es posible.

Se va a considerar una capa elástica que por su cara inferior está acoplada a un sustrato rígido a través de una película amortiguadora (fig. 12.4). El esfuerzo en esta película debe ser proporcional a la velocidad de desplazamiento del cuerpo elástico con respecto al sustrato rígido. De ahí se obtiene la condición de frontera para la capa elástica en la cara inferior:

$$G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \beta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=-l}, \quad (12.19)$$

donde β es la constante de amortiguamiento.

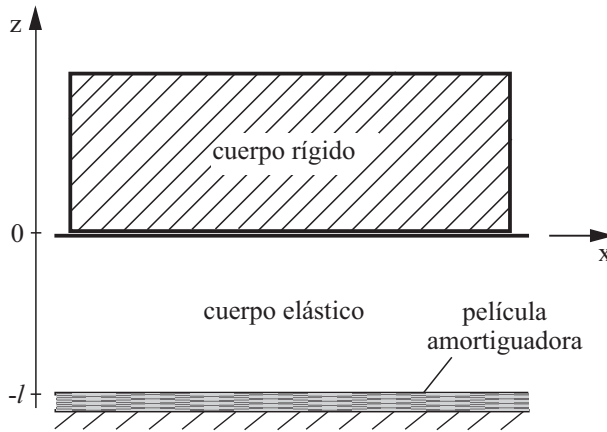


Fig. 12.4 Representación de una capa elástica acoplada a un sustrato rígido mediante una delgada película amortiguadora.

El requisito de que la onda se absorba completamente en la cara inferior implica que la ecuación de movimiento (12.10), con la condición de frontera (12.19), tiene por solución una onda que se propaga en la dirección del eje negativo de z :

$$u(z,t) = f(z+ct), \quad (12.20)$$

de modo que $c = \sqrt{G/\rho}$ es la velocidad transversal de la onda elástica. Sustituyendo esta solución especial en la condición de frontera (12.19), se obtiene

$$\beta = \sqrt{G\rho}. \quad (12.21)$$

Con este tipo de amortiguamiento, no hay reverberación de la onda incidente y la amortiguación es, por tanto, perfecta. No obstante, conviene darse cuenta de que existe reflexión³ tanto para coeficientes de amortiguamiento grandes como

3. Véase el problema 2 de este capítulo.

pequeños, e incluso en los casos límite $\beta \rightarrow 0$ y $\beta \rightarrow \infty$, se trataría de sistemas libres de disipación.

El efecto de la absorción completa tiene muchas aplicaciones, tanto en Física como en Ingeniería, entre las cuales figuran, como las más importantes:

1. La supresión del ruido por rozamiento.
2. El apantallamiento de la emisión acústica: Las paredes de una habitación «insonorizada» o «a prueba de sonidos» han de ejercer exactamente el amortiguamiento crítico.
3. En simulaciones de dinámica molecular, o en otro tipo de simulaciones numéricas, ha de introducirse el amortiguamiento crítico en el borde del dominio de simulación, para eliminar la reflexión de la onda que no es debida a ningún proceso físico real, sino a un artefacto asociado al tamaño finito del dominio de simulación.
4. En la tecnología de altas frecuencias se utiliza la misma idea para suprimir la reflexión interna en guías de onda.

A continuación se van a estimar los parámetros de la película amortiguadora necesarios para suprimir el ruido por rozamiento (chirrido) en un cojinete de acero. En el caso del acero ($G \approx 78 \text{ GPa}$, $\rho \approx 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), el amortiguamiento completo se alcanza, según la expresión (12.21), para un valor de $\beta \approx 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}$. Un coeficiente de amortiguamiento de tal magnitud se consigue, por ejemplo, con una capa de polímero de 1 cm de espesor, caracterizado por una viscosidad semejante a la de una miel espesa. Investigaciones experimentales han mostrado que la incorporación de capas de polímero con las dimensiones adecuadas, conducen en efecto a la eliminación total del ruido por rozamiento (fig. 12.5).



Fig. 12.5 Parte de un cojinete de deslizamiento hecho en acero al manganeso, al que se ha incorporado un recubrimiento de polímero para suprimir el ruido por rozamiento.

12.4 SUPRESIÓN ACTIVA DEL RUIDO POR ROZAMIENTO

Además de la supresión pasiva del ruido por rozamiento mediante la introducción de un amortiguamiento en el sistema tribológico, es posible eliminar las inestabilidades de forma activa mediante el diseño de sistemas apropiados de control con realimentación. Para aclarar el principio de la supresión activa de inestabilidades, se analiza el sencillo modelo de la fig. 12.6.

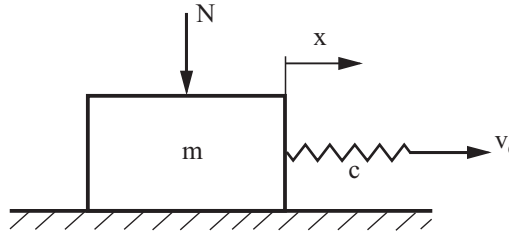


Fig. 12.6 Modelo sencillo para la comprensión del principio básico de la supresión activa de inestabilidades.

Se supone que la fuerza normal es una función periódica del tiempo de frecuencia igual a la frecuencia característica del sistema ω_0 :

$$N = N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (12.22)$$

donde $N_1 \ll N_0$. En el caso de amortiguamiento débil y en una primera aproximación, el cuerpo efectúa oscilaciones libres no amortiguadas con velocidad

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega_0 t. \quad (12.23)$$

Para analizar cualitativamente la estabilidad, se calcula el cambio de energía del movimiento oscilatorio del cuerpo a lo largo de un período. Para ello se asume que la fuerza de rozamiento se puede expresar como producto de la fuerza normal por un coeficiente de fricción dependiente de la velocidad:

$$F_R = N\mu(v) \quad (12.24)$$

El cambio de la energía de oscilación está determinado por la potencia media de la fuerza de rozamiento en el sistema de referencia, el cual se desplaza con la velocidad media v_0 :

$$W = \overline{-F_f \cdot (v - v_0)} = -N \overline{\left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv} v \right) \cdot (v - v_0)}. \quad (12.25)$$

Sustituyendo las expresiones (12.22) y (12.23) en la ecuación (12.25) resulta en

$$\begin{aligned}
 W &= -\left(N_0 + N_1 \cos(\omega_0 t + \varphi)\right) \left(\mu_0 v_1 \cos \omega_0 t + \frac{d\mu}{dv} (v_0 + v_1 \cos \omega_0 t) v_1 \cos \omega_0 t \right) \\
 &= -\frac{1}{2} v_1 \left(N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \left(\mu_0 + \frac{d\mu}{dv} v_0 \right) \cos \varphi \right)
 \end{aligned} \tag{12.26}$$

o, en el caso de amortiguamiento débil,

$$W \approx -\frac{1}{2} v_1 \left(N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi \right). \tag{12.27}$$

Si no existiesen oscilaciones en la fuerza normal, la potencia media sería igual a $-\frac{1}{2} N_0 v_1^2 \frac{d\mu}{dv}$. En este caso se llegaría al resultado ya conocido de que, para una fuerza de fricción que decrece con la velocidad ($d\mu/dv < 0$), la energía aumenta y el proceso es inestable. Modificando la fuerza normal con el tiempo, se puede conseguir que la potencia adquiera un valor negativo y de este modo, amortiguar las vibraciones. Para ello, se ha de cumplir la siguiente condición:

$$N_0 v_1 \frac{d\mu}{dv} + N_1 \mu_0 \cos \varphi > 0. \tag{12.28}$$

Esto es cierto cuando $\cos \varphi > 0$ – en el mejor de los casos, $\cos \varphi = 1$ –, con lo que $\varphi = 0$. En otras palabras, la fuerza normal dada por (12.22) debe, a ser posible, oscilar en fase con la velocidad dada por (12.23). Esto puede llevarse a cabo mediante un sistema de control con realimentación, el cual permita medir la velocidad y generar un cambio en la fuerza normal proporcional a dicha velocidad, $\Delta N = \xi (\dot{x} - v_0)$. En este caso, la ecuación de movimiento se expresaría como:

$$m\ddot{x} + (N_0 + \xi (\dot{x} - v_0)) \mu(\dot{x}) + \eta \dot{x} + cx = cv_0 t + \eta v_0. \tag{12.29}$$

La ecuación linealizada de la que se obtiene la solución estacionaria (12.2) es

$$m\delta\ddot{x} + \left(N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta \right) \delta\dot{x} + c\delta x = 0. \tag{12.30}$$

Para que el deslizamiento estacionario sea estable, el amortiguamiento global en la expresión (12.30) ha de ser positivo:

$$N_0 \frac{d\mu}{dv} + \mu_0 \xi + \eta > 0 \tag{12.31}$$

Si la fuerza de rozamiento decrece con la velocidad, la condición (12.31) de amortiguamiento global se puede conseguir mediante un amortiguamiento η suficientemente alto, o mediante un acoplamiento $\mu_0 \xi$ entre la velocidad y la

fuerza normal suficientemente fuerte. Como se puede desprender de la ecuación (12.31), el sistema de control con retroalimentación tiene el mismo efecto que un amortiguamiento. La ventaja de la supresión activa reside en que el sistema de control es más fácil de operar si se compara con el amortiguamiento pasivo, cuyos parámetros solo se pueden establecer durante el proceso de elección del material y su dimensionado.

12.5 ASPECTOS SOBRE LA TENACIDAD EN EL RUIDO POR ROZAMIENTO

Interesa estimar los esfuerzos que se producen en un sistema con ruido por rozamiento, para establecer las condiciones bajo las cuales dichos esfuerzos pueden alterar la tenacidad del sistema. Para ello, se analiza el sistema representado en la fig. 12.3. En el caso de amortiguamiento débil y en una primera aproximación, se puede resolver la ecuación de la perturbación (12.17) con las condiciones de frontera

$$G \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ y } u^{(1)}(-l) = 0. \quad (12.32)$$

La solución para el modo normal de vibración de la menor frecuencia (modo fundamental) es

$$u(z, t) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2l} (z + l) \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi c}{2l} t, \quad (12.33)$$

donde $c = \sqrt{G/\rho}$ es la velocidad transversal de la onda. La amplitud de oscilación de la velocidad \dot{u} es por tanto igual a $\bar{v} = A \frac{\pi c}{2l}$, y la de los esfuerzos, $G \frac{\partial u}{\partial z}$, igual a $\bar{\sigma} = AG \frac{\pi}{2l}$. Entre la amplitud del esfuerzo y la amplitud de la velocidad se establece la siguiente relación:

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}}{c} = \bar{v} \sqrt{G\rho}. \quad (12.34)$$

En general, la amplitud de oscilación de la velocidad en un ciclo estacionario tendrá el mismo orden de magnitud que la velocidad de deslizamiento v_0 . Por tanto, la magnitud de los esfuerzos en un sistema afectado por ruido de rozamiento puede estimarse mediante la expresión

$$\bar{\sigma} = G \frac{\bar{v}_0}{c} = \bar{v}_0 \sqrt{G\rho}. \quad (12.35)$$

Este es un resultado muy general, válido también para modos normales de vibración de mayor frecuencia, y muestra que los esfuerzos en un ciclo estacionario *solo dependen de la velocidad de desplazamiento*. La velocidad crítica a la que los esfuerzos alcanzan el límite de tenacidad del material, $\sigma_{\text{tenacidad}}$, está dada por

$$v_c = \frac{\sigma_{\text{tenacidad}}}{\sqrt{\rho G}}. \quad (12.36)$$

Para un acero de $\sigma_{\text{tenacidad}} = 300$ MPa (que corresponde a un valor de resistencia o tenacidad a tracción de 500 MPa) se obtiene la velocidad crítica $v_0 \approx 12$ m/s. Para velocidades de deslizamiento mayores, *el ruido por rozamiento puede producir daños en componentes hechos con este acero*.

12.6 DEPENDENCIA DE LAS CONDICIONES DE ESTABILIDAD CON LA RIGIDEZ DEL SISTEMA

El mecanismo de formación de inestabilidades que se ha analizado en secciones anteriores, se determina tan solo por la disminución de la fricción con la velocidad. Por tanto, la condición de estabilidad no depende de la rigidez del sistema. En el ejemplo mostrado en la fig. 12.2, el movimiento es siempre inestable cuando la velocidad de deslizamiento media es inferior a v_{min} . La rigidez del sistema influye en la frecuencia de las vibraciones producidas por rozamiento, pero no en la condición de inestabilidad. No obstante, en la práctica se pueden estabilizar muchos sistemas alterando su rigidez. Esta observación, la cual se ha demostrado en múltiples investigaciones experimentales, implica que no siempre es válido justificar la presencia de inestabilidades por el hecho de que la fuerza de rozamiento decrezca con la velocidad.

La razón de esta discrepancia reside, desde el punto de vista matemático, en que no es correcto suponer que la fuerza de rozamiento se determina únicamente por el estado del contacto en un momento determinado o, en esencia, solamente por la fuerza normal y la velocidad de deslizamiento. Si así fuese, la fuerza de fricción estática sería siempre constante, y sin embargo, desde los tiempos de Coulomb se sabe que esto no es exactamente así. Aún cuando la fuerza normal no cambiase y la velocidad de deslizamiento se mantuviese constante (e igual a cero), la fuerza de fricción estática cambiaría con el tiempo, lo cual puede tener diversas causas físicas. En el caso de metales, los procesos de reptación o *creep* producen cambios en el área de contacto real con el tiempo y, de esta manera, cambios en la fuerza de rozamiento. En elastómeros, la viscosidad es la responsable del retardo en la respuesta mecánica. En sistemas lubricados, el espesor de la capa de lubricante cambia con el tiempo sin que por ello varíe la fuerza normal. En este caso cambia además la temperatura del componente en contacto y la del aceite lubricante, lo cual influye en la fuerza de rozamiento. Incluso en la interfase con el lubricante, la fricción estática tiene su propia

dinámica, definida por el «anudamiento» de las terminaciones hidrófobas de las moléculas de lubricante. En cualquier caso, la contribución al rozamiento por formación de puentes de líquido depende del tiempo.

Todos estos procesos pueden describirse mediante la incorporación de variables adicionales, adecuadas para cada caso. Dichas variables se denominan «variables de estado internas» y caracterizan de manera suficiente el estado de la capa sometida a fricción así como la del material intermedio. La idea de las variables internas se aplicó por primera vez en la dinámica de terremotos por A. Ruina⁴. En algunos casos, dichas variables tienen significado físico (como por ejemplo, la temperatura), y en otros, las variables son fenomenológicas.

Se va a analizar el modelo fenomenológico más sencillo que describe la dinámica característica de un «estado de contacto»⁵. Considérese de nuevo el modelo mostrado en la fig. 12.1, el cual viene descrito por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}, \theta) + \eta\dot{x} + cx = cv_0t + \eta v_0, \quad (12.37)$$

donde la fuerza de rozamiento $F(\dot{x}, \theta)$ no solo depende de la velocidad, sino que también lo hace de variables de estado internas θ . Esta dependencia se puede expresar como

$$F(\dot{x}, \theta) = F_d + (F_e - F_d)\theta. \quad (12.38)$$

θ es una variable interna que describe el estado de la zona de contacto y que cambia del valor $\theta = 0$, en el momento en que se produce el contacto, hasta el valor $\theta = 1$ tras un prolongado período de reposo. F_e es la fricción estática y F_d la fricción dinámica. La variable de estado θ debe cumplir la siguiente ecuación cinética

$$\dot{\theta} = \left(\frac{1}{\tau}(1 - \theta) - \frac{1}{D}\dot{x} \right), \quad 0 < \theta < 1. \quad (12.39)$$

Si la velocidad es cero, $\dot{x} = 0$, θ aumenta con el tiempo hasta el valor de saturación $\theta = 1$. Si el cuerpo se encuentra en movimiento, la variable de estado θ disminuye tanto más rápidamente cuando mayor sea la velocidad. τ es, en la expresión, el tiempo de relajación característico del parámetro al alcanzar el reposo, mientras que D es la «longitud de relajación», característica de dicho parámetro en la puesta en movimiento. Desde el punto de vista físico de un

4. A. Ruina, «Slip Instability and State Variable Friction Laws». *Journal of Geophysical Research* **88**(12), 10359-10370 (1983).

5. En el capítulo 20 se discutirá una ley más compleja y realista de la dependencia de la fricción con la velocidad y el estado del sistema.

contacto entre dos superficies rugosas, τ se puede entender como el tiempo característico de procesos de reptación o *creep*, y D como el tramo de longitud igual a la distancia entre dos micro-contactos, aunque dependiendo del sistema que se trate, estas magnitudes se pueden interpretar de otras formas.

El sistema de ecuaciones (12.37), (12.38), (12.39) tiene una solución estacionaria en la que

$$\dot{x} = v_0, \quad (12.40)$$

$$\theta = \theta_0 = \begin{cases} 1 - v_0 / v_c, & \text{para } v_0 < v_c, \\ 0, & \text{para } v_0 > v_c \end{cases}, \quad (12.41)$$

$$F = \begin{cases} F_d + (F_e - F_d)(1 - v_0 / v_c), & \text{para } v_0 < v_c, \\ F & \text{para } v_0 > v_c \end{cases}, \quad (12.42)$$

donde

$$v_c = D / \tau. \quad (12.43)$$

La dependencia de la fuerza de fricción estacionaria (12.41) con la velocidad se muestra en la fig. 12.7.

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (12.37)-(12.39) proporciona, una vez más y de manera correcta, las propiedades del rozamiento ya conocidas. A ello se añade la disminución de la fuerza de rozamiento desde su valor estático hasta su valor dinámico dentro de un intervalo de velocidades determinado, así como el crecimiento de la fricción estática con el tiempo tras el reposo.

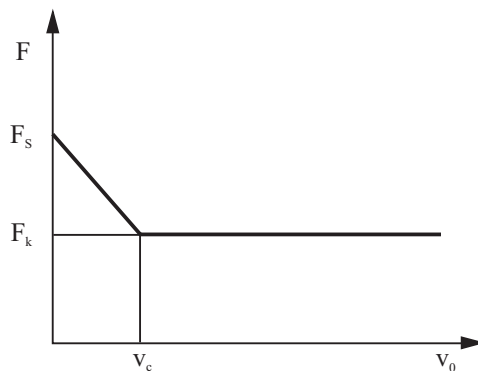


Fig. 12.7 La fuerza de rozamiento estacionaria en función de la velocidad según la ecuación (12.42).

Si en un proceso de deslizamiento estacionario, fuese necesario utilizar la dependencia de la fuerza de rozamiento (12.42) para analizar la estabilidad, se llegaría a la conclusión de que el deslizamiento sería inestable cuando $v_0 < v_c$. En realidad, esta conclusión es solo válida en el caso de que el tiempo de la oscilación sea mucho mayor que el tiempo característico de relajación τ , puesto que solo bajo esta condición se puede utilizar además la función (12.42) para procesos dinámicos. De aquí se infiere que, siempre que las *rigideces sean lo suficientemente pequeñas* y en consecuencia, los períodos de oscilación grandes, el deslizamiento será *inestable*. Para rigideces altas y, por consiguiente, tiempos de oscilación pequeños, el parámetro θ no tiene tiempo de cambiar. Según la expresión (12.38), la fuerza de rozamiento no dependerá de la velocidad en absoluto, y no se producirá ninguna inestabilidad.

Para analizar la estabilidad en el caso general de la solución estacionaria dada por (12.40)-(12.42) y los límites de la misma en función de la velocidad de deslizamiento y la rigidez del sistema, se introduce una pequeña perturbación en la solución estacionaria:

$$x = x_0 + v_0 t + \delta x, \quad \theta = \theta_0 + \delta \theta. \quad (12.44)$$

Las ecuaciones linealizadas resultan ser, en este caso

$$m\delta\ddot{x} + \eta\delta\dot{x} + c\delta x + (F_e - F_d)\delta\theta = 0, \quad (12.45)$$

$$\delta\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\delta\theta - \frac{1}{D}\delta\dot{x}. \quad (12.46)$$

Para este sistema de ecuaciones se busca una solución con forma exponencial

$$\delta x = Ae^{\lambda t}, \quad \delta\theta = Be^{\lambda t}. \quad (12.47)$$

Sustituyendo la expresión en las ecuaciones (12.45) y (12.46), se tiene que

$$(\lambda^2 m + \eta\lambda + c)A + (F_e - F_d)B = 0, \quad (12.48)$$

$$\frac{1}{D}\lambda A + \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)B = 0, \quad (12.49)$$

Este sistema lineal de ecuaciones no tiene solución trivial cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es cero:

$$\begin{vmatrix} \left(\lambda^2 + \frac{\eta}{m} \lambda + \frac{c}{m} \right) & \frac{(F_e - F_d)}{m} \\ \frac{1}{D} \lambda & \left(\lambda + \frac{1}{\tau} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (12.50)$$

o

$$\lambda^3 + \lambda^2 P + \lambda Q + R = 0 \quad (12.51)$$

donde

$$P = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right), \quad Q = \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{(F_e - F_d)}{Dm} \right), \quad R = \frac{c}{\tau m}. \quad (12.52)$$

En el límite de estabilidad, el sistema no efectúa ninguna oscilación amortiguada, lo que significa que dos de las tres soluciones de esta ecuación algebraica de tercer orden en λ son imaginarias puras, siendo una el complejo conjugado de la otra, mientras que la tercera es real y negativa:

$$\lambda_1 = -\Lambda, \quad \lambda_2 = +i\omega_c, \quad \lambda_3 = -i\omega_c. \quad (12.53)$$

La solución general es, en este caso,

$$\delta x = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2^* e^{i\omega_c t} + x_3^* e^{-i\omega_c t} = x_1 e^{-\Lambda t} + x_2 \cos \omega_c t + x_3 \operatorname{sen} \omega_c t \quad (12.54)$$

la cual describe oscilaciones periódicas de amplitud constante tras un tiempo suficientemente prolongado.

Una ecuación algebraica de tercer orden con semejantes raíces tiene la forma

$$(\lambda + \Lambda)(\lambda - i\omega_c)(\lambda + i\omega_c) = \lambda^3 + \lambda^2 \Lambda + \lambda \omega_c^2 + \Lambda \omega_c^2 = 0. \quad (12.55)$$

Comparando las expresiones (12.51) y (12.55) resulta que:

$$P = \Lambda, \quad Q = \omega_c^2, \quad R = \Lambda \omega_c^2. \quad (12.56)$$

De aquí se desprende que, en el límite de estabilidad, se ha de cumplir la condición $R = PQ$ o bien, teniendo en cuenta la expresión (12.52),

$$\frac{c}{\tau m} = \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{c}{m} + \frac{\eta}{\tau m} - \frac{(F_e - F_d)}{Dm} \right). \quad (12.57)$$

De aquí se puede determinar la rigidez crítica

$$c_c = \frac{m}{\eta} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\eta}{m} \right) \left(\frac{(F_e - F_d)}{D} - \frac{\eta}{\tau} \right). \quad (12.58)$$

Para constantes de amortiguamiento muy pequeñas, la expresión se puede simplificar para dar

$$c_c = \frac{(F_e - F_d)m}{\eta D \tau}. \quad (12.59)$$

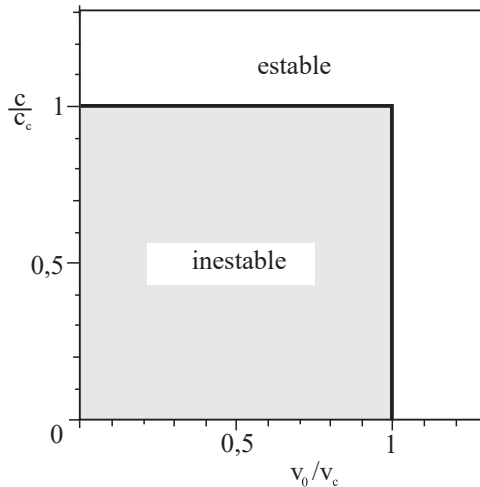


Fig. 12.8 Límite de estabilidad en un sistema tribológico en el plano de coordenadas definidas por los parámetros «velocidad de desplazamiento-rigidez».

Para rigideces menores que c_c el deslizamiento es inestable, y estable para rigideces mayores. El movimiento es estable también en el caso de que $v_0 > v_c$. Así, se obtiene el diagrama de estabilidad representado en la fig. 12.8. El movimiento se puede estabilizar aumentando tanto la velocidad como la rigidez. En realidad, los diagramas de estabilidad no presentan zonas con contornos tan definidos. De hecho, el criterio cualitativo según el cual una región de inestabilidad aparece siempre que las velocidades de deslizamiento y las rigideces sean pequeñas, es demasiado general, por lo que la validez del criterio ha de comprobarse en diversos mecanismos de rozamiento.

12.7 SPRAG-SLIP

En todos los modelos anteriores únicamente se ha considerado el movimiento del sistema en la dirección de deslizamiento. En realidad, el movimiento en la dirección perpendicular a la superficie sometida a rozamiento puede influir en el comportamiento del sistema tribológico de manera considerable. Para ilustrar dicha idea, se analiza el modelo mostrado en la fig. 12.9 a.

Si la fuerza que actúa en la dirección horizontal, F , es mayor que $\mu_e N$, donde N es la fuerza de compresión ejercida por el muelle sobre el sustrato, el sistema se desliza. Sin embargo, si al cuerpo se le hace oscilar en la dirección vertical, entonces la fuerza de compresión varía de manera periódica. Cada vez que se alcance el valor F / μ_e el «pie» se detiene. En el intervalo de tiempo en el que la fuerza de compresión es menor que F / μ_e , el sistema se desliza. El movimiento consiste por tanto en fases en las que se alternan paro y deslizamiento.

En el sistema de la fig. 12.9 a, los movimientos en la dirección horizontal y vertical son independientes. Una vez que las oscilaciones en la dirección vertical se atenúan, el sistema estará o bien detenido, o bien deslizándose. Algo diferente sucede en el sistema de la fig. 12.9 b. Cada vez que la fuerza de compresión supera el valor F / μ_e a causa de las oscilaciones, el pie del sistema se detiene, lo que hace frenar de repente al sistema. Debido a la inclinación del mismo, se pueden acentuar las oscilaciones del cuerpo.

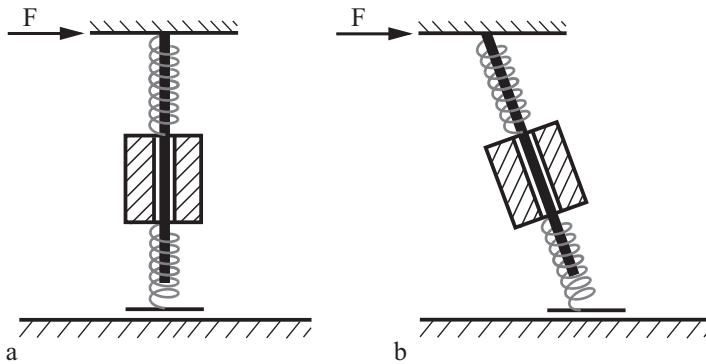


Fig. 12.9 Un modelo sencillo que explica el mecanismo de *sprag-slip*.

Tanto las oscilaciones que se excitan de esta manera, como el movimiento de retención-deslizamiento asociado a ellas, se conocen bajo el término *sprag-slip*. Esta denominación se empleará siempre que un sistema se detenga por efecto de un cambio en la fuerza de compresión. Como ejemplo sirva el traqueteo de los parabrisas, o el juguete mostrado en la fig. 12.10.



Fig. 12.10 En reposo, este sistema se encuentra en un estado de «autobloqueo». Si se hace oscilar al pájaro, el autobloqueo se libera momentáneamente y la sujeción resbala hacia abajo. La alternancia entre paro y deslizamiento es un ejemplo de un movimiento *sprag-slip*.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: *Stick-slip* o retención-deslizamiento. La diferencia entre fricción estática y dinámica, ya conocida por Coulomb, representa en realidad un caso especial de la dependencia del rozamiento con la velocidad. En el caso de velocidades pequeñas ($v \approx 0$), la fuerza de fricción es igual a F_e , la cual disminuye rápidamente hasta alcanzar el valor de la fricción dinámica F_d (fig. 12.11). Determinar la evolución de un movimiento inestable para este caso. Para ello, considérese el modelo sencillo de un par de objetos sometidos a fricción, en el que el bloque rígido se arrastra por efecto de un muelle.

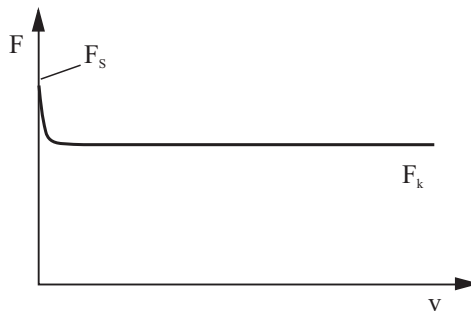


Fig. 12.11 Ley de rozamiento caracterizada por una disminución rápida de la fuerza de fricción desde el valor estático F_e al valor dinámico F_d .

Resolución: Si el cuerpo se encuentra inicialmente en estado de reposo en $x = 0$ y el muelle se desplaza con velocidad constante v_0 , entonces la fuerza elástica del muelle aumenta según la expresión

$$F_{muelle} = cv_0 t$$

hasta que en el tiempo

$$t_0 = F_e / cv_0$$

alcanza el valor de la fricción estática F_e . En este momento el cuerpo se pone en movimiento, durante el cual la fricción disminuye al valor F_d . La ecuación de movimiento en la fase de deslizamiento es

$$m\ddot{x} + cx = cv_0 t - F_d,$$

con las condiciones iniciales,

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0.$$

La solución general de la ecuación de movimiento es

$$x = a \operatorname{sen} \omega t + b \operatorname{cos} \omega t + v_0 t - \frac{F_d}{c},$$

$$\dot{x} = a\omega \operatorname{cos} \omega t - b\omega \operatorname{sen} \omega t + v_0.$$

Aplicando las condiciones iniciales, la solución toma la siguiente forma

$$x = a \operatorname{sen} \omega t + b \operatorname{cos} \omega t + v_0 t - F_d / c = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + v_0 t - F_d / c,$$

$$\dot{x} = a\omega \operatorname{cos} \omega t - b\omega \operatorname{sen} \omega t + v_0 = A\omega \operatorname{cos}(\omega t + \varphi) + v_0,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - b\omega^2 \operatorname{cos} \omega t = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).$$

donde

$$a = \frac{1}{\omega} \left(-v_0 \operatorname{cos} \frac{\omega F_e}{cv_0} - \omega \frac{F_e - F_d}{c} \operatorname{sen} \frac{\omega F_e}{cv_0} \right),$$

$$b = \frac{1}{\omega} \left(v_0 \operatorname{sen} \frac{\omega F_e}{cv_0} - \omega \frac{F_e - F_d}{c} \operatorname{cos} \frac{\omega F_e}{cv_0} \right).$$

y

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_0^2 + \left(\omega \frac{F_e - F_d}{c} \right)^2}.$$

El cuerpo recupera el estado de reposo cuando $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) + v_0 = 0$, de donde se obtiene que $\cos(\omega t + \varphi) = -v_0 / A\omega$. La aceleración es, por tanto, igual a

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)} = -(F_e - F_d) / m,$$

la fuerza aplicada al cuerpo es igual a $-(F_e - F_d)$ y la fuerza del muelle

$$F_{muelle} = -F_e + 2F_d < F_e.$$

Dado que dicha fuerza es menor que la fricción estática, el cuerpo permanece detenido hasta que la fuerza del muelle alcanza de nuevo el valor F_e .

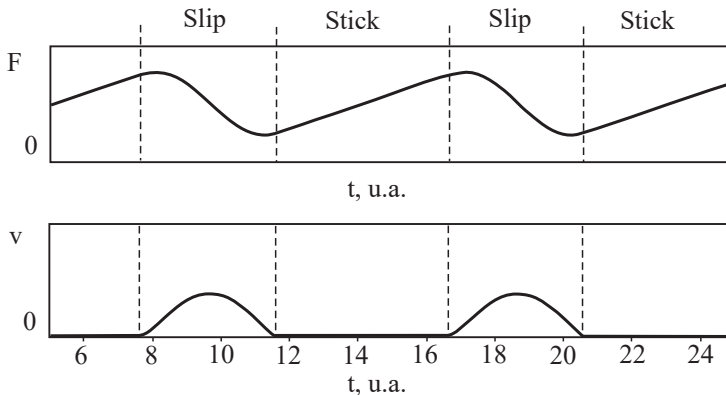


Fig. 12.12 Fuerza elástica del muelle (gráfica superior) y velocidad de deslizamiento (gráfica inferior) en función del tiempo para un movimiento de retención-deslizamiento o *stick-slip*, sobre el cual actúa una fuerza de rozamiento del tipo mostrado en la fig. 12.11. El cuerpo no se desliza y la fuerza del muelle aumenta de forma lineal con el tiempo (fase de retención o *stick*), hasta que esta alcanza el valor de la fricción estática. En ese momento, el cuerpo se pone en movimiento y oscila hasta que la velocidad vuelve a ser cero. Le sigue a continuación la siguiente fase *stick*.

A continuación, vuelve a repetirse la fase *slip*. El movimiento consiste en fases alternas de paro o retención (*stick*) y de deslizamiento (*slip*), y se le denomina *movimiento stick-slip*, también llamado de retención-desplazamiento. La dependencia con el tiempo de la velocidad y la fuerza del muelle en un movimiento *stick-slip* se muestra en la fig. 12.12.

La duración de la fase *slip* es

$$t_{slip} = \frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{\omega}{v_0} \frac{F_e - F_d}{c} \right).$$

En el caso límite de $v_0 \rightarrow 0$, aquella tiende al valor π / ω (la mitad de un período de oscilación). Para velocidades muy pequeñas, v_0 , el espacio recorrido durante el deslizamiento es igual a

$$\Delta x_{slip} = 2 \frac{F_e - F_d}{c}.$$

Problema 2: Determinar el coeficiente de reflexión de una capa amortiguadora en un sistema como el que se muestra en el fig. 12.4, para un coeficiente de amortiguamiento dado.

Resolución: Se busca la solución de la ecuación de onda (12.10) con la condición de frontera descrita en (12.19), como superposición de una onda de amplitud decreciente y una onda reflejada con la siguiente forma compleja:

$$u = u_0 e^{ikct} \left(e^{ikz} + B e^{-ikz} \right).$$

Se supone que la amplitud de la onda decreciente es igual a 1. La amplitud de la onda reflejada es B . Sustituyendo estos valores en la condición de frontera resulta en

$$B = e^{-2ikl} \cdot \frac{G - \beta c}{G + \beta c}.$$

Se define el coeficiente de reflexión como el cociente entre las intensidades de la onda reflejada y la onda decreciente que, por consiguiente, es igual a $|B|^2$:

$$|B|^2 = \left(\frac{G - \beta c}{G + \beta c} \right)^2.$$

El coeficiente de reflexión es nulo cuando $\beta = G / c = \sqrt{G\rho}$. Cuando $\beta \rightarrow 0$ o $\beta \rightarrow \infty$, el coeficiente de reflexión se acerca a 1.

Problema 3: Determinar el coeficiente de reflexión entre una capa elástica y una capa fluida caracterizada por una viscosidad dinámica⁶ $\bar{\eta}$.

Resolución: Las ecuaciones de movimiento a resolver son la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en el continuo elástico, y la ecuación de Navier-Stokes en el medio fluido, la cual para un movimiento trasversal, adquiere la siguiente forma

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{\eta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Se sitúa el plano $z = 0$ en la interfase entre el medio elástico y el medio fluido y se define el eje z positivo en la dirección de la capa elástica. Las condiciones de frontera en la interfase son:

$$\dot{u}(0, t) = v(0, t) \quad (\text{Condición estática})$$

y

$$G \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \bar{\eta} \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (\text{Condición de equilibrio}).$$

Tal y como se hizo en el problema 2, se busca la solución de la ecuación de onda como superposición de una onda de amplitud decreciente y una onda reflejada

$$u = e^{i\omega t} \left(e^{i\frac{\omega}{c}z} + B e^{-i\frac{\omega}{c}z} \right).$$

La solución de la ecuación de Navier-Stokes, caracterizada por la frecuencia ω y que se hace nula en el infinito, es

$$v = C e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\bar{\eta}}} z} e^{i\omega t}.$$

Sustituyendo estas soluciones en las condiciones de frontera en la interfase, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$i\omega(1+B) = C,$$

$$iG \frac{\omega}{c} (1-B) = \bar{\eta} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\bar{\eta}}} C.$$

6. No debe confundirse la viscosidad dinámica $\bar{\eta}$ con el coeficiente de amortiguamiento η , empleado anteriormente en este y en otros capítulos, el cual tiene otras unidades.

Del que resulta el siguiente coeficiente de reflexión

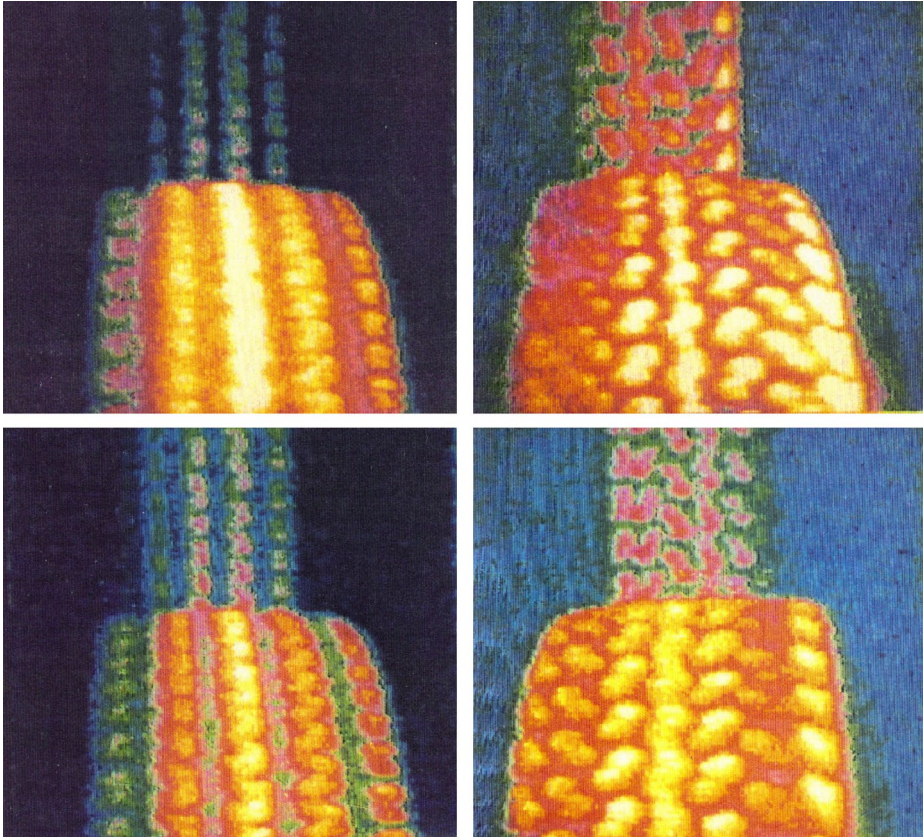
$$|B|^2 = \frac{(1-\zeta)^2 + \zeta^2}{(1+\zeta)^2 + \zeta^2}$$

donde

$$\zeta = \frac{c}{G} \sqrt{\frac{\rho\omega\bar{\eta}}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\bar{\eta}}{2G}}$$

El coeficiente de reflexión alcanza un mínimo $|B|^2 \approx 0,17$ cuando $\zeta = 1/\sqrt{2}$. De aquí se deduce que las oscilaciones pueden también amortiguarse en un determinado intervalo de frecuencias por una capa fluida (por ejemplo, por un polímero con propiedades reológicas adecuadas). En los casos límite de viscosidades nula o infinitamente grande, el coeficiente de reflexión es igual a 1.

13. EFECTOS TÉRMICOS EN EL CONTACTO



En la interfase entre dos cuerpos sometidos a rozamiento, se libera energía en forma de calor. Dado que, por regla general, el área de contacto real es solo una fracción del área aparente, la disipación de calor en un contacto tribológico es muy heterogénea. El aumento de temperatura local en micro-contacts individuales puede ser tan grande que puede alterar las propiedades del material o incluso llegar a fundirlo. Un cambio local de temperatura puede conducir además a una dilatación térmica y, por tanto, a un cambio en las condiciones del contacto. Esta interacción puede conllevar la aparición de inestabilidades termo-mecánicas en el contacto. En este capítulo se analizarán los distintos aspectos de la disipación de calor por efecto de la fricción en contactos tribológicos.

13.1 INTRODUCCIÓN

Las primeras investigaciones sistemáticas de la distribución de temperatura en contactos sometidos a rozamiento, fueron realizadas en 1935 por F. P. Bowden

y K. Riedler¹, utilizando el contacto tribológico como un termopar natural. El método utilizado sigue siendo el más sencillo y fiable de todos los que permiten determinar experimentalmente la temperatura en contactos tribológicos. En trabajos posteriores con Tabor, Bowden pudo llegar a medir parcialmente temperaturas muy altas, del orden de las de fusión.

De las investigaciones sobre los efectos térmicos en contactos, pueden diferenciarse tres escalas: (1) la correspondiente al sistema tribológico en su conjunto, (2) la asociada a la «región macroscópica del contacto» y (3) la de los micro-contactos entre dos superficies rugosas. A medida que la temperatura del sistema completo cambia durante el periodo de funcionamiento, la de un contacto sometido a deslizamiento (por ejemplo, entre dos dientes de rueda) aumenta muy rápidamente, llegando a alcanzar un valor muy alto. Se habla entonces de *temperatura flash*². La investigación teórica del aumento local de temperatura en regiones macroscópicas de contacto está sobre todo asociada al nombre de H. Blok³. En dicha teoría, el *número de Pécelet* es una magnitud característica. Por otro lado, la evolución térmica para números de Pécelet pequeños fue investigada por J.K. Jaeger⁴, cuya teoría se puede aplicar, por regla general, a los micro-contactos. En cualquier caso, se ha mostrado que la teoría de Jaeger para números de Pécelet pequeños es también válida en el ámbito de aplicación de la teoría de Blok. Por tanto, este capítulo se centrará en el caso de números de *Pécelet* pequeños.

13.2 CÁLCULO DEL AUMENTO LOCAL DE LA TEMPERATURA POR ROZAMIENTO EN MICRO-CONTACTOS

Considérese el contacto entre dos superficies rugosas en el marco del modelo propuesto por Greenwood y Williamson (véase Capítulo 7). Se supone que entre micro-contactos existe rozamiento, caracterizado por el coeficiente μ . Se calcula el aumento de temperatura en un micro-contacto suponiendo que la longitud característica de transmisión del calor, $D \approx \sqrt{2\alpha t}$, durante la «duración» de un contacto, $t \approx a/v$, es mucho mayor que el radio de contacto, es decir $\sqrt{2\alpha t} \gg a$, o bien,

1. F.P. Bowden, K.E.W. Riedler. «A note on the Surface temperatura of sliding metals». *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**(3), 431-432 (1935).
2. Del inglés *flash temperature* (N.d.T.).
3. H. Blok. «The Dissipation of Frictional Heat». *Applied Scientific Research, Section A*, (2-3), 151-181 (1955).
4. J.K. Jaeger. «Moving Sources of Heat and the Temperature of Sliding Contacts». *J. Proc. Royal Society New South Wales* **76**(III), 203-224 (1942).

$$\frac{va}{2\alpha} \ll 1. \quad (13.1)$$

α es la *difusividad* térmica, a es el radio de contacto y v es la velocidad de deslizamiento. Al cociente $va / 2\alpha$ se le conoce como *número de Péclet*. Cuando se cumple la condición, la transmisión de calor puede considerarse en todo momento como un proceso estacionario caracterizado por una producción dada de calor en la superficie. En el caso de metales ($\alpha \approx 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$, $a \approx 10^{-5} - 10^{-4} \text{ m}$), esto significa que la velocidad de deslizamiento no puede ser mayor que $2\alpha / a \approx 2 - 20 \text{ m/s}$, lo cual se cumple en la mayoría de las aplicaciones prácticas. En el caso de materiales cerámicos y polímeros ($\alpha \approx 10^{-7} - 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, $a \approx 10^{-5} \text{ m}$), la aproximación es válida para velocidades inferiores a $0,02 - 0,2 \text{ m/s}$.

Un aumento homogéneo de temperatura ΔT en una región circular de radio a de la superficie de un semi-espacio caracterizado por una conductividad térmica λ , genera un flujo de calor \dot{W} , el cual está asociado a ΔT a través de la resistencia térmica R_t :

$$\dot{W} = \frac{\Delta T}{R_t}. \quad (13.2)$$

La resistencia térmica, en el caso de un contacto circular, es igual a

$$R_t = \frac{1}{2a\lambda}. \quad (13.3)$$

Se puede emplear la ecuación (13.2) también de manera inversa, para calcular el aumento de temperatura en la superficie para un flujo de calor dado:

$$\Delta T = \frac{\dot{W}}{2a\lambda}. \quad (13.4)$$

Si se supone que todo el calor fluye hacia un cuerpo, esto implica que en un micro-contacto elástico

$$\Delta T = \frac{\mu \Delta F_N v}{2a\lambda}. \quad (13.5)$$

Sustituyendo la expresión hertziana $\Delta F_N = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$ y teniendo en cuenta que $a = \sqrt{Rd}$, se obtiene

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{\mu E^* v d}{\lambda}. \quad (13.6)$$

Como se vio en el capítulo 7, la profundidad de indentación media \bar{d} apenas depende de la fuerza de compresión y es aproximadamente igual a l/π .

Para el aumento medio de la temperatura en micro-contactos se obtiene, por tanto,

$$\overline{\Delta T} \approx 0,2 \frac{\mu E^* l v}{\lambda} . \quad (13.7)$$

En el caso de un contacto acero-zafiro ($E^* \approx 140$ GPa, $\mu \approx 0,15$, $l \approx 1 \mu\text{m}$ y $\lambda \approx 40 \frac{W}{m \cdot K}$) y una velocidad de deslizamiento de 1 m/s, se obtiene un incremento medio de la temperatura en los micro-contactos de $\overline{\Delta T} \approx 110$ K. En el caso del cobre, con $E^* \approx 100$ GPa y $\lambda \approx 400 \frac{W}{m \cdot K}$, se obtiene bajo las mismas

condiciones un aumento medio en la temperatura de $\overline{\Delta T} \approx 8$ K. En aplicaciones donde el aumento local de la temperatura haya de mantenerse lo más pequeño posible⁵, es conveniente optar por un par de materiales formado por un polímero y un cerámico. En este caso, puede usarse el módulo de elasticidad (pequeño) del polímero para E^* , y para λ , en general, se puede emplear la mucho más elevada conductividad térmica del material cerámico.

13.3 INESTABILIDAD TERMO-MECÁNICA

Cuando dos cuerpos comprimidos entre sí se ponen en movimiento relativo, puede aparecer una inestabilidad como resultado de la interacción entre la energía liberada de fricción y la dilatación térmica. Las regiones con mayor temperatura y, por tanto, las que experimentan mayor dilatación térmica, están sometidas a un esfuerzo normal mayor y, por consiguiente, se calientan aún más (fig. 13.1). Interesa analizar la condición para la que se da dicha inestabilidad.

5. En prótesis de cadera, la temperatura no debe superar la temperatura de degradación de las proteínas. En consecuencia, solo se permite un aumento de temperatura de 2-4 K.



Fig. 13.1 Las zonas de mayor temperatura se aplanan por efecto de la dilatación térmica, lo cual conduce a una mayor potencia de fricción y, por tanto, a un mayor calentamiento en dichas regiones. Esto puede causar una inestabilidad y la aparición de un patrón de deformación permanente.

En primer lugar se va a hacer una estimación aproximada. Si aparece una inestabilidad con un número de onda k , en la superficie se generan sendas distribuciones periódicas de esfuerzos y temperatura caracterizadas por el mismo número de onda. La «profundidad de decaimiento» de estas fluctuaciones en el esfuerzo y en la temperatura –y por tanto, la extensión de las zonas de la superficie deformadas–, tiene el orden de magnitud $1/k$. Si la superficie (en compresión) se calienta en la magnitud ΔT , se genera el esfuerzo térmico

$$\Delta\sigma \approx \gamma\Delta T \cdot E^*, \quad (13.8)$$

donde γ es el coeficiente de dilatación volumétrica y E^* es el módulo de elasticidad efectivo. La potencia de fricción por unidad de superficie en el estado estacionario, $\mu\Delta\sigma v$, es igual al flujo de calor hacia la hendidura del material:

$$\mu\Delta\sigma v \approx \lambda \frac{\Delta T}{1/k}. \quad (13.9)$$

Teniendo en cuenta la expresión (13.8), se infiere que el vector de onda para el que la generación y el flujo de calor se equilibran, es igual a

$$k_c \approx \frac{E^* \mu \gamma v}{\lambda}. \quad (13.10)$$

Las perturbaciones térmicas con números de onda menores que el número de onda crítico, k_c , son inestables.

La inestabilidad termo-mecánica puede ser responsable, entre otros, del fenómeno de desgaste en forma de estrías paralelas a modo de «tabla de lavar», el cual aparece en la banda de rodadura de los aros de pistón en motores sometidos a muy alta carga (véase fig. 13.2).

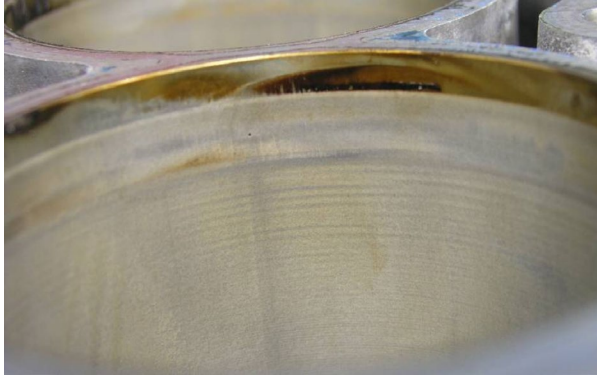


Fig. 13.2 Imagen de la banda de rodadura en un cilindro con patrón de desgaste en forma de tabla de lavar.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Determinar la condición de estabilidad en el caso de una inestabilidad termo-mecánica en un contacto entre un cuerpo elástico y otro rígido.

Resolución: Se trata del mismo problema para el que ya se hizo una estimación anteriormente. Considérese el sistema mostrado en la fig. 13.3. El cuerpo superior ha de ser completamente rígido y no ser conductor de calor.

En el límite entre un estado estable y otro inestable, las perturbaciones son estacionarias. Para establecer la condición de inestabilidad, se parte de la ecuación de equilibrio para un cuerpo elástico, teniendo en cuenta la dilatación térmica:

$$\frac{3}{2} \frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)} \Delta \bar{u} + \frac{3}{2} \frac{1}{(1+\nu)} \nabla \operatorname{div} \bar{u} = \gamma \nabla T$$

y la condición estacionaria para la conducción de calor

$$\Delta T = 0.$$

\bar{u} es el vector de desplazamientos, ν es el coeficiente de Poisson, T es la desviación de la temperatura con respecto al valor estacionario lejos de la superficie, y

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace. El tensor de esfuerzos se calcula según

$$\sigma_{ik} = -\frac{2}{3} \frac{G(1+\nu)}{(1-2\nu)} \gamma T \delta_{ik} + \frac{2}{3} \frac{G(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ik} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right),$$

donde G es el módulo de cizalla.

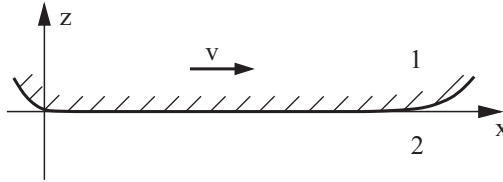


Fig. 13.3 Un cuerpo rígido y aislante al calor (1) en contacto con un continuo elástico (2). Los cuerpos se desplazan uno con respecto a otro con una velocidad tangencial v .

Suponiendo que el cuerpo superior es rígido, la superficie del cuerpo elástico no puede efectuar ningún desplazamiento vertical:

$$u_z(z = 0) = 0.$$

Para simplificar, se supone que el coeficiente de fricción es muy pequeño y que la componente del esfuerzo normal σ_{zz} es la dominante, de tal modo que el esfuerzo tangencial pueda considerarse nulo en las condiciones de equilibrio mecánico:

$$\sigma_{xz}(z = 0) = 0.$$

La solución de las ecuaciones $\frac{3}{2} \frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)} \Delta \bar{u} + \frac{3}{2} \frac{1}{(1+\nu)} \nabla \text{div} \bar{u} = \gamma \nabla T$ y $\Delta T = 0$,

que cumple las condiciones $u_z(z = 0) = 0$ y $\sigma_{xz}(z = 0) = 0$, es⁶

$$T = T_0 \cos kx \cdot e^{kz}, \quad \bar{u} = -\frac{\gamma T_0(1+\nu)}{6(1-\nu)k} \left((-1+kz) \sin kx, 0, -kz \cos kx \right) \cdot e^{kz}.$$

En el estado estacionario, el calor disipado en la superficie es igual al flujo de calor que parte de la misma (que, bajo el supuesto planteado, solo tiene lugar en dirección hacia el cuerpo inferior):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\mu \nu \sigma_{zz}(z = 0).$$

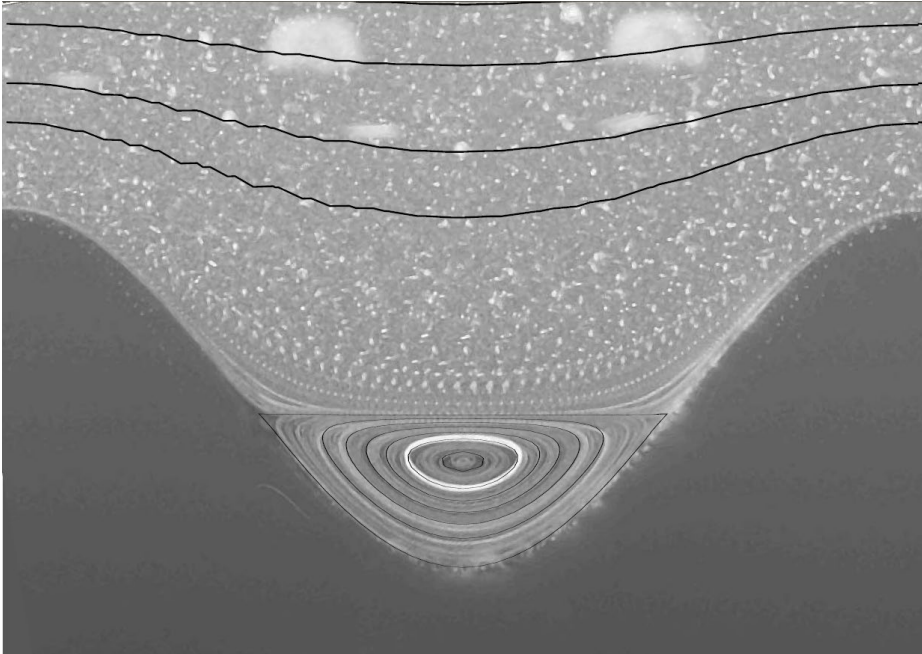
λ es la conductividad térmica. De aquí se obtiene el valor crítico del número de onda

6. La elección de $\cos kx$ en la solución para la coordenada x supone el análisis de la evolución de una perturbación armónica. Dada la linealidad del problema, cualquier tipo de perturbación puede formularse como una superposición de términos de serie de Fourier (términos de tipo seno o coseno) con diferentes números de onda k .

$$k_c = \frac{\nu\mu G\gamma(1+\nu)}{3\lambda(1-\nu)}.$$

Para $\nu = 1/3$, se tiene que $k_c = \frac{2}{3} \frac{\nu\mu G\gamma}{\lambda}$. Las perturbaciones térmicas caracterizadas por números de onda menores que el valor crítico son inestables.

14. SISTEMAS LUBRICADOS



Para disminuir el rozamiento y el desgaste, se han venido utilizando los lubricantes durante siglos, cuya función es la de suprimir el contacto directo entre dos cuerpos rígidos, sustituyendo, de esta manera, la fricción seca por la fricción fluida. La presencia de una capa de fluido entre dos cuerpos rígidos influye no solo en las fuerzas tangenciales sino también en las fuerzas normales: dos láminas de vidrio pueden separarse sin esfuerzo alguno, mientras que para separar dos láminas húmedas se requiere una fuerza considerable. Este fenómeno podría atribuirse, por una parte, a la presencia de puentes de líquido, pero por otra, podría bien ser de naturaleza puramente hidrodinámica: un fluido viscoso necesita un tiempo para fluir a través del espacio angosto entre dos láminas. Bajo condiciones dinámicas, este fenómeno da lugar a una «adherencia» aparente entre cuerpos lubricados, que se denomina «adherencia viscosa».

En la mayor parte de los tribosistemas lubricados, se trata con flujos no turbulentos, donde los lubricantes pueden, en buena aproximación, considerarse también fluidos incompresibles. Se comenzará el tratamiento de la lubricación hidrodinámica y de la adherencia viscosa con el análisis de un flujo estacionario entre dos placas paralelas, el cual constituye la base de la teoría de la lubricación.

14.1 FLUJO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS

La dinámica de un fluido viscoso de comportamiento lineal (fluido newtoniano), viene descrita por la ecuación de Navier-Stokes, la cual, para fluidos incompresibles, adquiere la forma siguiente

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}, \quad (14.1)$$

donde ρ es la densidad, η es la viscosidad dinámica del fluido y p es la presión en el interior del fluido. Además, un fluido incompresible cumple la siguiente igualdad

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (14.2)$$

En el caso de fluidos cuasi-estacionarios (los llamados flujos reptantes o de Stokes), con los que se trata en la mayor parte de los problemas sobre lubricación, el término de inercia de la ecuación de Navier-Stokes puede considerarse despreciable, por lo que la ecuación adquiere la siguiente forma *cuasi-estacionaria*

$$\eta \Delta \vec{v} = \nabla p. \quad (14.3)$$

Se van a considerar dos placas separadas por una capa de fluido. En el caso general, las placas pueden desplazarse una con respecto a la otra. Sin riesgo a perder la generalidad, se puede asumir que la velocidad de la placa superior es cero. Para la velocidad de la placa inferior se asigna el valor $-v_0$.

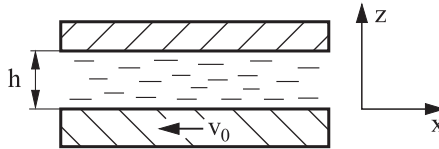


Fig. 14.1 Flujo entre dos placas paralelas.

Se va a suponer que el flujo estacionario se produce en la dirección x . Por consiguiente, la velocidad solo tiene una componente x , la cual depende de la coordenada z : $\vec{v} = (v(z), 0)$. La ecuación (14.3) adquiere la siguiente forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (14.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z = 0. \quad (14.5)$$

De la expresión (14.5) se infiere que la presión no depende de la coordenada vertical z : $p = p(x)$. Integrando dos veces la expresión (14.4), resulta en

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \quad (14.6)$$

De las condiciones de frontera $v(0) = -v_0$ y $v(h) = 0$, se obtienen las constantes $C_2 = -\eta v_0$ y $C_1 = \frac{\eta v_0}{h} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{h}{2}$. Por consiguiente, la distribución de velocidades vendrá dada por

$$\eta v = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{z(z-h)}{2} + \frac{\eta v_0}{h} (z-h). \quad (14.7)$$

14.2 LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Se van a considerar ahora los dos cuerpos esquematizados en la fig. 14.2. La superficie de uno de los cuerpos se encuentra algo inclinada en relación con la del otro cuerpo, la cual se asume completamente plana y lisa. Se va a suponer además que el sustrato se desplaza hacia la izquierda con una velocidad $-v_0$. En el caso de inclinaciones pequeñas, se puede considerar que en cada punto, el flujo se establece entre dos placas paralelas, pudiendo utilizar la ecuación (14.7) para obtener la distribución de velocidades:

$$v = p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h} (z-h). \quad (14.8)$$

En este caso, se designa el gradiente de presión como p' .

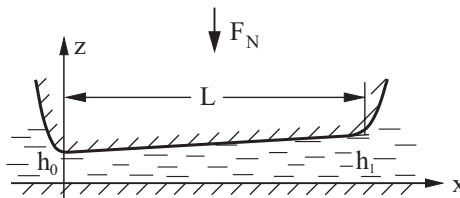


Fig. 14.2 Dos cuerpos deslizándose entre sí y separados por una capa de lubricante.

Según la ley de conservación de la masa, el caudal de materia que atraviesa cada sección por unidad de tiempo, Q , es constante:

$$\frac{Q}{D} = \int_0^h v(z) dz = \int_0^h \left(p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h} (z-h) \right) dz = -p' \frac{h^3}{12\eta} - \frac{v_0 h}{2} = \text{const},$$

donde D es la anchura del cuerpo deslizante. Consecuentemente, se obtiene la siguiente expresión para la distribución de presiones

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right). \quad (14.10)$$

Multiplicando por h^3 y derivando con respecto a x , se puede reescribir la ecuación anterior en forma diferencial

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = -6\eta v_0 \frac{dh}{dx}. \quad (14.11)$$

Esta expresión representa el caso particular unidimensional de la ecuación derivada por Reynolds en el año 1886¹

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(h^3 \frac{dp}{dy} \right) = -6\eta v_0 \frac{dh}{dx}, \quad (14.12)$$

la cual lleva su nombre y se la puede considerar como el principio fundamental de la teoría hidrodinámica de la lubricación. En la ecuación de Reynolds, las coordenadas x e y se encuentran en el plano de deslizamiento, x en la dirección del movimiento, e y en la dirección perpendicular.

Volviendo a la ecuación (14.10), en el caso de que la altura aumente de forma lineal, $h = h_0 + ax$, la expresión (14.10) puede integrarse de manera explícita, de modo que se obtiene la siguiente ecuación para la presión

$$\begin{aligned} p &= p_{ext} - 6\eta v_0 \int_0^x \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dx = p_{ext} - \frac{6\eta v_0}{a} \int_{h_0}^h \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right) dh \\ &= p_{ext} + \frac{3\eta v_0}{a} \left(2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - C \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Donde, en la integración definida, se ha tenido en cuenta que $p(0) = p_{ext}$. En el otro extremo ($x = L$), la presión también es igual a la presión externa p_{ext} , de lo que se deduce que $C = 2h_0 h_1 / (h_0 + h_1)$. Por consiguiente, se obtiene la siguiente distribución de presiones

1. O. Reynolds «On the theory of lubrication and its applications to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil». *Philosophical Transactions of the Royal Society* 177, 157-234 (1886).

$$p = p_{ext} + \frac{6\eta v_0}{a} \left(\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) - \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) \right). \quad (14.14)$$

El campo de velocidades viene dado por

$$v = v_0 (z - h) \left[\frac{1}{h} + 3z \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^3} \cdot \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1} \right) \right]. \quad (14.15)$$

Tanto el perfil de velocidades como la distribución de presiones se muestran en la fig. 14.3 para el caso $p_{ext} = 0$ en la expresión (14.14).

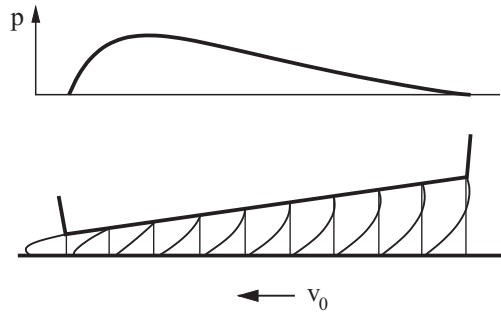


Fig. 14.3 Perfil de velocidades y distribución de presiones entre dos superficies deslizantes y lubricadas hidrodinámicamente.

Si se conocen tanto la distribución de velocidades como la de presiones, entonces se pueden calcular fácilmente las componentes x y z de la fuerza aplicada en el cuerpo superior. Para la componente vertical se obtiene

$$F_N = \int dx dy (p - p_{ext}) = \frac{\eta AL v_0}{h_0^2} \alpha \quad (14.16)$$

donde $\alpha = \frac{6}{(\xi - 1)^2} \left[\ln \xi - \frac{2(\xi - 1)}{\xi + 1} \right]$ y $\xi = h_1 / h_0$; $A = LD$ es el «área de contacto» aparente. La componente horizontal de la fuerza es debida al esfuerzo viscoso $\sigma_{xz} = \eta \partial v / \partial z$ y se calcula según

$$F_R = \eta \int_A dx dy \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\eta A v_0}{h_0} \beta \quad (14.17)$$

donde $\beta = \frac{1}{\xi - 1} \left[4 \ln \xi - \frac{6(\xi - 1)}{\xi + 1} \right]$. Para el coeficiente de fricción se obtiene la siguiente expresión

$$\mu = \frac{F_R}{F_N} = \left(\frac{h_0}{L} \right) \frac{\beta}{\alpha}. \quad (14.18)$$

El coeficiente de fricción depende de la presión media en la región de contacto. Si se calcula la distancia de separación h_0 mediante la expresión (14.16) y el resultado se sustituye en la ecuación (14.18), se obtiene

$$\mu = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{A\eta v_0}{LF_N}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\eta v_0}{LP}}. \quad (14.19)$$

$P = F_N / A$ es aquí el valor medio de la presión en la región de contacto. La dependencia con ξ de los parámetros β / α y $\beta / \sqrt{\alpha}$ se muestra en la fig. 14.4. En la región de valores relevantes de ξ , el cociente β / α se haya comprendido entre los valores 5 y 10. De esta observación se puede obtener la siguiente estimación para el coeficiente de fricción:

$$\mu \approx 10 \left(\frac{h_0}{L} \right). \quad (14.20)$$

El coeficiente de fricción es aproximadamente 10 veces el cociente entre la distancia de separación más pequeña y la longitud del contacto deslizante. En el amplio intervalo de valores relevantes de ξ , el cociente $\beta / \sqrt{\alpha}$ apenas varía y es aproximadamente igual a 2. Por tanto, de la expresión (14.19) se puede obtener, en buena aproximación,

$$\mu \approx 2 \sqrt{\frac{\eta v_0}{LP}}. \quad (14.21)$$

Para la misma longitud de la región de contacto, el coeficiente de fricción es una función de la combinación de parámetros $\eta v_0 / P$.

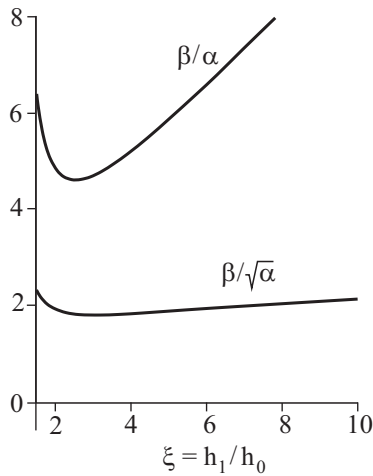


Fig. 14.4 Representación de los parámetros de los que depende el coeficiente de fricción $-\beta/\alpha$ y $\beta/\sqrt{\alpha}$ – en función del cociente entre las distancias máxima y mínima de separación, ξ .

Cuanto mayor es la presión, menor es el coeficiente de fricción. No obstante, hay que tener en cuenta que el espacio intersticial también disminuye a medida

que la presión aumenta: $h_0 = \sqrt{\alpha L \frac{\eta v_0}{P}}$. Cuando la distancia de separación es

suficientemente pequeña, la suposición de que las superficies son lisas deja de ser válida; el efecto de la rugosidad pasa a ser considerable y el sistema entra en el régimen de *fricción mixta*. Por consiguiente, cuando la presión aumenta aún más, el coeficiente de fricción vuelve a aumentar. La variación de este con el parámetro $\eta v_0 / P$ se denomina «curva de Stribeck». Esta curva describe la dependencia del coeficiente de fricción con respecto a cada uno de los parámetros involucrados, y en particular, determina la dependencia de la fuerza de rozamiento con la velocidad en un sistema lubricado. Para valores altos de $\eta v_0 / P$, dicha dependencia tiene un carácter universal. Sin embargo, en la región de fricción mixta, el comportamiento de la curva varía en función de las propiedades de la superficie y las del lubricante, aunque la fricción mixta siempre viene asociada a una disminución de la velocidad de deslizamiento. Cuanto mayor es la velocidad, mayor es el espesor de la capa de lubricante y, por tanto, menor es la probabilidad de que las superficies entren en contacto directo a través de sus respectivas rugosidades.

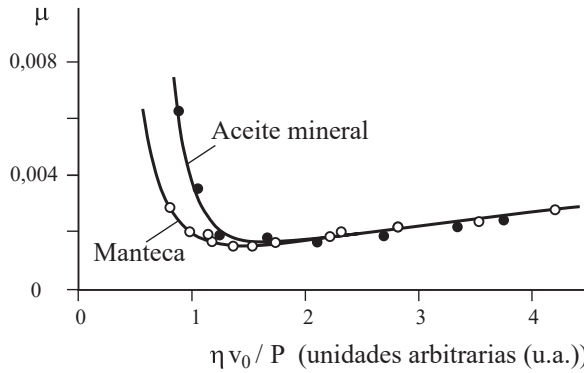


Fig. 14.5 Curvas de Stribeck para dos lubricantes distintos. A velocidades altas, ambas curvas coinciden. Sin embargo, a valores pequeños de $\eta v_0 / P$, los mismos sistemas se comportan de forma diferente según el lubricante empleado.

14.3 «ADHERENCIA VISCOSA»

Si entre dos cuerpos existe una capa de fluido, estos no pueden ni comprimirse ni separarse de manera rápida, lo que se interpreta a menudo como una especie de «adherencia». En procesos dinámicos y en numerosas ocasiones, es difícil diferenciar la «adherencia verdadera» (determinada por las fuerzas superficiales o por los puentes de líquido) de la «adherencia viscosa». El acercamiento de dos cuerpos a través de una capa intermedia de fluido solo puede ocurrir si dicha capa se «exprime», es decir, si se expulsa por los lados. En la separación de los cuerpos, el fluido ha de retornar hacia la cavidad, a menos que la separación ocurra por cavitación (es decir, por formación y desplazamiento colectivo de burbujas o pequeñas cavidades de vapor).

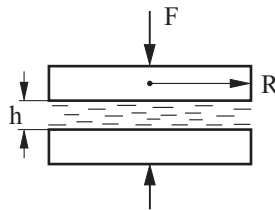


Fig. 14.6 Proceso de extracción de una capa de fluido entre dos placas circulares.

Se va a considerar, en primer lugar, el acercamiento entre dos placas circulares de radio R , entre las cuales se halla una capa de fluido (fig. 14.6). Este, al ser expulsado por el acercamiento de las placas en la dirección vertical, genera un flujo radial. Por la simetría del problema, es evidente que la velocidad de flujo

es radialmente simétrica. Si el espacio intersticial entre las dos placas es mucho menor que el radio de las mismas, entonces la componente radial de la velocidad es mucho mayor que la velocidad de acercamiento de las placas. En esencia, se trata de un flujo bajo la acción de un gradiente de presión, el cual ya se ha considerado en la primera sección del capítulo. La velocidad es, por tanto, igual a

$$v = p' \frac{z(z-h)}{2\eta}, \quad (14.22)$$

donde $p' = \partial p / \partial r$. El caudal volumétrico a través de una cavidad cilíndrica de radio r es igual a

$$Q = \int_0^h 2\pi r v(z) dz = p' \frac{\pi r}{\eta} \int_0^h z(z-h) dz = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta}. \quad (14.23)$$

Por otro lado, este flujo ha de ser igual al caudal volumétrico $Q = -\pi r^2 \dot{h}$ por la cara superior de la capa debido al desplazamiento vertical de la placa superior:

$$-\pi r^2 \dot{h} = -p' \frac{\pi r h^3}{6\eta}. \quad (14.24)$$

De ahí se obtiene, para el gradiente de presión,

$$p' = \frac{6\eta r \dot{h}}{h^3} \quad (14.25)$$

o tras integrar una vez,

$$p = \frac{6\eta \dot{h}}{h^3} \int r dr = \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} r^2 + C. \quad (14.26)$$

La constante de integración puede determinarse a partir de la condición de frontera $p(r=R) = p_{ext}$ (presión externa):

$$C = p_{ext} - \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} R^2. \quad (14.27)$$

Por tanto, la expresión definitiva para la distribución de presiones es

$$p = \frac{3\eta \dot{h}}{h^3} (r^2 - R^2) + p_{ext}. \quad (14.28)$$

La fuerza de compresión vertical sobre la placa se calcula según

$$F = \int_0^R 2\pi r (p(r) - p_{ext}) dr = \frac{6\eta\pi\dot{h}}{h^3} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr = -\frac{3\eta\pi\dot{h}}{2h^3} R^4. \quad (14.29)$$

Para dicha fuerza, se puede ahora calcular el tiempo necesario para que las placas, inicialmente separadas una distancia h_0 , se acerquen hasta llegar a una distancia de separación h :

$$\int_0^t \frac{2F}{3\eta\pi R^4} dt = -\int_{h_0}^h \frac{dh}{h^3}, \quad (14.30)$$

$$\frac{2F}{3\eta\pi R^4} t = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \right). \quad (14.31)$$

Para distancias iniciales de separación mayores, el tiempo apenas depende de la distancia mínima a alcanzar:

$$t = \frac{3\eta\pi R^4}{4Fh^2}. \quad (14.32)$$

Si la fuerza F depende del tiempo, se tiene entonces que:

$$\int_0^t F(t) dt = \frac{3\eta\pi R^4}{4h^2}. \quad (14.33)$$

Esto implica, que el espesor de capa más pequeño que puede alcanzarse depende tan solo del *impulso de la fuerza*.

Para ilustrar esta idea, se va a considerar un cuerpo en forma de placa lubricado por un fluido viscoso, el cual se lanza contra una cubierta con una velocidad v (fig. 14.7). ¿Cuánto tiempo permanecerá el cuerpo unido a la cubierta? Justo antes del lanzamiento, el momento lineal del cuerpo es igual a Mv . Durante el lanzamiento, este se hará cero debido al impulso de la fuerza de reacción de la cubierta. El impulso será, por tanto, también igual a Mv . Dado que el impulso al acercarse el cuerpo hasta una distancia h es igual al impulso de separación desde la distancia h , (siempre y cuando la cavitación en el fluido pueda despreciarse), el impulso de la gravedad Mgt ha de ser igual a Mv hasta el momento en que se produce el «desprendimiento» de la placa. De aquí se obtiene que $t = v/g$, lo cual es válido solo para el caso de fluidos newtonianos.

De la expresión (14.33) se deduce que la adherencia viscosa con fluidos newtonianos no puede emplearse para llegar a la cubierta. Algo diferente sucede cuando la viscosidad del fluido depende del gradiente de velocidades. Como se puede deducir de la ecuación (14.33), el impulso de la fuerza durante el acercamiento hasta alcanzar un espesor de capa h (o lo que es lo mismo, durante la separación de los cuerpos a partir de una distancia de separación h),

es proporcional a la viscosidad. Para fluidos viscosos no lineales, la viscosidad depende de la velocidad (en general, esta disminuye al aumentar la velocidad de cizalla). Si primero se acercan las placas muy rápidamente y después se separan lentamente, el impulso de la fuerza, positivo en el acercamiento, es menor que el impulso negativo en la separación. Esta diferencia puede emplearse para conseguir que un cuerpo que se mueva de tal forma, permanezca unido a la cubierta.

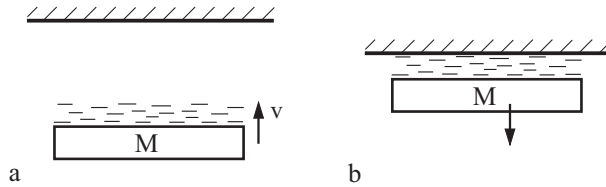


Fig. 14.7 Una placa recubierta de una capa de fluido que se lanza contra una cubierta, se mantendrá adherida a esta durante un período de tiempo.

14.4 REOLOGÍA DE LOS LUBRICANTES

Hasta ahora se ha supuesto que el lubricante es un fluido viscoso con comportamiento lineal (newtoniano). Esto significa que la viscosidad es constante, y por tanto, que esta no depende ni del gradiente de velocidades ni de la presión. Sin embargo, en la práctica se buscan a menudo desviaciones al comportamiento lineal en fluidos viscosos, y para ello se incorporan aditivos especiales. En esta sección, se discutirán de manera cualitativa las desviaciones más importantes al comportamiento lineal de fluidos viscosos.

En la escala espacial correspondiente a varios diámetros atómicos y en la escala temporal comprendida entre 10^{-13} y 10^{-10} s, un fluido se representa como un cuerpo amorfo en el que cada molécula se encuentra oscilando en un mínimo de energía potencial creado por la molécula vecina, y solo muy raramente abandona su posición por efecto de las fluctuaciones térmicas. Estos saltos, de naturaleza microscópica y tan poco frecuentes, son, no obstante, la causa física del flujo de líquidos bajo la acción de esfuerzos cortantes o tensiones de cizalla. Si el esfuerzo cortante en el medio es cero, entonces cada molécula puede saltar de mínimo a mínimo en cualquier dirección con la misma probabilidad P , la cual viene dada por el factor de Boltzmann

$$P \propto e^{-\frac{U_0}{kT}}, \quad (14.34)$$

donde U_0 es la energía de activación, T es la temperatura absoluta y k es la constante de Boltzmann. En ausencia de esfuerzos macroscópicos, no se produce movimiento de fluido a esa escala. Si por el contrario, se le aplica al medio un esfuerzo cortante τ , la altura de las barreras de potencial cambia según las

moléculas salten «hacia la derecha» ($U_r = U_0 - \tau V_0$) o «hacia la izquierda» ($U_l = U_0 + \tau V_0$). V_0 es el llamado volumen de activación. La energía de activación, U_0 , varía además con la presión en el fluido p . En general, la energía de activación aumenta con la presión de la forma $U_0 = E_0 + pV_1$, donde V_1 es una constante adicional con dimensiones de volumen. Las energías de activación para el movimiento molecular en direcciones opuestas, pueden escribirse así

$$\begin{aligned} U_r &= E_0 + pV_1 - \tau V_0 \\ U_l &= E_0 + pV_1 + \tau V_0. \end{aligned} \quad (14.35)$$

Ambos volúmenes de activación, V_0 y V_1 , tienen el mismo orden de magnitud que el correspondiente a un volumen molecular o atómico, a^3 , donde a es el radio molecular o atómico. La velocidad a la que se produce la deformación macroscópica a cizalla, es proporcional a la diferencia entre los flujos moleculares en las direcciones opuestas:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = \text{const} \left\{ e^{-\frac{E_0 + pV_1 - \tau V_0}{kT}} - e^{-\frac{E_0 + pV_1 + \tau V_0}{kT}} \right\} = C \cdot e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \cdot \sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right). \quad (14.36)$$

Esta ecuación expresa de forma compacta la desviación común más importante en la Reología de Fluidos a partir de las propiedades de un fluido newtoniano. Los siguientes casos límite permiten considerar separadamente las propiedades de la expresión (14.36):

I. Si el esfuerzo es muy pequeño, $\frac{\tau V_0}{kT} \ll 1$, el término $\sinh\left(\frac{\tau V_0}{kT}\right)$ se puede sustituir por $\frac{\tau V_0}{kT}$, prescindiendo de los términos de orden superior. Para la velocidad a la que se produce la deformación a cizalla, se obtiene

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = C \cdot e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}} \cdot \frac{\tau V_0}{kT}. \quad (14.37)$$

Esta expresión indica que el gradiente de velocidades es proporcional al esfuerzo cortante. El coeficiente de proporcionalidad no es otro que la viscosidad dinámica del medio:

$$\eta = \frac{kT}{CV_0} e^{-\frac{E_0 + pV_1}{kT}}. \quad (14.38)$$

Bajo la condición $kT \ll E_0$, válida a temperatura ambiente, la viscosidad disminuye rápidamente y de forma exponencial con la temperatura. En este sentido, es típico observar una disminución en la viscosidad de aproximadamente dos órdenes de magnitud tras un aumento de temperatura de 30°C . Asimismo, la viscosidad depende de forma exponencial con la presión. El coeficiente $\alpha = V_1 / kT$ que caracteriza la dependencia de la viscosidad con la presión, $\eta \propto e^{\alpha p}$, se denomina *índice de presión*. A temperatura ambiente, el índice de presión tiene un valor $\alpha \sim 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$.

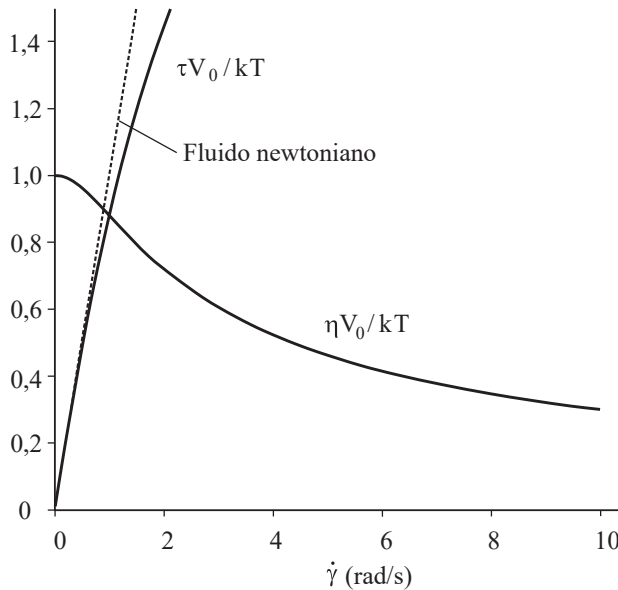


Fig. 14.8 Esfuerzo cortante en función de la velocidad de la deformación cortante (gradiente de velocidades) según la expresión (14.36), y de la viscosidad definida como $\tau / \dot{\gamma}$. La viscosidad disminuye con la velocidad de deformación.

II. En términos generales, la expresión (14.36) no es lineal. La velocidad de deformación aumenta con el esfuerzo cortante más rápidamente de lo que lo haría si el comportamiento fuese puramente lineal. Esto significa que la viscosidad es menor a esfuerzos grandes o a gradientes de velocidad altos (fig. 14.8).

14.5 LUBRICACIÓN DE CAPA LÍMITE

Si el espesor de la capa de lubricante es equiparable a la rugosidad de la superficie, el sistema entra en el régimen de la *fricción mixta*, en el que, en ciertas regiones,

las superficies se encuentran, como antes, separadas por una capa de fluido, mientras que en otras, las micro-rugosidades de las mismas entran en contacto directo. En estas últimas, las superficies pueden deformarse plásticamente y entrar en estrecho contacto a escala atómica. Hardy (1919-1922) fue el primero en constatar que, bajo estas condiciones, la lubricación con grasas protege mejor las superficies que la lubricación con aceites fluidos. Hardy mostró que basta una capa de grasa de espesor monomolecular para disminuir drásticamente tanto la fricción como el desgaste. Hardy también reconoció con acierto que la capa límite se agarra a la superficie de metales. El rozamiento bajo condiciones en las que la superficie se caracteriza por una capa muy fina y firmemente unida a la superficie del metal, se denomina *rozamiento de capa límite*. Según Hardy, tanto el coeficiente de fricción como el desgaste disminuyen cuanto mayor es el peso molecular de la grasa. Para aumentar la efectividad de la capa límite, es importante que los ácidos grasos formen con la superficie del metal un *jabón metálico*. El mecanismo de protección por lubricación de capa límite es, según Bowden y Tabor, parecido al que se da en capas finas de metales (véase capítulo 10). En particular, las capas mantienen su efecto hasta alcanzar la temperatura de fusión o reblandecimiento del jabón metálico formado en las superficies.

La diferencia más importante entre una grasa y un aceite lubricantes, radica en que los aceites lubricantes son líquidos, mientras que las grasas y los jabones metálicos son sólidos con un esfuerzo de fluencia pequeño pero finito. Un aceite puede, por tanto, extraerse completamente de los puntos de contacto por compresión, mientras que una capa plástica no. Por consiguiente, al presionar entre sí dos placas circulares (de radio R) separadas por un lubricante sólido caracterizado por un esfuerzo de fluencia τ_0 , siempre queda entre medias una película de espesor dado por³

$$h = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{F}. \quad (14.39)$$

14.6 ELASTO-HIDRODINÁMICA

En contactos lubricados sometidos a grandes esfuerzos, como en rodamientos, ruedas dentadas y árboles de levas, las superficies de los materiales en contacto se deforman de manera elástica. La dinámica de lubricantes que tiene en cuenta las deformaciones elásticas se denomina *Elasto-hidrodinámica*, y fue resuelta en lo esencial por A. Ertel en 1945. En esta sección se tratarán los aspectos más importantes de la lubricación elasto-hidrodinámica dentro de la aproximación de Ertel⁴.

3. Véase el problema 7 en este capítulo.

4. Se sigue la solución de A. Ertel en la forma presentada en la siguiente publicación: E. Popova, V.L. Popov. 'On the history of elasto-hydrodynamics: The dramatic destiny of Alexander Mohrenstein-Ertel and his contribution to the theory and practice of lubrication'. *ZAMM: J. Appl. Math. Mech.*, **95**(7), 652-663 (2015). 10.1002/zamm.201400050

Se va a considerar un perfil elástico y cilíndrico, $z = x^2 / (2R)$, el cual se desplaza horizontalmente con la velocidad v en el sentido del eje negativo de x . La ecuación (14.10) adquiere en este caso la forma siguiente:

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta v \frac{h(x) - h_0}{h(x)^3}, \quad (14.40)$$

h_0 es el espesor del lubricante en el punto donde la presión alcanza su valor máximo: $dp / dx = 0$. En contactos lubricados sometidos a grandes esfuerzos, las presiones en la región de contacto pueden ser tan altas, que ha de tenerse en cuenta entonces la dependencia de la viscosidad con la presión (expresión (14.38)), la cual se escribe aquí en la forma

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p}. \quad (14.41)$$

La ecuación de Reynolds (14.40) adquiere ahora la forma siguiente

$$e^{-\alpha p} \frac{dp}{dx} = 6\eta_0 v \frac{h(x) - h_0}{h(x)^3}. \quad (14.42)$$

En esta expresión se introduce la «presión efectiva»,

$$\Pi = \frac{1 - e^{-\alpha p}}{\alpha}, \quad (14.43)$$

de forma que la ecuación (14.42) se pueda escribir de la forma

$$\frac{d\Pi}{dx} = 6\eta_0 v \frac{h(x) - h_0}{h(x)^3}, \quad (14.44)$$

la cual coincide formalmente con la ecuación (14.40), salvo que en este caso se sustituye la presión p por la «presión efectiva» Π . Si la presión en la región de contacto es muy alta, la presión efectiva según la definición (14.43) es constante en casi toda la región de contacto e igual a $\Pi = 1 / \alpha$. De la expresión (14.44) se deduce que, en esta zona de la región de contacto, el espesor de la capa de lubricante es prácticamente constante e igual a h_0 . Por consiguiente, la distribución de presiones corresponde, en primera aproximación, a la dada por Hertz.

El espesor de la capa h_0 se determina por los procesos que tienen lugar en el borde de entrada al contacto, donde se puede considerar que las superficies no se han deformado aún y vienen dadas por la solución hertziana⁵:

$$\delta = \frac{P}{\pi E^*} \hat{h} \quad (14.45)$$

donde

$$\hat{h} = \left[2\xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \right] \quad (14.46)$$

es la magnitud adimensional del espacio intersticial, y $\xi = |x|/a$ la coordenada x normalizada y definida desde el centro del contacto hasta la mitad de su anchura,

$$a = 2 \sqrt{\frac{PR}{\pi E^*}}. \quad (14.47)$$

Aquí se ha introducido la magnitud P , que es igual a la fuerza normal dividida por la longitud del contacto en la dirección transversal, L : $P = F / L$. En la entrada al contacto, la expresión (14.44) adquiere la siguiente forma

$$\frac{d\Pi}{dx} = 6\eta_0 v \frac{\delta(x)}{(\delta(x) + h_0)^3}. \quad (14.48)$$

Integrando en x desde $-\infty$ a $-a$, da como resultado

$$\Pi(-a) = \frac{1}{\alpha} = 6\eta_0 v \int_{-\infty}^{-a} \frac{\delta(x)}{(\delta(x) + h_0)^3} dx = \frac{6\eta_0 v a \pi^2 E^{*2}}{P^2} \Sigma, \quad (14.49)$$

en donde se ha incluido la siguiente notación

$$\Sigma = \int_1^{\infty} \frac{\hat{h}(\xi)}{(\hat{h}(\xi) + \hat{h}_0)^3} d\xi, \quad \hat{h}_0 = \frac{\pi E^*}{P} h_0. \quad (14.50)$$

Como se puede deducir de la fig. 14.9, esta función puede aproximarse muy bien por la siguiente expresión

5. K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).

$$\Sigma \approx 0,0986 \cdot \hat{h}_0^{-1,375}. \quad (14.51)$$

Sustituyendo en (14.49) y resolviendo la ecuación para h_0 , resulta en

$$h_0 = 1,25 \cdot \alpha^{0,727} (\eta_0 \nu)^{0,727} R^{0,364} E^{*0,091} p^{-0,091}. \quad (14.52)$$

El resultado de Ertel es muy cercano a la solución numérica que Hamrock y Dowson dieron a conocer posteriormente⁶:

$$h_0 = 3,06 \cdot \alpha^{0,56} (\eta_0 \nu)^{0,69} R^{0,41} E^{*0,03} p^{-0,1}. \quad (14.53)$$

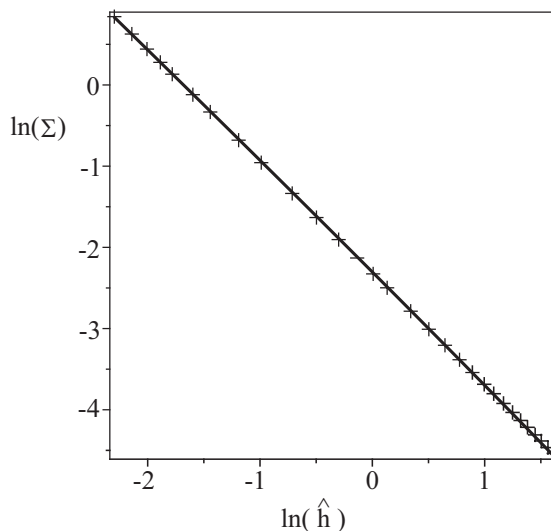


Fig. 14.9 Comparación de la función dada por la expresión (línea continua) con la aproximación dada por la expresión (14.51) (cruces).

A la salida del contacto, el gradiente de presiones es negativo, por lo que el espesor de la capa comienza a disminuir según la expresión (14.44), llegando a ser menor que h_0 .

Para finalizar, se discute brevemente la distribución de presiones a la salida del contacto. Según Ertel, la capa de lubricante se puede considerar prácticamente incompresible en la región de contacto de alta presión, y ligeramente compresible fuera de la misma. Esto implica que la distribución de presiones en las proximidades de la salida del contacto puede expresarse como superposición de una distribución de presiones hertziana y una singular dada por un indentador cilíndrico plano y rígido:

6. B.J. Hamrock, D. Dowson. *Ball Bearing Lubrication*. Wiley, New York (1981).

$$p(x) = c_1 \left(1 - x^2 / a'^2\right)^{1/2} + c_2 \left(1 - x^2 / a'^2\right)^{-1/2} \quad (14.54)$$

con $a' < a$. Esta distribución se ilustra en la fig. 14.10.

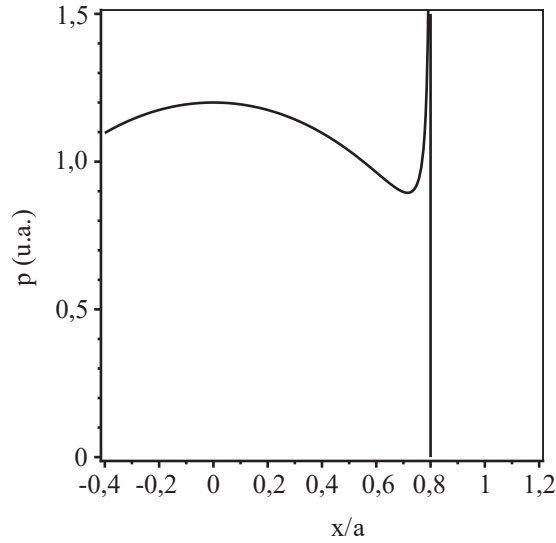


Fig. 14.10 Representación gráfica de la distribución de presiones a la salida de un contacto lubricado elasto-hidrodinámicamente.

14.7 LUBRICANTES SÓLIDOS

Existen determinadas condiciones bajo las que no se puede disminuir el rozamiento y el desgaste con lubricantes líquidos. Tal es el caso de muchas aplicaciones en la Astronáutica, donde los sistemas tribológicos han de operar en vacío o a altas temperaturas de manera efectiva. En estos casos, se pueden emplear lubricantes sólidos.

Los precursores de los actuales lubricantes sólidos, como el plomo, el grafito y la molibdenita (MoS_2), se conocen desde tiempo inmemorial. Todas estas sustancias tienen color similar, del azul grisáceo al negro, y se aplican y extienden fácilmente. Hasta el siglo XVIII, prácticamente no se distinguían las unas de las otras. El plomo se solía confundir con el grafito y la molibdenita. Incluso el término «molibdenita» proviene del griego Μόλυβδος, que significa plomo. En Inglaterra se denominaba al grafito «plumbago», término que, de nuevo, hace referencia al plomo.

Tras el desarrollo de métodos de producción de sustancias de alta pureza, se extendió aún más el uso del grafito y la molibdenita como lubricantes sólidos, y

a partir de finales del siglo XIX, especialmente a finales de la década de los años treinta del siglo XX, se empezaron a emplear con éxito en forma de suspensiones.

Las propiedades más importantes de un lubricante son su alta adherencia a las superficies a lubricar y su alta deformabilidad. Esta última está determinada por varios factores, aparte de su estructura laminar, como la del grafito y la molibdenita. Así, el grafito solo exhibe su buena lubricidad en presencia de trazas de agua u oxígeno, mientras que pierde esta propiedad en vacío. Por el contrario, la lubricidad de la molibdenita mejora en condiciones «de sequedad».

En general, las sustancias que hoy en día se utilizan como lubricantes sólidos en la industria, tienen una estructura laminar parecida a la del grafito y la molibdenita. El mecanismo de lubricación en lubricantes sólidos es parecido al de la lubricación de capa límite.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Calcular la fuerza de rozamiento entre una superficie ondulada con un perfil periódico de la forma $a \cos kx$, y una superficie plana, las cuales están separadas por una capa de fluido. Se supone que en la capa lubricante no tiene lugar cavitación.

Resolución: Sea $h = h(x)$ la distancia entre las dos superficies, donde se supone además que la derivada h' es muy pequeña. El espacio intersticial entre los dos cuerpos está lleno de lubricante, caracterizado por una viscosidad η . El perfil de velocidades de un flujo en un espacio estrecho entre superficies paralelas tiene la siguiente forma (14.7):

$$v = p' \cdot \frac{z(z-h)}{2\eta} + \frac{v_0}{h}(z-h)$$

con el gradiente de presiones dado por la expresión (14.10)

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v_0 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C}{h^3} \right).$$

Integrando sobre una oscilación Λ , resulta en

$$p(\Lambda) - p(0) = -6\eta v_0 \int_0^\Lambda \left(\frac{1}{h(x)^2} - \frac{C}{h(x)^3} \right) dx = 0.$$

Esta integral se iguala a cero dado que, en un sistema caracterizado por la periodicidad Λ , se puede esperar que la distribución de presiones sea también una función periódica caracterizada por la misma magnitud. De ahí, se obtiene para la constante C

$$C = \frac{\int_0^{\Lambda} \frac{dx}{h(x)^2}}{\int_0^{\Lambda} \frac{dx}{h(x)^3}}.$$

El esfuerzo cortante en el plano de fluido adyacente a la superficie inferior es igual a

$$\tau = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{p'h}{2} + \frac{\eta v_0}{h} = \eta v_0 \left(\frac{4}{h} - \frac{3C}{h^2} \right).$$

Para el esfuerzo tangencial a lo largo de una oscilación, el cual se percibe como esfuerzo macroscópico de fricción τ_R , se tiene que

$$\tau_R = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \tau dx = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \left(\frac{4}{h(x)} - \frac{3C}{h(x)^2} \right) dx,$$

o, tras sustituir C por su expresión

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{\Lambda} \left(4 \int_0^{\Lambda} \frac{dx}{h(x)} - 3 \left(\int_0^{\Lambda} \frac{dx}{h(x)^3} \right)^{-1} \left(\int_0^{\Lambda} \frac{dx}{h(x)^2} \right)^2 \right).$$

Cuando el espacio intersticial es de anchura constante, esta ecuación adquiere de nuevo la forma elemental $\tau_R = \eta v_0 / h$. A continuación, se va a suponer que la superficie ondulante viene dada por la ecuación

$$h(x) = h_0 + a(1 - \cos(kx)),$$

de forma que la separación mínima es h_0 , la amplitud de la ondulación es a , y el número de onda es $k = 2\pi / \Lambda$. En este caso, se llega a que

$$\tau_R = \frac{\eta v_0}{h_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 2a/h_0}} \frac{h_0^2 + 2h_0a + 3a^2}{h_0^2 + 2h_0a + \frac{3}{2}a^2}.$$

En el caso límite de $h_0 \ll a$, se cumple la siguiente aproximación

$$\tau_R \approx \sqrt{2} \frac{\eta v_0}{\sqrt{ah_0}}.$$

Problema 2: Calcular la fuerza entre un plano y una esfera que se acerca a dicho plano. La distancia entre la esfera y el plano ha de ser mucho más pequeña que el radio R de la esfera.

Resolución: En este caso se trata de un flujo de fluido expulsado bajo la acción de un gradiente de presión. Para dicho gradiente, es válida la ecuación (14.25)

$$p' = \frac{6\eta r \dot{h}}{h^3} .$$

En este caso, el perfil de distancias de separación se calcula mediante la siguiente expresión

$$h \approx h_0 + r^2 / 2R .$$

Integrando el gradiente de presiones con respecto a la coordenada r , da como resultado

$$p = p_{ext} - \int_r^\infty 6\eta \dot{h} \frac{r dr}{(h_0 + r^2 / 2R)^3} = p_{ext} - \frac{3\eta R \dot{h}}{(h_0 + r^2 / 2R)^2}$$

(La integral converge en el límite superior, de ahí que se sustituya por ∞). La fuerza que actúa sobre la esfera es, por tanto, igual a

$$F_N = \int_0^\infty 2\pi r (p(r) - p_{ext}) dr = -\frac{6\pi\eta R^2 \dot{h}}{h_0} .$$

Problema 3: Un perfil cilíndrico de la forma $z = x^2 / (2R)$ situado a una distancia h_{min} de un plano rígido, se desplaza a lo largo del mismo a la velocidad v , en el sentido del eje x negativo. Determinar la distribución de presiones en el espacio intersticial lleno de lubricante, las fuerzas normal y tangencial, así como el coeficiente de fricción, teniendo en cuenta que existe cavitación.

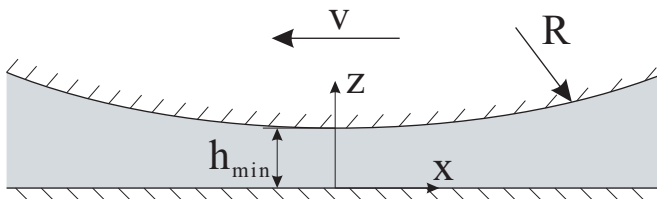


Fig. 14.11 Lubricación hidrodinámica entre un cuerpo de perfil cilíndrico y un plano rígido.

*Resolución*⁷: En este caso, la ecuación (14.10) adopta la siguiente forma:

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta v \frac{h(x) - h_0}{h(x)^3},$$

donde h_0 es el espesor de la capa de lubricante en el punto donde la presión alcanza su valor máximo $dp/dx = 0$. La anchura del espacio intersticial en cada punto viene dada por

$$h = h_{\min} + \frac{x^2}{2R}.$$

Ambas ecuaciones pueden expresarse en función de las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{x} = x / \sqrt{2Rh_{\min}}, \quad \tilde{h} = h / h_{\min}, \quad \tilde{p} = p \cdot \frac{h_{\min}^2}{3\eta v \sqrt{2Rh_{\min}}},$$

dando lugar a las siguientes expresiones:

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} = 2 \frac{\tilde{h} - \tilde{h}_0}{\tilde{h}^3},$$

$$\tilde{h} = 1 + \tilde{x}^2.$$

Integrando la primera ecuación, resulta en

$$\tilde{p} = \frac{\pi}{2} + \arctan \tilde{x} + \frac{\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2} - \frac{3}{4} \tilde{h}_0 \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \tilde{x} + \frac{\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{x}}{(1 + \tilde{x}^2)^2} \right] + \tilde{p}_0,$$

donde \tilde{p}_0 es la presión externa adimensional cuando $x \rightarrow -\infty$, la cual se supone igual a cero en lo sucesivo. La distribución de presiones para distintos valores de \tilde{h}_0 se muestra gráficamente en la fig. 14.12.

7. También en este caso, se va a seguir la solución de A. Ertel tal y como viene formulada en la siguiente publicación: E. Popova, V.L. Popov. 'On the history of elastohydrodynamics: The dramatic destiny of Alexander Mohrenstein-Ertel and his contribution to the theory and practice of lubrication', *ZAMM: J. Appl. Math. Mech.*, **95**(7), 652-663 (2015). 10.1002/zamm.201400050

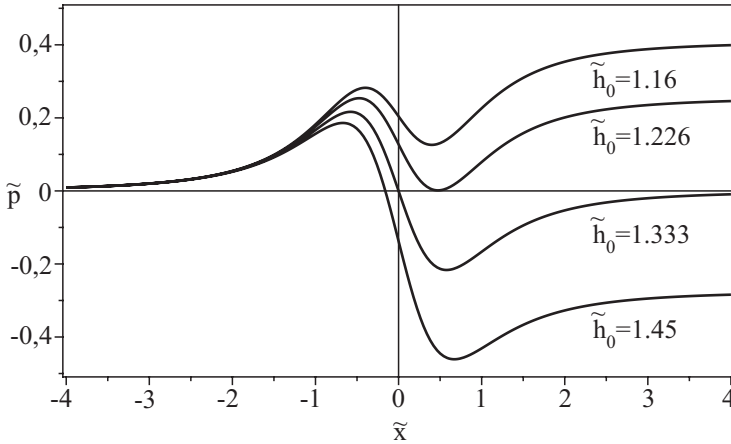


Fig. 14.12 Representación en coordenadas normalizadas de la distribución de presiones en un intersticio lleno de lubricante.

A continuación, se va a suponer que el fluido no puede soportar *presiones negativas*⁸, lo cual implica que las curvas de la fig. 14.12 son válidas en la región de presión positiva hasta que la presión alcanza el valor cero (más allá la presión continúa siendo cero). Sin embargo, dicha condición no determina, por sí sola y de manera unívoca, la constante de integración. Para ello se requiere además que el gradiente de presiones desaparezca en el punto de cavitación, lo cual garantiza la estabilidad de la línea de separación. En la fig. 14.12 se puede observar que la curva con $\tilde{h}_0 = 1,226$ es la única que cumple dicha condición. La fuerza normal por unidad de longitud del cilindro, \tilde{f}_N , se obtiene integrando la distribución de presiones hasta el punto de cavitación y es igual a $\tilde{f}_N = 0,408$. En términos de variables dimensionales, se tiene que

$$f_N = 2,447 \frac{\eta v R}{h_{\min}}$$

Integrando el esfuerzo tangencial se obtiene la fuerza tangencial por unidad de longitud, q ,

$$q = 5,149 \eta v \sqrt{\frac{R}{h_{\min}}}$$

Y para el coeficiente de fricción, se obtiene la siguiente expresión

8. Cuando la presión es menor que la presión de vapor o presión de saturación, los fluidos se vuelven termodinámicamente inestables y comienzan a «ebullir» (cavitar). Dado que la presión de vapor de los aceites lubricantes es muy baja, se puede asumir que esta es prácticamente cero.

$$\mu \approx 2\sqrt{\frac{h_{\min}}{R}} \approx 3\sqrt{\frac{\eta v}{f_N}},$$

la cual coincide, salvo en una constante, con la ecuación (14.21), y a la vez ilustra lo robusta que es dicha expresión.

Problema 4: Determinar, en un cojinete de deslizamiento en forma de escalón (cojinete de escalón de Rayleigh, fig. 14.13), la distribución de presiones en el espacio intersticial lleno de lubricante, las fuerzas normal y tangencial, y el coeficiente de fricción. Se asume que la presión externa es despreciable.

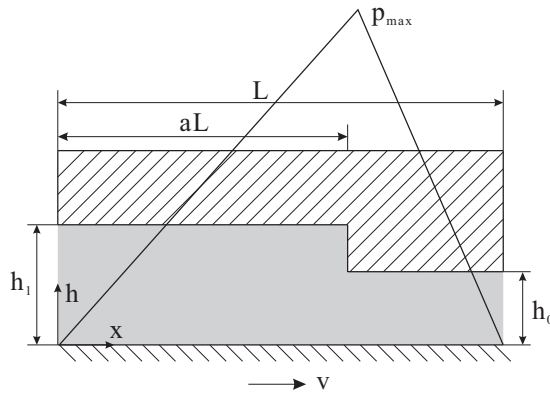


Fig. 14.13 Cojinete de Rayleigh. Un perfil en forma de escalón se desplaza con respecto a un soporte plano a la velocidad v . La figura muestra los parámetros geométricos del problema, así como la distribución de presiones.

Resolución: En este caso, el espesor de la capa de lubricante es constante en las regiones definidas por $x \in [0, aL]$ y $[aL, L]$, por lo que en ellas, la ecuación (14.11) adquiere la forma sencilla $d^2 p / dx^2 = 0$. Por consiguiente, la presión en sendas regiones es una función continua de la coordenada x : $p(x) = C_1 x + C_2$, donde los coeficientes a izquierda y derecha del escalón, C_1 y C_2 , son cero. Dado que la presión en los bordes exteriores del espacio intersticial es cero, es evidente que la presión ha de aumentar primero de forma lineal desde el borde anterior del cojinete, alcanzar un máximo en la posición del escalón, y disminuir linealmente hasta llegar a cero en el borde posterior, tal y como muestra la fig. 14.13:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{P_{\max}}{aL} \cdot x, & x \leq aL \\ -\frac{P_{\max}}{L - aL} \cdot (x - L), & x \geq aL \end{cases}$$

Para calcular el valor de p_{\max} , se ha de definir la ecuación de continuidad: El caudal q , dado por la expresión (14.19) (con la velocidad cambiada de signo),

$$q = -\frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{vh}{2}, \text{ ha de ser igual a la derecha e izquierda del escalón:}$$

$$-\frac{h_1^3}{12\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \Big|_{x=aL-} + \frac{vh_1}{2} = -\frac{h_0^3}{12\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \Big|_{x=aL+} + \frac{vh_0}{2}.$$

Introduciendo las siguientes expresiones para el gradiente de presión a derecha e izquierda del escalón

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{x=aL-} = \frac{p_{\max}}{aL}, \quad \frac{dp}{dx} \Big|_{x=aL+} = -\frac{p_{\max}}{L-aL}$$

y la notación $m = h_1 / h_0 - 1$, se obtiene, resolviendo la ecuación para p_{\max} ,

$$p_{\max} = \frac{6v\eta L}{h_0^2} \cdot \frac{a(1-a)m}{a+(1-a)(1+m)^3}.$$

La fuerza normal F_N se determina integrando la presión

$$F_N = \int_0^L p(x)dx = \frac{3v\eta L^2}{h_0^2} \cdot \frac{a(1-a)m}{a+(1-a)(1+m)^3} = \frac{p_{\max} L}{2},$$

y la fuerza tangencial F_x , integrando el esfuerzo viscoso

$$F_x = \int_0^L \tau dx = \int_0^L \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \eta \frac{v}{h} \right) dx = \frac{p_{\max} h_0}{2} m + \frac{\eta v L}{h_0} \cdot \left(\frac{a}{1+m} + 1 - a \right).$$

Para el coeficiente de fricción μ se obtiene la siguiente expresión

$$\mu = \frac{F_x}{F_N} = \frac{h_0}{L} \left[m + \frac{1}{3m} \left(\frac{a}{1+m} + 1 - a \right) \left(\frac{1}{1-a} + \frac{(1+m)^3}{a} \right) \right].$$

Este alcanza su mínimo valor, $\mu = 4h_0 / L$, cuando $m = 1$ y $a = 0,8$.

Problema 5: Cojinete de Mohrenstein. Determinar el coeficiente de fricción en un cojinete con una superficie de deslizamiento elástica, donde la distribución de presiones en la abertura lubricada viene dada de antemano mediante pretensado, como se muestra esquemáticamente en la fig. 14.14.

Resolución: Se va a considerar un perfil elástico, el cual se desplaza a la largo de un plano rígido en el sentido del eje x positivo con una velocidad v . Para este problema elasto-hidrodinámico, es válida la ecuación (14.40):

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta v \frac{h(x) - h_0}{h(x)^3}.$$

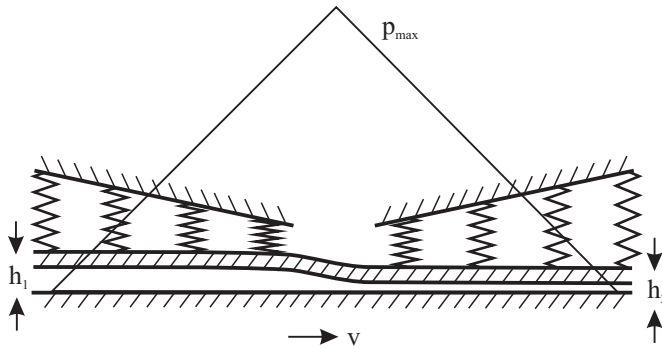


Fig. 14.14 Esquema del cojinete de Mohrenstein. La gráfica reproduce la mostrada en la fig. 6 de la patente⁹.

Si la presión generada por el pretensado puede expresarse como una distribución equivalente de muelles, y además se puede asumir que pequeños cambios en el espacio lubricado no alteran los esfuerzos elásticos y, por consiguiente, la distribución de presiones en la región de contacto, esta última puede considerarse como una función conocida de las coordenadas en la igualdad de Reynolds. En este caso, el espacio intersticial es la incógnita a determinar en la ecuación de Reynolds. Si durante el proceso de fabricación del cojinete, se genera una distribución de presión tal que aumenta linealmente desde un extremo de la capa al punto medio y, a partir del mismo disminuye también de manera lineal (véase la fig. 14.14), el gradiente de presión a la izquierda y derecha del punto medio es constante e igual a ∇p . Esto genera, a la izquierda y a la derecha del punto medio, un espesor de capa lubricante constante e igual a h_1 y h_2 , respectivamente. Dichos espesores vienen determinados por las ecuaciones

$$\nabla p = 6\eta v \frac{h_1 - h_0}{h_1^3} \quad \text{y} \quad -\nabla p = 6\eta v \frac{h_2 - h_0}{h_2^3}.$$

9. A. von Mohrenstein, US patent 2,738,241. Hydrodynamic bearing. Patente solicitada el 16 de julio de 1952 y concedida el 13 de marzo de 1956.

De la primera expresión se puede derivar que el gradiente de presión alcanza el valor máximo $\nabla p_{\max} = \frac{8 \eta v}{9 h_0^2}$ cuando $h_1 = \frac{3}{2} h_0$. Sustituyendo el gradiente máximo de presión en la segunda igualdad y resolviendo para h_2 se obtiene $h_2 = 0,894 h_0 = 0,596 h_1$, es decir que el espesor de la capa de lubricante en la región de flujo saliente (borde de salida del contacto) es aproximadamente igual a la mitad del espesor de la capa en la región de flujo entrante (borde de entrada al contacto). A diferencia del cojinete de escalón de Rayleigh, el de Mohrenstein es simétrico, ya que funciona de la misma manera independientemente de la dirección del movimiento. Los espesores de capa se establecen de manera automática, en función de la dirección de desplazamiento. El coeficiente de fricción en el cojinete de Mohrestein coincide con el del cojinete de Rayleigh (véase el problema 4) cuando $a = 0,5$ y $m = 0,678$, y es igual a $\mu_0 = 5,17 h_2 / L$, donde L es la longitud total del cojinete.

Problema 6: Un eje de transmisión, o cigüeñal, de radio r gira en un cojinete cilíndrico a velocidad angular constante e igual a ω (fig. 14.15). El cilindro externo, de radio $R = r + a$, permanece inmóvil. La longitud del cojinete es igual a L y el espacio intersticial está relleno de un fluido de viscosidad η . En general, el eje de transmisión se mantiene excéntrico con respecto al cojinete, debido a que este soporta carga. Suponiendo que $a \ll r$ y que no hay cavitación, determinar el par de fricción, la fuerza que actúa sobre el eje de transmisión y el coeficiente de fricción.

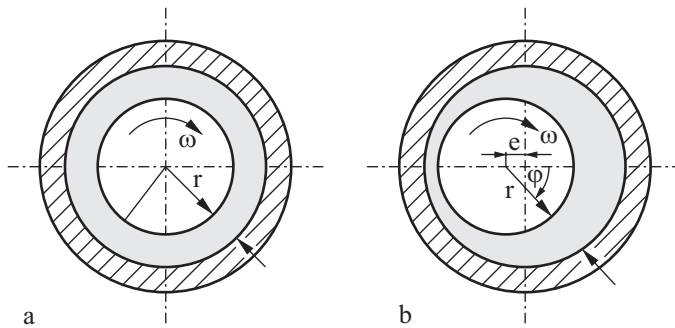


Fig. 14.15 Cojinete hidrodinámico: (a) sin carga, (b) con carga.

Resolución: Suponiendo que $a \ll r$, el flujo entre el cojinete y el eje de transmisión puede considerarse laminar. En este caso, la velocidad tiene una componente tangencial v_ϕ y la presión p depende tan solo del ángulo. Para el perfil del flujo, es válida la ecuación (14.8), que en este caso tiene la siguiente forma

$$v_\varphi = \frac{dp}{r d\varphi} \cdot \frac{\tilde{z}(\tilde{z} - h(\varphi))}{2\eta} + \frac{\omega r}{h(\varphi)} (h(\varphi) - \tilde{z})$$

donde

$$h(\varphi) \approx a + e \cos \varphi .$$

La distribución de presiones viene dada por

$$p(\varphi) - p(0) = +6\eta\omega r^2 \int_0^\varphi \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi$$

donde

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)^3}}$$

(véanse las expresiones completamente análogas del problema 1). La distribución $p(\varphi)$ es una función impar del ángulo φ , por lo que la componente horizontal de la fuerza $F_x = Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi$ es nula. La componente vertical de la fuerza se calcula mediante la expresión¹⁰

$$F_z = Lr \int_0^{2\pi} p(\varphi) \sin \varphi d\varphi = -Lr^3 6\eta\omega \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) \left(\frac{1}{h(\varphi)^2} - \frac{C}{h(\varphi)^3} \right) d\varphi = \frac{12\pi e L r^3 \eta \omega}{(2a^2 + e^2) \sqrt{a^2 - e^2}} .$$

También puede obtenerse el esfuerzo tangencial de manera análoga a la descrita en el problema 1, mediante la expresión

$$\tau = -\eta\omega r \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right) .$$

Para el par de fuerza se obtiene la siguiente expresión

$$M = Lr^2 \int_0^{2\pi} \tau(\varphi) d\varphi = -L\eta\omega r^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{h(\varphi)} - \frac{3C}{h(\varphi)^2} \right) d\varphi = -\frac{4\pi\eta\omega r^3 L (a^2 + 2e^2)}{\sqrt{a^2 - e^2} (2a^2 + e^2)} .$$

Y para el cociente $\mu = |M| / rF_z$, que en este caso determina el coeficiente de fricción, se obtiene lo siguiente

10. En realidad, el esfuerzo viscoso también contribuye a la fuerza vertical. No obstante, se puede demostrar que, bajo los supuestos planteados, dicha contribución es pequeña y, por tanto, despreciable.

$$\mu = \frac{(a^2 + 2e^2)}{3er}.$$

A cargas altas, o cuando $e \rightarrow a$, el coeficiente de fricción alcanza el valor límite

$$\mu = \frac{a}{r}.$$

Problema 7: a) Determinar la distribución de velocidades y la distribución de presiones en un flujo de expulsión de fluido entre dos placas circulares. El fluido es viscoso y tiene un comportamiento no lineal. Se asume que se cumple la siguiente condición reológica

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n,$$

donde γ es la deformación a cizalla o a cortadura, $\dot{\gamma}_0$ es la velocidad de cortadura característica, n es un número entero impar y τ_0 es el esfuerzo característico (en el caso límite dado por $n \rightarrow \infty$, este se identifica con el esfuerzo de fluencia).

b) Determinar el espesor residual de la capa lubricante en el caso de un flujo plástico ideal ($n \rightarrow \infty$).

Resolución: (a) Como origen de coordenadas se elige el punto medio de la capa, y el eje z perpendicular a la misma (fig. 14.16). La presión no depende de z .

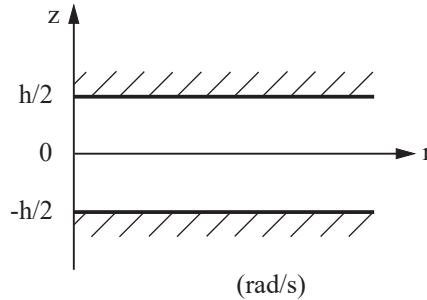


Fig. 14.16 Sistema de coordenadas relevantes en el cálculo del flujo de expulsión de un fluido entre dos placas circulares

Debido a la simetría axial del problema, solo se ha de tener en cuenta la componente r de la ecuación de equilibrio:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Integrando una vez sobre z resulta en

$$\tau = C_1 + p'z ,$$

y sustituyendo en la condición reológica, se obtiene el siguiente perfil de flujo

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{C_1 + p'z}{\tau_0} \right)^n .$$

La constante C_1 debe ser cero dado que, por la simetría del problema, se cumple la condición $\dot{\gamma}(z=0) = 0$; en este caso, la ecuación se puede escribir de la forma siguiente

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{p'z}{\tau_0} \right)^n$$

Integrando, se obtiene la siguiente expresión

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0}{n+1} \left(\frac{p'z}{\tau_0} \right)^{n+1} + C_2 .$$

Bajo la condición de no deslizamiento en la proximidad de la superficie sólida, $v(h/2) = v(-h/2) = 0$, se obtiene finalmente el siguiente perfil de flujo en el espacio intersticial:

$$v = \frac{\dot{\gamma}_0}{n+1} \left(\frac{-p'}{\tau_0} \right)^n \left(\left(\frac{h}{2} \right)^{n+1} - z^{n+1} \right) .$$

El caudal a través de una camisa cilíndrica de radio r se calcula mediante la expresión

$$Q = 2\pi r \int_{-h/2}^{h/2} v(z) dz = 2\pi r \frac{\dot{\gamma}_0}{n+2} \left(\frac{-p'}{\tau_0} \right)^n \frac{h^{n+2}}{2^{n+1}} .$$

De la condición de continuidad se tiene que:

$$-\pi r^2 \dot{h} = 2\pi r \frac{\dot{\gamma}_0}{n+2} \left(\frac{-p'}{\tau_0} \right)^n \frac{h^{n+2}}{2^{n+1}} ,$$

de forma que, a partir de esta expresión, se puede calcular el gradiente de presión:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = 2\tau_0 \left(-\dot{h} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0 h^{n+2}} r \right)^{1/n}$$

Integrando y aplicando la condición de frontera dada por $p(R) = p_0$, se obtiene la distribución de presiones en la capa:

$$p - p_0 = 2\tau_0 \left(-\dot{\gamma} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0 h^{n+2}} \right)^{1/n} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left(R^{\frac{1}{n} + 1} - r^{\frac{1}{n} + 1} \right).$$

La fuerza normal que actúa sobre la placa es igual a

$$F = \int_0^R 2\pi r (p - p_0) dr = \frac{2\tau_0 n}{3n+1} \frac{\pi R^{3+\frac{1}{n}}}{h^{1+\frac{2}{n}}} \left(-\dot{\gamma} \frac{n+2}{\dot{\gamma}_0} \right)^{1/n}.$$

Para $n = 1$ (fluido viscoso con comportamiento lineal) se obtiene la ecuación (14.27).

(b) En el caso límite dado por $n \rightarrow \infty$, las ecuaciones de la distribución de presiones y de la fuerza se simplifican, lo cual resulta en

$$p - p_0 = 2\tau_0 \frac{R-r}{h}$$

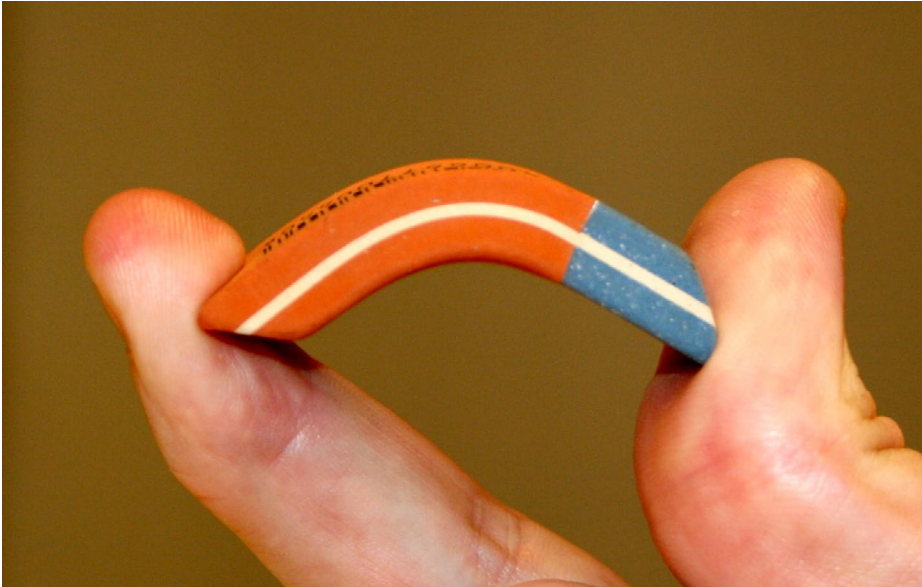
y

$$F = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{h}.$$

En este caso se llega a un comportamiento *idealmente plástico* caracterizado por el esfuerzo de fluencia τ_0 . De la última ecuación se puede calcular el espesor de la película residual de lubricante que no se ha podido extraer y que, por tanto, permanece en el espacio intersticial:

$$h = \frac{2\tau_0}{3} \frac{\pi R^3}{F}.$$

15. PROPIEDADES VISCOELÁSTICAS DE LOS ELÁSTOMEROS



15.1 INTRODUCCIÓN

La goma, junto con otros elastómeros, juega un papel importante en muchas aplicaciones tribológicas, y se emplea siempre que se requiere alcanzar fricciones altas, tanto estáticas como dinámicas, y deformabilidades considerables. En particular, se suele emplear como material de neumáticos, rodillos de transferencia como los que se utilizan en las impresoras, calzado deportivo, juntas de estanqueidad, cintas elásticas, así como en aparatos electrónicos (como los contactos en teclados) y dispositivos de frenado.

Las dos propiedades más importantes de los elastómeros son las siguientes: (1) El módulo de elasticidad es extremadamente pequeño (entre 1 y 10 MPa aproximadamente, es decir, 4 a 5 órdenes de magnitud más pequeño que el de los «cuerpos sólidos normales») y (2) la deformabilidad es extremadamente alta. En este aspecto, los elastómeros pueden estirarse hasta alcanzar varias veces su longitud original.

La razón por la que los elastómeros poseen tales propiedades radica en su estructura. Desde el punto de vista molecular, los elastómeros están constituidos por polímeros, cadenas moleculares que interaccionan entre sí de manera relativamente débil. En condiciones de equilibrio termodinámico, estas moléculas se encuentran preferentemente enmarañadas de manera aleatoria y sin ningún orden aparente. Cuando al elastómero se le aplica un esfuerzo mecánico, las

moléculas comienzan a desenredarse (fig. 15.1), y cuando el esfuerzo cesa, las moléculas recuperan el estado de enmarañamiento original. A diferencia de los sólidos «normales», en los que el estado de equilibrio está determinado predominantemente por un mínimo en la energía potencial, en los elastómeros la magnitud determinante es la entropía, la cual alcanza su valor máximo en el estado de equilibrio. Se habla por tanto de *elasticidad entrópica*¹.

Para evitar que las cadenas se separen completamente cuando se las somete a tracción, las moléculas se suelen unir entre sí mediante enlaces de disulfuro a través de un proceso químico conocido como vulcanización². Según se añada más o menos azufre, la vulcanización produce una goma más o menos dura. Para optimizar la elasticidad, la resistencia al desgaste y la capacidad de agarre de los neumáticos, el caucho, el elastómero en este caso, se suele mezclar con hollín (también llamado negro de humo o negro de carbón). El material compuesto que resulta, se denomina «caucho reforzado».

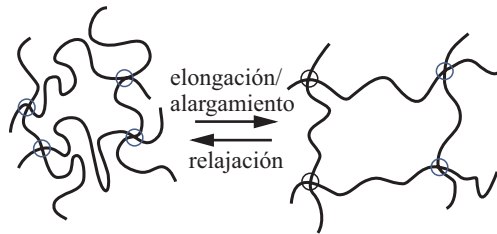


Fig. 15.1 Representación esquemática del cambio en la estructura de un elastómero bajo tracción.

Con respecto a las propiedades tribológicas, se parte del hecho de que el comportamiento de los elastómeros en el contacto y durante el rozamiento viene determinado preferentemente por sus propiedades reológicas. En otras palabras, las propiedades tribológicas de los elastómeros no están determinadas por las propiedades superficiales, sino por las propiedades volumétricas. Esta es la razón por la que en este capítulo se van a tratar, en primer lugar y con detalle, las propiedades reológicas de la goma, así como sus métodos de caracterización. De ambos se hará uso en el capítulo siguiente, cuando se discuta la fricción en elastómeros. Este capítulo y el siguiente, se centrarán en el estudio de los elastómeros con un comportamiento viscoelástico *lineal*. El tratamiento de las no-linealidades queda fuera del ámbito de este libro.

1. En este sentido, se puede identificar la elasticidad de la goma con la «elasticidad» de los gases ideales, en los que las interacciones moleculares son despreciables y por tanto, la elasticidad es de origen puramente entrópico.

2. La vulcanización fue desarrollada en 1839 por Charles Goodyear.

15.2 RELAJACIÓN DE LA TENSIÓN EN ELASTÓMEROS

Considérese un bloque de goma al cual se le aplica un esfuerzo cortante o tensión de cizalla (fig. 15.2). En el momento en que el cuerpo se deforma un ángulo ε_0 ³, la tensión o esfuerzo aumenta rápidamente hasta alcanzar un valor máximo $\sigma(0)$, y después decrece lentamente hasta llegar a un valor, $\sigma(\infty)$, que puede llegar a ser 3 a 4 órdenes de magnitud menor que $\sigma(0)$ (fig. 15.3). El origen físico de este comportamiento es evidente; en un primer momento, las cadenas de polímero no tienen tiempo de desenredarse y, en consecuencia, la goma reacciona como un «cuerpo sólido normal». El correspondiente módulo de cizalla, $G(0) = \sigma(0) / \varepsilon_0$, tiene el mismo orden de magnitud que el del vidrio y se le suele llamar *módulo vítreo* o *instantáneo*. Por el contrario, el cociente $G(\infty) = \sigma(\infty) / \varepsilon_0$ describe el comportamiento del material tras un periodo de tiempo suficientemente largo, y se denomina *módulo de cizalla estático*. A medida que el tiempo transcurre, las moléculas tienden a separarse las unas de las otras, lo que disminuye la tensión interna. El cociente

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (15.1)$$

describe el *módulo de cizalla dependiente del tiempo*. Es fácil ver que esta función describe completamente las propiedades mecánicas de todo material, siempre y cuando este se comporte de forma *lineal*.

Se va a suponer que el bloque se deforma según una función dada, $\varepsilon(t)$. Una función cualquiera $\varepsilon(t)$ puede describirse siempre como suma de una serie de funciones escalón definidas de manera secuencial, tal y como muestra esquemáticamente la fig. 15.4. La amplitud de una de estas «funciones escalón elementales» viene dada en el tiempo t' por la expresión $d\varepsilon(t') = \dot{\varepsilon}(t')dt'$. La contribución al esfuerzo de dicha función elemental es igual a $d\sigma = G(t-t')\dot{\varepsilon}(t')dt'$, y el esfuerzo total en función del tiempo se puede calcular mediante la siguiente expresión

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{\varepsilon}(t')dt' \quad (15.2)$$

3. Conviene señalar que el ángulo de cizalla ε es el *doble* de la componente de cizalla del tensor de deformaciones.

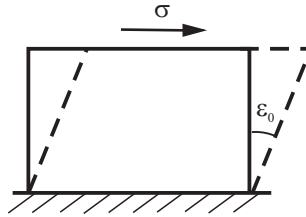


Fig. 15.2 Deformación a cortadura o a cizalladura de un bloque de goma.

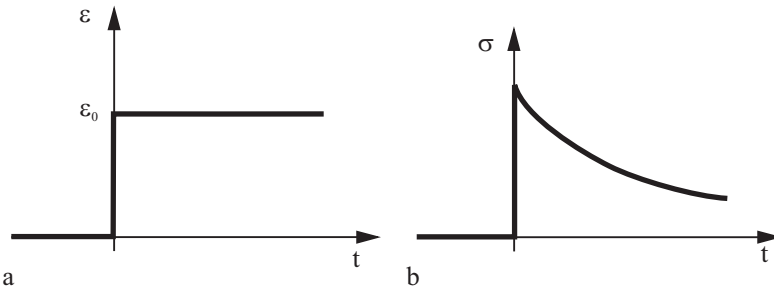


Fig. 15.3 Si un bloque de goma se deforma súbitamente la magnitud ε_0 en el tiempo $t = 0$, el esfuerzo aumenta primero hasta alcanzar un valor elevado y después disminuye con el tiempo (es decir, se relaja) hasta alcanzar un valor menor.

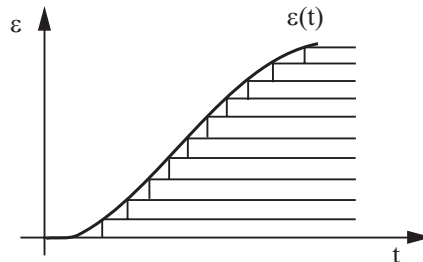


Fig. 15.4 Representación de una función del tiempo como superposición de una serie de funciones escalón sucesivas.

La ecuación (15.2) muestra que el módulo de cizalla dependiente del tiempo puede entenderse, desde el punto de vista matemático, como una función respuesta a un impulso, la cual contribuye al cálculo del esfuerzo en el tiempo t al igual que lo hacen todas las deformaciones que han tenido lugar en un tiempo anterior. Es por ello por lo que a veces a la función $G(t)$ se la denomina *función memoria*.

15.3 EL MÓDULO DE CIZALLA COMPLEJO COMO FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA

Si la deformación $\varepsilon(t)$ cambia con el tiempo según una función armónica del tipo

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \cos(\omega t), \quad (15.3)$$

el esfuerzo, tras un cierto retardo, cambia también de manera periódica y con la misma frecuencia ω . La relación entre el cambio en la deformación y el cambio en el esfuerzo puede definirse de manera sencilla, si la función real $\cos(\omega t)$ se expresa como suma de dos funciones exponenciales complejas:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (15.4)$$

Gracias al principio de superposición, se pueden calcular en primer lugar los esfuerzos derivados de las siguientes oscilaciones complejas

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{-i\omega t}, \quad (15.5)$$

y finalmente sumar dichos esfuerzos. Sustituyendo $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t}$ en la expresión, se obtiene la siguiente expresión para el esfuerzo total

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t'} dt'. \quad (15.6)$$

Haciendo la sustitución de la variable $\xi = t - t'$, la integral anterior se puede expresar de la siguiente forma

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t'} dt' = i\omega \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (15.7)$$

o:

$$\sigma(t) = \hat{G}(\omega) \tilde{\varepsilon} e^{i\omega t} = \hat{G}(\omega) \varepsilon(t). \quad (15.8)$$

Para un estímulo de tipo armónico expresado en forma de exponencial compleja, $e^{i\omega t}$, el esfuerzo es proporcional a la deformación. El coeficiente de proporcionalidad

$$\hat{G}(\omega) = i\omega \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi, \quad (15.9)$$

es, en términos generales, una magnitud compleja y se denomina *módulo de cizalla complejo* o *dinámico*. La parte real de dicha magnitud $G'(\omega) = \text{Re} \hat{G}(\omega)$ se llama *módulo de almacenamiento*, y la parte imaginaria, $G''(\omega) = \text{Im} \hat{G}(\omega)$ se denomina *módulo de pérdida*.

La *amplitud* de las oscilaciones viene dada por el *módulo* o *magnitud* del esfuerzo o de la deformación complejos, según la siguiente expresión:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega)\tilde{\varepsilon}e^{i\omega t}| = |\hat{G}(\omega)||\tilde{\varepsilon}|e^{i\omega t}. \quad (15.10)$$

Dado que $|e^{i\omega t}| = 1$, se obtiene que:

$$|\sigma(t)| = |\hat{G}(\omega)||\tilde{\varepsilon}|. \quad (15.11)$$

Por consiguiente, las *amplitudes* de oscilación del esfuerzo y de la deformación están relacionadas entre sí mediante la *magnitud* del módulo complejo de cizalla.

Para aclarar en mayor medida el concepto de módulo complejo, se consideran dos casos sencillos:

(a) En un cuerpo *linealmente elástico*, la deformación de cizalla viene dada por la ley de Hooke: $\sigma = G\varepsilon$. El módulo complejo tiene en este caso solo parte real y es igual a G .

(b) En un *fluido linealmente viscoso* (fig. 15.5), el esfuerzo cortante es:

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dz}. \quad (15.12)$$

Para un movimiento periódico del tipo $\hat{u}(l,t) = u_0 e^{i\omega t}$ se tiene, por tanto, que:

$$\hat{\sigma}(t) = \eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=l} = \eta \frac{\hat{v}(t)}{l} = \eta i\omega \frac{u_0}{l} e^{i\omega t} = i\omega\eta\hat{\varepsilon}(t). \quad (15.13)$$

El módulo complejo,

$$\hat{G}(\omega) = i\omega\eta, \quad (15.14)$$

tiene en este caso solo una componente imaginaria: $\text{Re}\hat{G} = 0$, $\text{Im}\hat{G} = \omega\eta$.

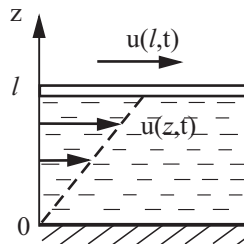


Fig. 15.5 Flujo constante de cizalla en un fluido linealmente viscoso.

15.4 PROPIEDADES DEL MÓDULO COMPLEJO

De la definición (15.9) se tiene que

$$\hat{G}(-\omega) = \hat{G}^*(\omega). \quad (15.15)$$

En este caso, * denota la magnitud compleja conjugada. Esto implica que para la parte real e imaginaria del módulo se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} G'(-\omega) &= G'(\omega), \\ G''(-\omega) &= -G''(\omega). \end{aligned} \quad (15.16)$$

Las partes real e imaginaria del módulo complejo no son independientes entre sí, sino que cumplen las llamadas *relaciones de Kramers-Kronig*:

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= G_0 + \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \frac{G''(z)}{(\omega^2 - z^2)} dz, \\ G''(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G'(z)}{\omega^2 - z^2} dz. \end{aligned} \quad (15.17)$$

Las integrales en estas ecuaciones han de entenderse como valores principales de Cauchy (es decir, el procedimiento consiste en acercarse a las discontinuidades asintóticas de manera simétrica para que las singularidades se cancelen).

Si el módulo complejo es conocido en todo el intervalo de frecuencias, se puede calcular el módulo en función del tiempo. Multiplicando la expresión (15.9) por $\frac{1}{i\omega 2\pi} e^{i\omega t}$ e integrando en ω desde $-\infty$ a ∞ , se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega} \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\xi)} d\omega d\xi. \quad (15.18)$$

La función escalón mostrada en la fig. 15.3 a se corresponde con la expresión $\hat{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la función δ de Dirac. Empleando la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t), \quad (15.19)$$

se puede simplificar el lado derecho de la ecuación, con lo que solo queda el módulo de cizalla dependiente del tiempo. Teniendo en cuenta la expresión (15.1), se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{G}(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (G'(\omega) \text{sen } \omega t + G''(\omega) \text{cos } \omega t) d\omega .
 \end{aligned} \tag{15.20}$$

15.5 DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA EN UN MATERIAL VISCOELÁSTICO

Según la definición del módulo complejo de cizalla, un material que experimenta una deformación definida por la función $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, genera un esfuerzo del tipo $\sigma_1 = \varepsilon_0 \hat{G}(\omega) e^{i\omega t}$. Para una deformación del tipo $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$, solo hay que cambiar el signo de la frecuencia para obtener el esfuerzo: $\sigma_2 = \varepsilon_0 \hat{G}(-\omega) e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \hat{G}^*(\omega) e^{-i\omega t}$. Si la deformación total se puede expresar como suma de las deformaciones anteriores,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t = \frac{\varepsilon_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \tag{15.21}$$

y gracias a la linealidad del sistema, el esfuerzo puede calcularse también como suma de los esfuerzos σ_1 y σ_2 :

$$\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (G(\omega) e^{i\omega t} + G(\omega)^* e^{-i\omega t}) = \varepsilon_0 (G'(\omega) \text{cos } \omega t - G''(\omega) \text{sen } \omega t). \tag{15.22}$$

A partir de estas expresiones, se puede calcular la potencia del esfuerzo por unidad de volumen, \bar{P} :

$$\bar{P} = \langle \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) \rangle = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega). \tag{15.23}$$

La disipación de energía está directamente relacionada con la parte imaginaria del módulo complejo. Por ello, la parte imaginaria del módulo elástico se denomina *módulo de pérdida*.

Para el esfuerzo dado, y teniendo en cuenta la propiedad dada por la expresión (15.11), se puede escribir $\sigma_0^2 = |\hat{G}(\omega)|^2 \varepsilon_0^2$, con lo que la ecuación (15.23) adquiere la forma siguiente

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \frac{\text{Im } \hat{G}(\omega)}{|\hat{G}(\omega)|^2} = -\frac{1}{2} \omega \sigma_0^2 \text{Im} \left(\frac{1}{\hat{G}(\omega)} \right). \tag{15.24}$$

15.6 LA MEDIDA EXPERIMENTAL DEL MÓDULO COMPLEJO

Si un material linealmente viscoelástico se deforma de manera periódica con la frecuencia ω y según la función (15.21), y a la vez se mide el esfuerzo (15.22) como respuesta transitoria en función del tiempo, entonces se puede determinar el módulo complejo mediante el cálculo de los siguientes valores medios:

$$\bar{E} = \langle \sigma(t)\varepsilon(t) \rangle \text{ y } \bar{P} = \langle \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) \rangle. \quad (15.25)$$

La potencia media \bar{P} se calculó anteriormente y se relacionó con el módulo de pérdida. El valor medio \bar{E} está asociado al *módulo de almacenamiento* por la siguiente ecuación:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} G' \varepsilon_0^2. \quad (15.26)$$

La parte real del módulo G se calcula, por tanto, de la siguiente manera

$$\text{Re } \hat{G} = G' = \frac{2\bar{E}}{\varepsilon_0^2}, \quad (15.27)$$

mientras que la parte imaginaria se obtiene de la expresión (15.23):

$$\text{Im } \hat{G} = G'' = \frac{2\bar{P}}{\omega \varepsilon_0^2}. \quad (15.28)$$

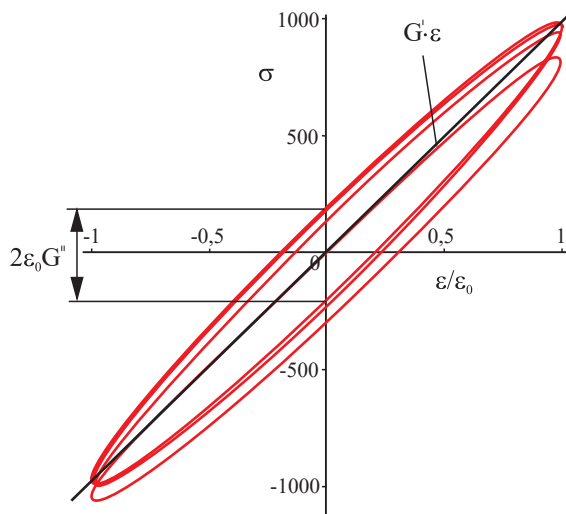


Fig. 15.6 Curvas esfuerzo-deformación, o tensión-deformación, de un material viscoelástico.

Las ecuaciones (15.21) y (15.22) definen de forma paramétrica las curvas que describen el comportamiento dinámico tensión-deformación, las cuales tienen forma elíptica y por tanto exhiben histéresis. El valor promedio de la pendiente de las curvas es igual a G' . Para $\varepsilon = 0$ se obtiene $\sigma = \pm \varepsilon_0 G''$, lo que significa que la parte imaginaria puede obtenerse de la anchura de la histéresis en las curvas.

15.7 MODELOS REOLÓGICOS

Cuando la deformación es isotrópica, se puede trabajar con parámetros de rigidez en vez de con módulos. En este caso, los dos elementos básicos son un muelle o resorte linealmente elástico y un amortiguador en forma de émbolo. A partir de estos elementos se pueden generar combinaciones de diversa complejidad, que pueden reproducir prácticamente cualquier comportamiento viscoelástico.

En primer lugar, se van a considerar los elementos básicos que se han de estimular periódicamente. Para un muelle *linealmente elástico* sin disipación (fig. 15.7 a), se cumple la ley de Hooke:

$$F = cx \tag{15.29}$$

El coeficiente de proporcionalidad c se denomina *constante (elástica) de muelle* o *rigidez de muelle*.

Se va a considerar a continuación un émbolo de comportamiento linealmente viscoso (fig. 15.7 b):

$$F = d\dot{x} \tag{15.30}$$

Para un estímulo periódico de la siguiente forma compleja $\hat{F} = F_0 e^{i\omega t}$ se busca una solución de la forma $\hat{x} = \hat{x}_0 e^{i\omega t}$. El resultado es $\hat{F}(t) = id\omega \hat{x}(t)$, es decir, *la fuerza, al igual que ocurre en un muelle, es en todo momento proporcional a la desviación con respecto al estado equilibrio*. El coeficiente

$$\hat{c}_d = id\omega, \tag{15.31}$$

que relaciona la fuerza con la desviación, es ahora complejo y depende de la frecuencia. A este coeficiente se le denomina *constante o rigidez de muelle dependiente de la frecuencia*.

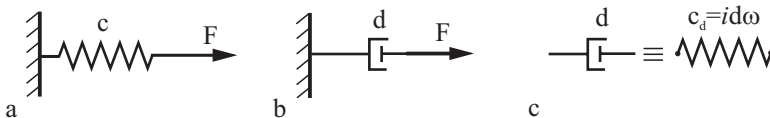


Fig. 15.7 (a) Muelle linealmente elástico, (b) amortiguador (émbolo) proporcional a la velocidad, (c) rigidez compleja de un émbolo.

En general, para un sistema mecánico lineal (es decir, para una combinación de muelles y émbolos de complejidad cualquiera) bajo la acción de una fuerza o estímulo del tipo $F_0 e^{i\omega t}$, se cumple la siguiente relación lineal:

$$\hat{F}(t) = \hat{c}(\omega)\hat{x}(t), \quad (15.32)$$

donde $\hat{c}(\omega)$ es la constante de muelle compleja del sistema. No obstante, esta ecuación es válida para un estímulo de frecuencia ω . Explícitamente, la ecuación tiene la siguiente forma: $F_0 e^{i\omega t} = \hat{c}(\omega)\hat{x}_0 e^{i\omega t}$.

Cuando dos muelles de constantes c_1 y c_2 se conectan en paralelo, el resultado es equivalente a un solo muelle de constante $c = c_1 + c_2$. Cuando los mismos se conectan en serie, la constante del muelle equivalente viene dada por $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \Rightarrow c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. En medios continuos pueden emplearse distribuciones parecidas, pero en este caso, los parámetros de rigidez han de sustituirse por los módulos.

De ahora en adelante, se considerará el componente más importante de muchos modelos reológicos, el llamado *elemento de Maxwell*, el cual está constituido por un muelle y un émbolo conectados en serie. A continuación, se analizarán las propiedades de este elemento partiendo de la versión mecánica en el continuo y en términos de módulos en vez de rigideces.

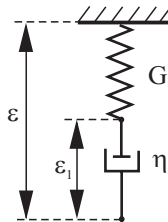


Fig. 15.8 Elemento de Maxwell.

Los módulos complejos del muelle y del émbolo son, respectivamente, G y $i\eta\omega$. Dado que los elementos están conectados en serie, el módulo total viene dado por

$$\hat{G}_{Maxwell} = \frac{G \cdot i\eta\omega}{G + i\eta\omega} = \frac{G \cdot i\eta\omega}{(G + i\eta\omega)(G - i\eta\omega)} = \frac{G(i\eta\omega G + (\eta\omega)^2)}{G^2 + (\eta\omega)^2}. \quad (15.33)$$

Los módulos de almacenamiento y de pérdida son, respectivamente,

$$G'_{Maxwell} = \frac{G(\eta\omega)^2}{G^2 + (\eta\omega)^2}, \quad G''_{Maxwell} = \frac{\eta\omega G^2}{G^2 + (\eta\omega)^2}. \quad (15.34)$$

Introduciendo la magnitud

$$\tau = \eta / G, \quad (15.35)$$

también se pueden expresar las ecuaciones (15.34) de la forma siguiente

$$G'_{Maxwell} = G \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad G''_{Maxwell} = G \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (15.36)$$

donde la magnitud τ tiene dimensiones de tiempo.

Ahora se analizará la relajación de tensión en un medio caracterizado por un elemento de Maxwell. Para ello se va a emplear la notación mostrada en la fig. 15.8. El esfuerzo en el punto de conexión entre el muelle y el émbolo es igual a $-G(\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta\dot{\varepsilon}_1$. Este punto carece de masa, por lo que el esfuerzo ha de ser igual a cero: $-G(\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta\dot{\varepsilon}_1 = 0$. Dividiendo esta ecuación por G e introduciendo la definición dada por (15.35), resulta en:

$$\tau\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (15.37)$$

Si el material se deforma *súbitamente* en el tiempo $t = 0$ la magnitud ε_0 , se cumple entonces que, en cada punto, $t > 0$,

$$\tau\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \quad (15.38)$$

con la condición inicial dada por $\varepsilon_1(0) = 0$. La solución de la ecuación diferencial, teniendo en cuenta la condición inicial anterior, es la siguiente

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (15.39)$$

Para el esfuerzo se obtiene que

$$\sigma = G(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau}. \quad (15.40)$$

El esfuerzo decrece de manera exponencial con un tiempo característico τ , el cual se denomina *tiempo de relajación*.

15.8 UN MODELO REOLÓGICO SENCILLO DE LA GOMA («MODELO ESTÁNDAR»)

A continuación, se va a construir un modelo de muelles y émbolos que incluye las propiedades dinámicas más importantes de la goma bajo la acción de un estímulo mecánico periódico. Estas propiedades son las siguientes:

1. $\omega \approx 0$: A bajas frecuencias se obtiene un módulo elástico pequeño (deformación cuasi-estática) y apenas existe disipación, es decir, la contribución del amortiguamiento ha de ser mucho más pequeña.

2. $\omega \rightarrow \infty$: A frecuencias muy altas se obtiene un módulo muy alto (típicamente 3 órdenes de magnitud mayor que el obtenido en condiciones cuasi-estáticas), y de igual forma, existe una disipación despreciable.

3. A frecuencias medias se obtienen módulos de magnitud intermedia con un alto grado de disipación.

Estas propiedades resultan del hecho de que las cadenas moleculares necesitan un intervalo finito de tiempo para poder enredarse y desenredarse.

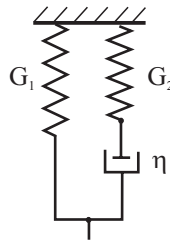


Fig. 15.9 Un modelo reológico sencillo para la goma.

Las propiedades que ha de poseer la goma deberían poder describirse de manera cualitativa mediante el modelo reológico representado en la fig. 15.9. Dado que se trata de una combinación en paralelo de un muelle linealmente elástico y un elemento de Maxwell, se pueden escribir las siguientes expresiones

$$G' = G_1 + G_2 \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad G'' = G_2 \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (15.41)$$

donde $\tau = \eta / G_2$. La dependencia de los respectivos módulos con la frecuencia aparece representada en la fig. 15.10, en escala *doble-logarítmica* y para el caso en el que $G_2 / G_1 = 1000$.

A frecuencias bajas, $\omega < G_1 / \eta$ (carga cuasi-estática), el módulo se aproxima al valor G_1 , mientras que a frecuencias muy altas, $\omega > G_2 / \eta$, el módulo se aproxima al valor $G_2 \gg G_1$. Esto implica que bajo cargas que varían muy lentamente, la goma se comporta como un material blando, mientras que a cargas que varían rápidamente, la goma se comporta como un material duro. Valores típicos de módulos de cizalla en gomas reforzadas a bajas frecuencias suelen ser del orden de 10 MPa, mientras que a altas frecuencias, estos llegan a ser aproximadamente 1000 veces más grandes. En la región intermedia, la parte imaginaria es la dominante: $G''(\omega) \approx \eta\omega$, es decir, bajo la acción de un estímulo periódico y en esta región, el medio se comporta como un fluido viscoso.

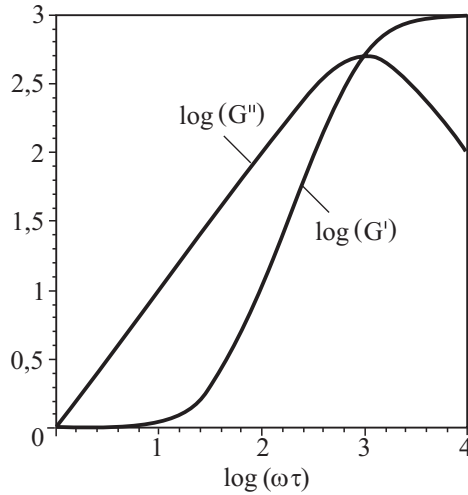


Fig. 15.10 Componentes real e imaginaria del módulo complejo correspondiente al modelo reológico representado en la fig. 15.9 en el caso en que $G_2 / G_1 = 1000$.

Dado que se trata de un muelle y un elemento Maxwell conectados en paralelo, se puede obtener la siguiente expresión

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}). \quad (15.42)$$

Dividiendo por ε_0 , se llega a la expresión normalizada del esfuerzo denominada *módulo dependiente del tiempo*:

$$G(t) = \sigma / \varepsilon_0 = (G_1 + G_2 e^{-t/\tau}). \quad (15.43)$$

Este decrece desde el valor $G_0 = G_1 + G_2 \approx G_2$ a $t = 0$ hasta el valor $G_\infty = G_1$ a $t \rightarrow \infty$.

15.9 EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LAS PROPIEDADES REOLÓGICAS

Desde el punto de vista físico, la duración del proceso de relajación de la tensión o el esfuerzo, viene determinada por la cinética de «desenredado» de las moléculas poliméricas. Esta cinética comprende procesos térmicamente activados que dependen en gran medida de la temperatura. Dado que el tiempo de relajación solo aparece en forma de producto $\omega\tau(T)$ en la expresión del módulo complejo (15.41), y solo en forma de cociente $t / \tau(T)$ en la expresión (15.43) del módulo dependiente del tiempo, se tiene que:

$$G(t) = F(t / \tau(T)), \quad \hat{G}(\omega) = Q(\omega\tau(T)) \quad (15.44)$$

Esto implica que las curvas que describen la dependencia del módulo con la frecuencia, o el tiempo, a distintas temperaturas, son idénticas en forma y solo se diferencian en que están desplazadas, en mayor o menor medida, a lo largo del eje horizontal (frecuencia o tiempo). La magnitud de ese desplazamiento es igual a $\log(\tau(T_2) / \tau(T_1))$ (fig. 15.11); por ello, la magnitud $\log \tau(T)$ se denomina también *función de desplazamiento*.

En la descripción de las propiedades reológicas de elastómeros, se suele partir del hecho de que la expresión también es válida en aquellos casos en los que la reología no viene descrita por el sencillo modelo anterior. En 1955, Williams, Landel y Ferry propusieron una aproximación analítica para la función desplazamiento, caracterizada por dos constantes, C_1 y C_2 , y que se conoce con el nombre de *función WLF*. Las constantes se han de determinar experimentalmente para cada tipo de goma:

$$\log \tau(T) = \frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g} = C_1 \left(1 - \frac{1}{1 + C_2^{-1}(T - T_g)} \right). \quad (15.45)$$

donde T_g es la llamada *temperatura de transición vítrea*.

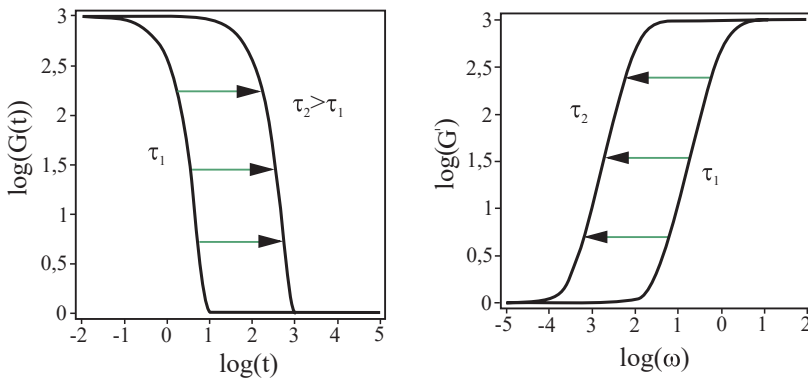


Fig. 15.11 Curvas del módulo en función del tiempo (a) y de la frecuencia (b) a dos temperaturas distintas. El tiempo de relajación menor, τ_1 , corresponde a la curva obtenida a una temperatura mayor que la temperatura a la que se obtuvo la curva con tiempo de relajación τ_2 (en este ejemplo, τ_2 es aproximadamente 100 veces mayor que τ_1).

15.10 CURVAS MAESTRAS

El supuesto dado por (15.44) suele aplicarse en la obtención de curvas completas de relajación a partir de medidas experimentales realizadas en intervalos de tiempo limitados. A modo de ejemplo, se va a considerar la relajación del esfuerzo

durante un experimento de tracción. La muestra se elonga rápidamente en la magnitud $\varepsilon = 1\%$, y seguidamente se mide el esfuerzo en función del tiempo. Sin embargo, el intervalo en el que dicha medida puede efectuarse experimentalmente es limitado. En el ejemplo, se considera la relajación de tensión en la ventana temporal entre 3 y 600 s tras el momento de aplicar la deformación; ampliar la ventana a tiempos menores complicaría la adquisición de datos, mientras que ampliar la ventana a tiempos aún mayores haría impracticable el experimento por su excesiva duración.

La fig. 15.12 muestra gráficamente varios resultados experimentales en escala *doble logarítmica*, obtenidos a distintas temperaturas. Se parte de la hipótesis de que cada curva medida a distinta temperatura es en realidad un segmento de una curva común, desplazado una cierta magnitud a lo largo del eje horizontal. Para reconstruir la curva completa, estas partes han de desplazarse horizontalmente en mayor o menor grado (fig. 15.13).

Este procedimiento es efectivo y permite obtener una curva de relajación «experimental» a lo largo de un extenso intervalo de tiempos que experimentalmente es inaccesible (por ejemplo, intervalos comprendidos entre submilisegundos y años). Esta curva se denomina «curva maestra». El grado de desplazamiento de las curvas a distintas temperaturas, o a distintos tiempos, no es el mismo, lo cual refleja la diferencia en la energía de activación de procesos que tienen lugar a distintas escalas.

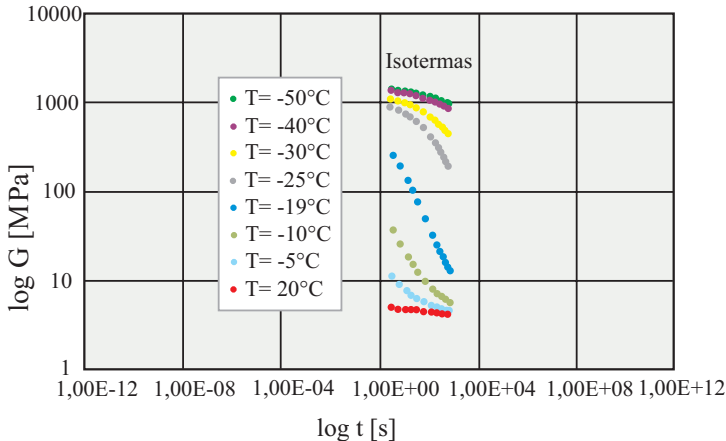


Fig. 15.12 Resultados experimentales de relajación de esfuerzo o de tensión en una ventana de tiempos a distintas temperaturas (datos de M. Achenbach).

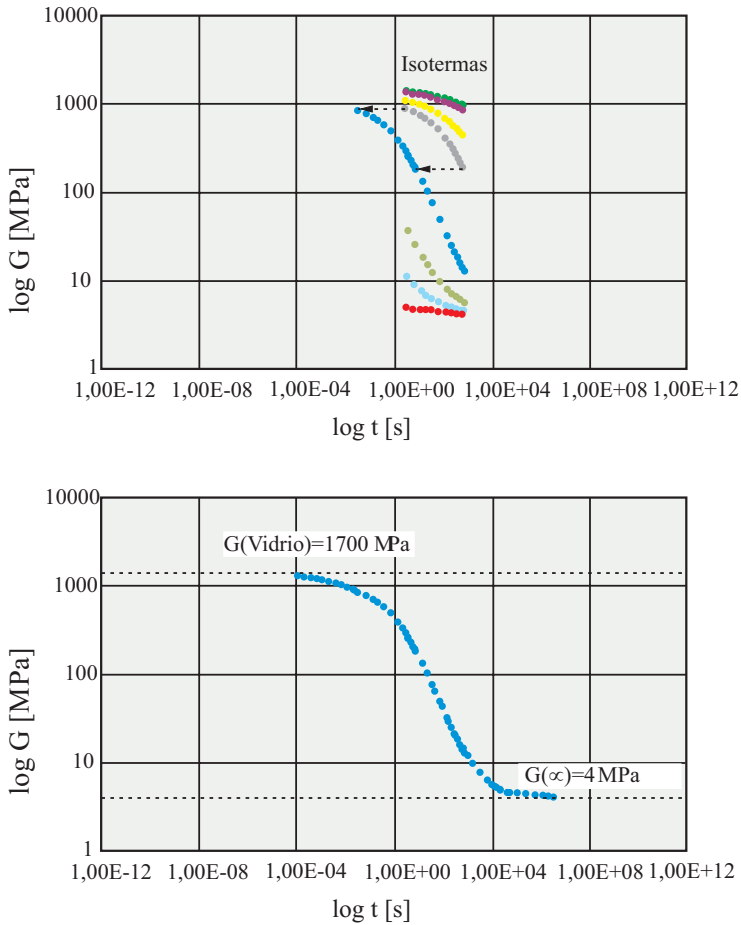


Fig. 15.13 Las curvas de relajación de esfuerzo obtenidas a distintas temperaturas (y representadas en escala doble logarítmica) pueden desplazarse de forma que permiten reconstruir una única *curva maestra* (datos de M. Achenbach).

15.11 SERIE DE PRONY

La curva maestra obtenida mediante el procedimiento descrito en la sección anterior, difiere sustancialmente de la curva de relajación del modelo sencillo del muelle y el elemento de Maxwell en paralelo, el cual se describió con anterioridad. En elastómeros, la transición desde un «módulo vítreo» elevado a tiempos muy cortos hasta un «módulo viscoso» pequeño a tiempos muy largos, no tiene lugar en un pequeño intervalo de tiempo en torno a τ , sino que se extiende a lo largo del tiempo en varios órdenes de magnitud. Por consiguiente, el modelo adecuado ha de ser capaz de reproducir dicho comportamiento.

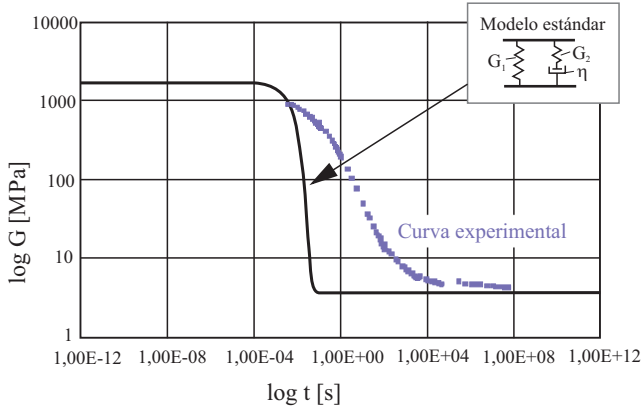


Fig. 15.14 Representación doble logarítmica de la dependencia del módulo de cizalla con el tiempo en el sencillo modelo reológico (línea continua) y en un elastómero real (puntos).

La reproducción del comportamiento real puede conseguirse si, en vez de utilizar un solo elemento de Maxwell con un tiempo de relajación τ , se emplea una serie de elementos de Maxwell conectados en paralelo (fig. 15.15). Con un número suficientemente grande de elementos de Maxwell, se puede reproducir bien cualquier función de relajación. Este tipo de modelo se denomina *serie de Prony*.

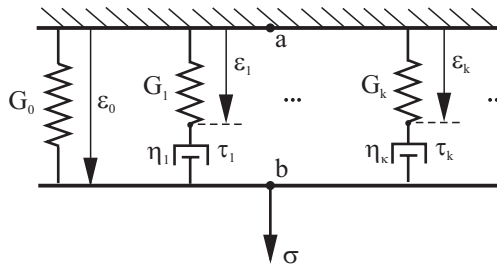


Fig. 15.15 Serie de Prony.

En este modelo, la relajación del módulo de cizalla G viene dada por la siguiente expresión

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^N G_i \cdot e^{-t/\tau_i} \quad (15.46)$$

Esta ecuación se puede generalizar sustituyendo el sumatorio por una integral según:

$$G(t) = G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(\tau) e^{-t/\tau} d\tau . \quad (15.47)$$

Las componentes real e imaginaria del módulo complejo de cizalla vienen dadas por

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= G_0 + \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega^2 \tau_k^2}{1 + \omega^2 \tau_k^2} , \\ G''(\omega) &= \sum_{k=1}^{N_k} G_k \frac{\omega \tau_k}{1 + \omega^2 \tau_k^2} , \end{aligned} \quad (15.48)$$

o, en su forma integral, por

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= G_0 + G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau , \\ G''(\omega) &= G_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} g(\tau) d\tau . \end{aligned} \quad (15.49)$$

En el caso de muchos elastómeros, el decaimiento del esfuerzo con el tiempo se caracteriza por una función potencia en lugar de una exponencial sencilla, como en el caso de un elemento Maxwell. Para describir una relajación de este tipo, la función peso $g(\tau)$ en las ecuaciones (15.47) y (15.49), ha de reemplazarse por una función potencia del tipo $g(\tau) \propto \tau^{-s}$. De esta forma, y asignando valores a los parámetros G_0 , G_1 , s , τ_1 y τ_2 , la función relajación queda completamente definida.

Para ilustrar el concepto, se va a calcular la función relajación del módulo de cizalla en un modelo caracterizado por los parámetros siguientes: $G_0 = 1$, $G_1 = 1000$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^2$, $g(\tau) = \tau_1 \tau^{-2}$. Sustituyendo los valores en la ecuación (15.47) se obtiene

$$G(t) = G_0 + \frac{G_1 \tau_1}{t} \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) . \quad (15.50)$$

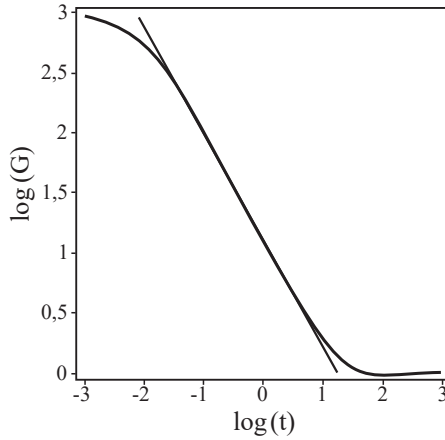


Fig. 15.16 El módulo de cizalla en función del tiempo según la expresión (15.50).

El resultado obtenido se ha representado gráficamente en la fig. 15.16. En esta gráfica, de escala doble logarítmica, se observa que, en la región intermedia de tiempos $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$, el módulo varía linealmente y la pendiente es igual a -1. Es decir, el esfuerzo en esta región disminuye según una ley de potencia del tipo $G \propto t^{-1}$.

En el dominio de frecuencias, se obtienen las siguientes expresiones para las partes real e imaginaria del módulo complejo (véase la fig. 15.17)

$$G'(\omega) = G_0 + G_1 \tau_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau = G_0 + G_1 \omega \tau_1 (\arctan \omega \tau_2 - \arctan \omega \tau_1),$$

$$G''(\omega) = \frac{1}{2} G_1 \tau_1 \omega \ln \left(\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} \frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right). \quad (15.51)$$

En la región de frecuencias intermedias, $1/\tau_2 \ll \omega \ll 1/\tau_1$ se cumple que:

$$G'(\omega) = G_0 + \frac{\pi}{2} G_1 \tau_1 \omega$$

$$G''(\omega) = G_1 \omega \tau_1 \ln(1/\omega \tau_1). \quad (15.52)$$

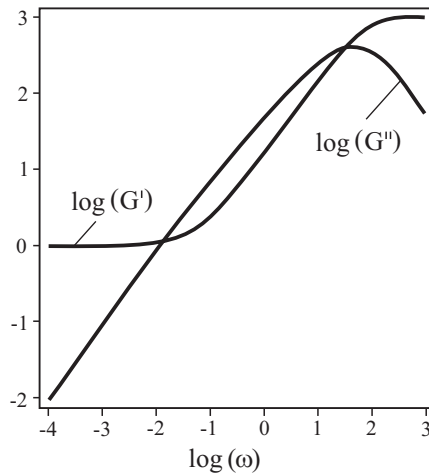


Fig. 15.17 Partes real e imaginaria del módulo en función de la frecuencia, según la ecuación (15.52).

15.12 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN EN MEDIOS VISCOELÁSTICOS

Si durante el proceso dinámico de aplicación de carga sobre un elastómero, la velocidad de indentación es menor que la menor velocidad del sonido (la cual se define como el valor más pequeño del módulo elástico), el contacto se puede considerar cuasi-estático. Siempre que esta condición se cumpla y el elastómero se estimule con una frecuencia cíclica ω , la relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal y, por consiguiente, también lo es la que se establece entre la fuerza y el desplazamiento. De esta forma, se puede considerar el medio como un cuerpo elástico caracterizado por un módulo de cizalla efectivo $G(\omega)$ y, por tanto, todos los teoremas válidos para cuerpos puramente elásticos lo son también para los medios viscoelásticos estimulados de manera armónica. En particular se cumple que el incremento de la rigidez es proporcional al diámetro de la región de contacto, que es el principio matemático sobre el que se basa la aplicación del método de reducción de dimensión, descrito en la sección 5.6 (MRD). Por consiguiente, los elastómeros también pueden describirse mediante el MRD, siempre que la rigidez de cada muelle venga dada por la expresión (5.51):

$$\Delta k_z = E^* \Delta x. \quad (15.53)$$

La única diferencia con respecto al contacto elástico es que, en este caso, el módulo de elasticidad es una función de la frecuencia. Los elastómeros suelen considerarse medios incompresibles, por lo que $\nu = 1/2$ y, por tanto,

$$\Delta k_z(\omega) = E^*(\omega)\Delta x = \frac{E(\omega)}{1-\nu^2}\Delta x = \frac{2G(\omega)}{1-\nu}\Delta x \approx 4G(\omega)\Delta x. \quad (15.54)$$

Es decir, en el caso de elastómeros incompresibles, la rigidez de un único muelle en una cimentación tipo Winkler es el producto del cuádruple del módulo de cizalla y la distancia entre muelles, lo que coincide con el tamaño de paso en el proceso de discretización. En un modelo unidimensional bajo la acción de una perturbación armónica, la fuerza elástica del muelle viene dada por

$$\Delta F_N(x, \omega) = \frac{2G(\omega)}{1-\nu}\Delta x \cdot u_z(x, \omega) \approx 4G(\omega)\Delta x \cdot u_z(x, \omega). \quad (15.55)$$

La transformación inversa en el eje de tiempos resulta en la relación constitutiva siguiente

$$\Delta F_N(x, t) = \frac{2}{1-\nu}\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{u}_z(x, t')dt' \approx 4\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{u}_z(x, t')dt'. \quad (15.56)$$

En contactos tangenciales, la rigidez tangencial del muelle en la cimentación MDR unidimensional equivalente ha de definirse según la expresión (8.41):

$$\Delta k_x = G^*(\omega)\Delta x = \frac{4G(\omega)}{2-\nu}\Delta x \approx \frac{8}{3}G(\omega)\Delta x. \quad (15.57)$$

La correspondiente relación constitutiva en el dominio de tiempos es

$$\Delta F_x(t) = \frac{4}{2-\nu}\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{z}(t')dt' \approx \frac{8}{3}\Delta x \int_{-\infty}^t G(t-t')\dot{z}(t')dt'. \quad (15.58)$$

La demostración matemática formal de dicho procedimiento se basa en el método de ecuaciones funcionales de Radok, el cual viene descrito en un libro de reciente publicación⁴.

Las relaciones lineales generales (15.56) y (15.57) suelen representarse a través de diversos modelos reológicos, como por ejemplo, elementos de Maxwell, elementos de Kelvin o modelos estándar. Para medios no compresibles, las fuerzas en el muelle y en el émbolo se calculan mediante las siguientes expresiones

$$\Delta F_N = 4Gu_z\Delta x \quad \text{y} \quad \Delta F_x = 4\eta\dot{u}_z\Delta x, \quad (15.59)$$

donde η es la viscosidad dinámica del elemento correspondiente.

4. S. Kürschner, V.L. Popov, M. Heß. *Ersetzung der Materialeigenschaften mit Radoks Methode der Funktionalgleichungen*. En: *Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (2013), págs. 247-256.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Cálculo del coeficiente de restitución en un material viscoelástico. Un bloque de material viscoelástico colisiona contra una pared rígida a la velocidad v_0 y sale despedido a una velocidad más pequeña v_1 . Determinar el coeficiente de restitución definido como $e = v_1 / v_0$. El bloque se representa como una masa rígida m conectada a un muelle y a un émbolo (de rigidez c y constante de amortiguamiento η , respectivamente), según se indica en la fig. 15.18.

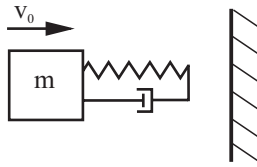


Fig. 15.18 Modelo de un bloque viscoelástico que colisiona contra una pared.

Resolución: A partir del momento en que se produce el choque y, por tanto, se establece el contacto, se tiene un oscilador amortiguado. La ecuación de movimiento tiene la siguiente forma

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + cx = 0$$

o

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

donde $2\delta = \eta / m$ y $\omega_0^2 = c / m$. Las condiciones iniciales vienen dadas por $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. La solución de la ecuación de movimiento con las condiciones iniciales anteriores, viene dada por:

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \text{sen } \tilde{\omega} t, \quad \dot{x}(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} (-\delta \text{sen } \tilde{\omega} t + \tilde{\omega} \text{cos } \tilde{\omega} t)$$

donde $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. El bloque permanece en contacto con la pared en tanto que la fuerza de compresión que actúa sobre la misma, $F = \eta\dot{x} + cx$, sea positiva. El momento en que el contacto deja de producirse, t^* , se determina mediante la igualdad siguiente

$$2\delta\dot{x}(t^*) + \omega_0^2 x(t^*) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t} \left[(-2\delta^2 + \omega_0^2) \text{sen } \tilde{\omega} t^* + 2\delta\tilde{\omega} \text{cos } \tilde{\omega} t^* \right] = 0.$$

De lo cual se deriva que,

$$\tan \tilde{\omega} t^* = \frac{-2\delta\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

La velocidad a ese valor de tiempo es igual a

$$\dot{x}(t^*) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} \left(-\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^* \right).$$

Por consiguiente, el coeficiente de restitución se calcula de la forma siguiente

$$e = \frac{|\dot{x}(t^*)|}{v_0} = \frac{1}{\tilde{\omega}} e^{-\delta t^*} \left| -\delta \sin \tilde{\omega} t^* + \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t^* \right| = e^{-\frac{\delta}{\tilde{\omega}} \left(\pi H(\omega_0^2 - 2\delta^2) - \arctan \frac{2\delta\tilde{\omega}}{\omega_0^2 - 2\delta^2} \right)}$$

donde

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}.$$

La expresión del coeficiente de restitución se representa en la fig. 15.19.

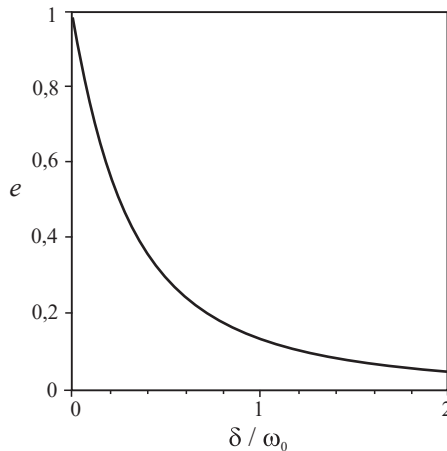


Fig. 15.19 El coeficiente de restitución en función del grado de amortiguamiento en un material viscoelástico.

Problema 2: Medida experimental del módulo G complejo. El péndulo de torsión ofrece un método sencillo para determinar los módulos de almacenamiento y pérdida en elastómeros (fig. 15.20). En dicho péndulo de torsión, una muestra de elastómero de forma cilíndrica, de radio R y longitud l , se sujeta firmemente por un extremo mientras que por el otro se aplica un par de torsión Θ . El péndulo se separa de su posición de equilibrio en el tiempo $t = 0$, dejándolo oscilar libremente. Determinar los módulos de almacenamiento y pérdida a partir de la frecuencia de oscilación y la amortiguación del movimiento pendular.

Resolución: El par o momento de torsión de una barra elástica viene dado por:

$$M = -\frac{I_p}{l} G\varphi ,$$

donde I_p es la inercia polar de la sección circular:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} .$$

En el caso de una perturbación periódica de frecuencia angular ω y una barra de elastómero, también se cumple esta ecuación siempre que el producto $G\varphi$ se sustituya por la expresión siguiente

$$G\varphi = G'\varphi + \frac{G''}{\omega} \dot{\varphi} .$$

Puede verse que esta expresión, cuando la perturbación tiene la forma compleja dada por $\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\omega t}$, es el producto del módulo complejo por el ángulo de torsión: $\hat{G}\varphi = (G'(\omega) + iG''(\omega))\varphi$. Por tanto, la ley de conservación del momento angular aplicada al par de torsión adquiere la forma

$$\Theta \ddot{\varphi} + \frac{I_p}{l} \frac{G''}{\omega} \dot{\varphi} + \frac{I_p}{l} G'\varphi = 0 .$$

Esta ecuación describe una oscilación amortiguada de frecuencia angular

$$\omega \approx \sqrt{\frac{I_p G'}{\Theta l}}$$

caracterizada por una constante de decaimiento logarítmico dada por

$$\delta = \frac{I_p G''}{2l\Theta\omega} .$$

Para los módulos de almacenamiento y pérdida se obtienen las siguientes expresiones

$$G'(\omega) = \frac{l\Theta\omega^2}{I_p} , \quad G''(\omega) = \frac{2l\Theta\omega\delta}{I_p} .$$

Y el comportamiento a distintas frecuencias puede «variarse» modificando apropiadamente el par de torsión Θ .

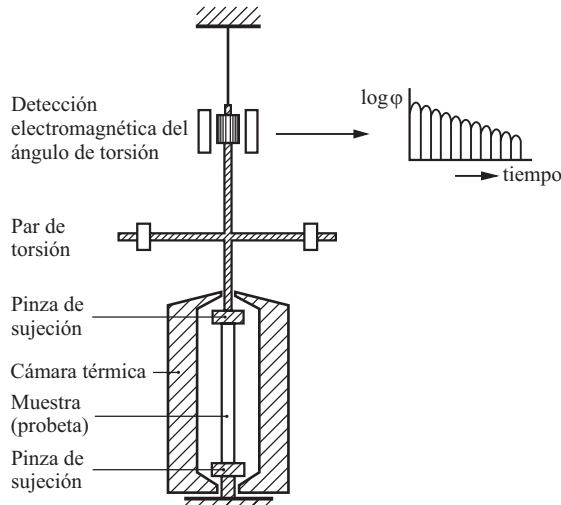


Fig. 15.20 Partes de un péndulo de torsión en la medida experimental del módulo G complejo.

Problema 3: Un perfil rígido y de simetría axial se presiona con un medio semi-continuo de viscosidad η con una fuerza constante F_N . En ausencia de fuerzas de gravedad y capilaridad, determinar la velocidad y la profundidad de indentación en función del tiempo para los siguientes perfiles:

- (a) un indentador cilíndrico de radio a (fig. 15.21),
- (b) un cono $f(r) = \tan \theta \cdot |r|$ (fig. 15.22),
- (c) un paraboloide de revolución $f(r) = r^2 / (2R)$ (fig. 15.23).

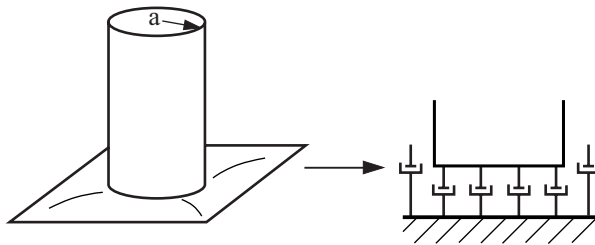


Fig. 15.21 Indentación de un cilindro en un semi-espacio viscoso.

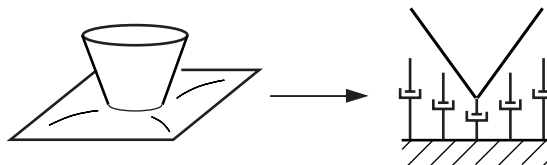


Fig. 15.22 Indentación de un cono en un semi-espacio viscoso.

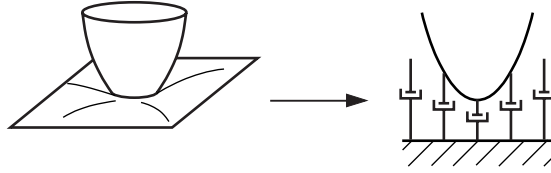


Fig. 15.23 Indentación de un paraboloido de revolución en un semi-espacio viscoso.

Resolución: En un primer paso, se generan los perfiles unidimensionales equivalentes según la ecuación (5.52), y tal y como se describió en el problema 7 del capítulo 5:

$$(a) \quad g(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases},$$

$$(b) \quad g(x) = \frac{\pi}{2} |x| \tan \theta,$$

$$(c) \quad g(x) = x^2 / R.$$

En un segundo paso, se pasa a definir la cimentación Winkler correspondiente mediante las ecuaciones (15.59), $\Delta F_N = 4\eta\dot{u}_z \Delta x = 4\eta\dot{d}(t)\Delta x$. En un determinado momento durante la indentación, el radio de contacto instantáneo es igual a a , y la fuerza vertical se calcula multiplicando la fuerza elástica de un solo muelle por el número de muelles en contacto, $2a / \Delta x$:

$$F_N = 8\eta a(t)\dot{d}(t).$$

La relación entre el radio de contacto instantáneo y la profundidad de indentación no depende de la reología, y puede obtenerse del mismo modo que el problema 7 del capítulo 5:

(a) el radio de contacto es constante e igual a a ,

$$(b) \quad a(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d(t)}{\tan \theta},$$

$$(c) \quad a(t) = \sqrt{Rd(t)}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la correspondiente a la fuerza se obtiene, en cada caso:

$$(a) \quad F_N = 8\eta a \dot{d},$$

$$(b) \quad F_N = \frac{16}{\pi \tan \theta} \eta d(t)\dot{d}(t),$$

$$(c) \quad F_N = 8\eta R^{1/2} \sqrt{d(t)}\dot{d}(t).$$

Integrando con respecto al tiempo y teniendo en cuenta la condición inicial $d(0) = 0$, se obtiene en cada caso:

$$(a) F_N t = 8\eta a d(t),$$

$$(b) F_N t = \frac{8}{\pi \tan \theta} \eta d(t)^2,$$

$$(c) F_N t = \frac{16}{3} \eta R^{1/2} d(t)^{3/2}.$$

Lo que resulta en las siguientes expresiones para la profundidad de indentación en función del tiempo:

$$(a) d(t) = \frac{F_N t}{8\eta a},$$

$$(b) d(t) = \left(\frac{\pi \tan \theta \cdot F_N t}{8\eta} \right)^{1/2},$$

$$(c) d(t) = \left(\frac{3F_N t}{16\eta R^{1/2}} \right)^{2/3}.$$

Problema 4: Un indentador rígido y cónico se presiona sobre un semi-espacio viscoelástico con la fuerza constante F_N . Dicho semi-espacio se puede modelar como un cuerpo caracterizado por elementos de Kelvin con módulo de cizalla G y viscosidad η . Determinar la profundidad de indentación en función del tiempo.

Resolución: La forma equivalente de la expresión (5.52) en una dimensión viene dada por la ecuación $g(x) = \frac{\pi}{2} \tan \theta \cdot |x|$ y el radio de contacto viene dado por la ecuación $a = (2/\pi)(d/\tan \theta)$. Para obtener la fuerza se han de superponer las contribuciones elástica (problema 7 del capítulo 5)

$$F_{N,el} = \frac{8G}{\pi} \frac{d^2}{\tan \theta}$$

y viscosa (problema anterior):

$$F_N = \frac{8G}{\pi} \frac{d^2}{\tan \theta} + \frac{16\eta}{\pi \tan \theta} d\dot{d}.$$

Esta igualdad puede reescribirse de la forma siguiente

$$\frac{\pi \tan \theta \cdot F_N}{8G} = d^2 + 2\tau d\dot{d} = d^2 + \tau \frac{d(d^2)}{dt},$$

donde $\tau = \eta / G$ es el tiempo de relajación característico del medio. Integrando esta ecuación con la condición inicial dada por $d(0) = 0$ resulta en

$$d^2(t) = \frac{\pi \tan \theta \cdot F_N}{8G} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Problema 5: Un indentador cilíndrico y rígido se presiona sobre un elastómero, cuyo comportamiento se define por el «modelo estándar» (fig. 15.9). Determinar la profundidad de indentación en función del tiempo.

Resolución: El modelo estándar de un elastómero consiste en un elemento Maxwell (una rigidez G_2 y un amortiguamiento η combinados en serie) en paralelo con una rigidez G_1 . El equivalente unidimensional del elastómero es una cimentación de una sucesión de elementos de este tipo separados entre sí una distancia Δx , de forma que cada componente se caracteriza por los parámetros $4G_1\Delta x$, $4G_2\Delta x$ y $4\eta\Delta x$. El equivalente unidimensional del indentador es un rectángulo de lado $2a$. Para la fuerza normal se cumple que

$$F_N = 8G_1 a u_z + 8G_2 a (u_z - u_1),$$

expresión en la que u_1 cumple la siguiente igualdad:

$$u_z = u_1 + \tau \dot{u}_1$$

donde $\tau = \eta / G_2$. Resolviendo esta ecuación diferencial con la condición inicial dada por $u_z(0) = 0$ y $u_1(0) = 0$, se obtiene

$$u_1(t) = \frac{F_N}{8G_1 a} \left(1 - \exp \left(- \frac{G_1 t}{\tau (G_1 + G_2)} \right) \right),$$

$$u_z(t) = \frac{F_N}{8G_1 a} \left(1 - \frac{G_2}{G_1 + G_2} \exp \left(- \frac{G_1 t}{\tau (G_1 + G_2)} \right) \right).$$

En el caso límite dado por $G_2 \gg G_1$ se obtiene el resultado para un cuerpo constituido por elementos Kelvin:

$$u_z(t) = \frac{F_N}{8G_1 a} \left(1 - \exp \left(- \frac{G_1 t}{\eta} \right) \right).$$

16. LA GOMA: FRICCIÓN Y MECÁNICA DE CONTACTO



La naturaleza de la fricción entre la goma y un sustrato rígido es de gran importancia en muchas aplicaciones ingenieriles. La fricción de la goma es sustancialmente diferente a la de los materiales «duros», como metales o cerámicos, y gracias sobre todo a los trabajos de Grosch (1962), se sabe que la fricción de la goma está estrechamente relacionada con el rozamiento en el interior de la misma. Esto se refleja en el hecho de que el coeficiente de fricción depende de la temperatura, y esta dependencia está correlacionada con la del módulo complejo de cizalla. lo cual demuestra que la fricción de la goma es una *propiedad volumétrica*.

16.1 EL ROZAMIENTO ENTRE UN ELASTÓMERO Y UNA SUPERFICIE RÍGIDA Y RUGOSA

La fuerza de rozamiento puede determinarse de dos formas: mediante el cálculo directo de las componentes tangenciales de la fuerza y de su valor medio, o mediante el cálculo de la energía disipada en la deformación del material. Si en un movimiento macroscópico y uniforme caracterizado por la velocidad v , se disipa la energía \dot{W} por segundo, la potencia de disipación se puede expresar en términos de la fricción macroscópica, de forma que se cumple que

$$\dot{W} = F_R v. \quad (16.1)$$

expresión de la cual se obtiene la fuerza de rozamiento como cociente entre la potencia de disipación y la velocidad de deslizamiento

$$F_R = \frac{\dot{W}}{v}. \quad (16.2)$$

En un contacto entre una superficie rígida y un elastómero, la energía puede disiparse en la medida en que este último se deforma. Por esta razón, la rugosidad de la superficie del cuerpo rígido y la del elastómero juegan papeles completamente diferentes. Esto se ilustra en la fig. 16.1. Si el elastómero se desplaza sobre un plano rígido y liso (fig. 16.1 a), el estado de deformación del elastómero no cambia y, por consiguiente, no hay disipación y el rozamiento es cero. Si, por el contrario, el elastómero se desplaza sobre una superficie rugosa (fig. 16.1 b), el estado de deformación local en ciertas regiones cambia con el tiempo, y en el proceso se disipa energía. De lo anterior se deduce que la rugosidad de la superficie del elastómero apenas contribuye en el rozamiento; en otras palabras, la fricción depende fundamentalmente de la rugosidad de la superficie rígida. A continuación, se considera la fricción entre un elastómero y una superficie rígida, la cual se supone lisa.



Fig. 16.1 (a) Un bloque de goma rugoso sobre un plano rígido y liso; (b) un bloque de goma liso sobre un plano rígido y rugoso.

Para calcular la deformación y la energía disipada en el elastómero, se van a usar los resultados obtenidos en el tratamiento de la mecánica de contacto en superficies rugosas (capítulo 7). Si la superficie se caracteriza por el valor cuadrático medio de la distribución de las alturas de las asperezas, l , y por el valor medio del radio de curvatura de las mismas, R , entonces se cumple que el área de contacto de una aspereza viene dada por

$$\Delta A \approx Rl. \quad (16.3)$$

El diámetro característico de un micro-contacto es, por consiguiente, igual a

$$r \approx \sqrt{\Delta A} \approx \sqrt{Rl}. \quad (16.4)$$

Para una velocidad de desplazamiento v , se recorre una región de extensión r en el tiempo

$$t \approx \frac{r}{v} \approx \frac{\sqrt{Rl}}{v}. \quad (16.5)$$

La frecuencia característica de este proceso tiene el siguiente orden de magnitud

$$\tilde{\omega} \approx \frac{1}{t} \approx \frac{v}{r}. \quad (16.6)$$

Para el valor medio de la presión en los micro-contactos, se cumple que

$$\langle \sigma \rangle = \frac{F_N}{A} = \kappa^{-1} E^* \nabla z \quad (16.7)$$

donde $\kappa \approx 2$ (véase capítulo 7). Se designa ∇z al valor cuadrático medio del gradiente de la superficie

$$\nabla z = \sqrt{\langle z'^2 \rangle}. \quad (16.8)$$

El módulo de elasticidad efectivo en la goma es igual a¹

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2(1+\nu)G}{1-\nu^2} \approx 4G. \quad (16.9)$$

Dado que el módulo de cizalla depende de la frecuencia, en la expresión (16.7) se ha de incluir la frecuencia característica dada por la ecuación (16.6):

$$\langle \sigma \rangle = 4\kappa^{-1} \left| \hat{G}(\tilde{\omega}) \right| \nabla z. \quad (16.10)$$

En esta expresión se ha introducido la *magnitud* del módulo de cizalla dependiente de la frecuencia, $\left| \hat{G}(\tilde{\omega}) \right|$, ya que esta es fundamental en la determinación de la relación entre la amplitud del esfuerzo y la de la deformación. Para calcular la energía disipada por unidad de volumen en un micro-contacto, se emplea la ecuación que se introdujo en el capítulo anterior

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{\omega} \langle \sigma \rangle^2 \frac{G''(\tilde{\omega})}{\left| \hat{G}(\tilde{\omega}) \right|^2}. \quad (16.11)$$

Multiplicando por la profundidad del volumen de material deformado, $\approx r$, la expresión anterior proporciona la potencia de disipación por unidad de superficie, la cual dividida por el esfuerzo normal, permite calcular el coeficiente de fricción:

$$\mu = \xi \nabla z \frac{G''(v/r)}{\left| \hat{G}(v/r) \right|}. \quad (16.12)$$

1. Se puede asumir que la goma es prácticamente incompresible. En consecuencia, el coeficiente de Poisson es, en buena aproximación, igual a $\nu \approx 1/2$.

ξ es en este caso, un coeficiente adimensional de magnitud 1, el cual se puede calcular exactamente. Las simulaciones numéricas muestran que $\xi \approx 1$.

En la región de frecuencias intermedias y en muchos tipos de gomas, se suele cumplir que $G'' \gg G'$, de lo cual se deduce que $\frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|} \approx 1$. Por tanto, para el coeficiente de fricción se cumple que

$$\mu \approx \nabla z. \quad (16.13)$$

En consecuencia, para la región de frecuencias intermedias se obtiene un resultado muy sencillo: el coeficiente de fricción es igual al valor cuadrático medio del gradiente de la superficie. Este resultado se apoya en un fundamento físico simple que se ilustra en la fig. 16.2. Para un módulo de cizalla puramente imaginario, el medio puede comprimirse de manera rápida pero relajarse lentamente, de forma que se llega a una configuración en el contacto como la de la fig. 16.2. En esta situación, la goma solo establece contacto por un lado de las asperezas y, por consiguiente, el coeficiente de fricción, expresado como cociente entre la fuerza horizontal y la vertical, es aproximadamente igual al valor medio de la pendiente de la superficie en todas aquellas regiones donde se produce el contacto. Como muestran las simulaciones numéricas, todas estas contribuciones pueden asociarse al valor promedio del gradiente de la superficie para cualquier tipo de rugosidad, obteniéndose la expresión dada por (16.13).

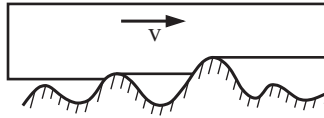


Fig. 16.2 Material viscoelástico en contacto con una superficie rugosa.

Se va a analizar con detalle la ecuación (16.12). En primer lugar conviene resaltar que $\frac{G''(v/r)}{|\hat{G}(v/r)|}$ es siempre menor o igual a 1. Por tanto, *el coeficiente de fricción no puede ser mayor que el valor medio del gradiente de la superficie*². Considerando que $G_1 \ll G_2$, para el «modelo estándar» correspondiente a la goma, y compuesto de un muelle y un elemento Maxwell, el módulo dependiente de la frecuencia es igual a

$$\hat{G}(\omega) = G_2 \frac{G_1 + i\eta\omega}{G_2 + i\eta\omega}. \quad (16.14)$$

Introduciendo la magnitud $\tau = \eta / G_2$, se obtiene el siguiente coeficiente de fricción

2. Esto se cumple para el caso de contacto sin adherencia.

$$\begin{aligned}\mu &\approx \frac{\tilde{\omega}\tau}{\sqrt{(1+(\tilde{\omega}\tau)^2)((G_1/G_2)^2+(\tilde{\omega}\tau)^2)}} \nabla z \\ &= \frac{v/\bar{v}}{\sqrt{(1+(v/\bar{v})^2)((G_1/G_2)^2+(v/\bar{v})^2)}} \nabla z,\end{aligned}\quad (16.15)$$

expresión que incluye la velocidad característica \bar{v} definida como

$$\bar{v} = \frac{r}{\tau}.\quad (16.16)$$

La representación gráfica de la función dada por la expresión (16.15) se muestra en la fig. 16.3. Para velocidades comprendidas en el intervalo $\bar{v}(G_1/G_2) < v < \bar{v}$, el coeficiente de fricción es aproximadamente constante e igual a ∇z . Sin embargo, hay que tener en cuenta que el esfuerzo en los micro-contactos varía con la velocidad; en particular y según la expresión (16.10), desde el valor dado por $\sigma_1 = 4\kappa^{-1}G_1\nabla z$ a bajas velocidades, al valor $\sigma_2 = 4\kappa^{-1}G_2\nabla z$ a velocidades altas. En este último caso, el material está sometido a esfuerzos mayores en los micro-contactos.

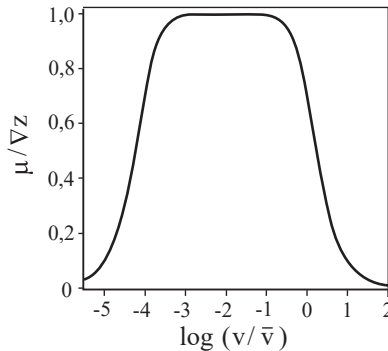


Fig. 16.3 El coeficiente de fricción en función de la velocidad de desplazamiento según el «modelo estándar» con $G_2/G_1 = 10^4$.

Para el modelo reológico descrito en el capítulo anterior por la expresión (15.49), y caracterizado por una distribución continua de tiempos de relajación, se tiene

$$\begin{aligned}G'(\tilde{\omega}) &= G_0 + G_1\tau_1\tilde{\omega}(\arctan(\tilde{\omega}\tau_2) - \arctan(\tilde{\omega}\tau_1)) \\ G''(\tilde{\omega}) &= \frac{1}{2}G_1\tau_1\tilde{\omega} \ln \left(\frac{\tau_2^2 1 + (\tilde{\omega}\tau_1)^2}{\tau_1^2 1 + (\tilde{\omega}\tau_2)^2} \right).\end{aligned}\quad (16.17)$$

El correspondiente coeficiente de fricción se representa gráficamente en la fig. 16.4. A diferencia del modelo estándar, el coeficiente de fricción en gomas reales es prácticamente constante aun cuando la velocidad varía en varios órdenes de magnitud. El valor en la «meseta» es, también en este caso, aproximadamente igual al gradiente medio de la superficie, ∇z .

La dependencia del coeficiente de fricción con la temperatura está también determinada por la del módulo complejo de cizalla ya que la curva ($\mu - \log v$) se desplaza en la misma dirección y magnitud que la del módulo dependiente de la frecuencia. Esta propiedad se emplea en la construcción de *curvas maestras* de la misma forma que en la «medida experimental» del módulo de cizalla dependiente de la frecuencia (véase capítulo 15). Mediante este procedimiento

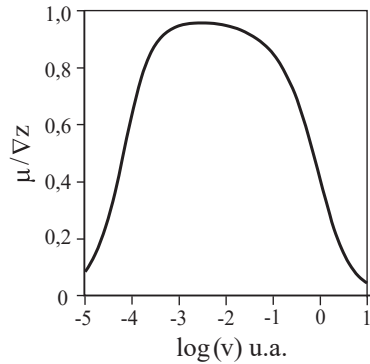


Fig. 16.4 Coeficiente de fricción en función de la velocidad de desplazamiento para una serie Prony como la mostrada en la fig. 15.15, y para los parámetros asignados al modelo (introducidos en el capítulo 15).

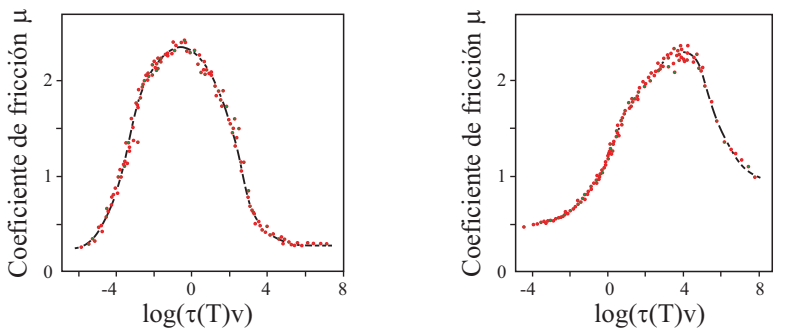


Fig. 16.5 Datos experimentales obtenidos por Grosch que muestran la dependencia del coeficiente de fricción en dos tipos de goma sobre sustratos diferentes (K.A. Grosch. 'The Relation between the friction and visco-elastic properties of rubber'. *Proc. Roy. Soc. A* 274(1356), 21-39 (1963)).

se puede obtener el comportamiento en todo el dominio de velocidades, el cual no es accesible experimentalmente. Cuando la temperatura aumenta, la curva se desplaza hacia la derecha (hacia la región de altas velocidades). Por tanto, con una curva maestra para una temperatura determinada y la función desplazamiento WLF, se puede calcular el coeficiente de fricción a cualquier temperatura y velocidad. La fig. 16.5 muestra gráficamente los datos experimentales (curvas maestras) correspondientes a dos elastómeros diferentes.

16.2 RESISTENCIA A LA RODADURA

Durante la rodadura pura en ausencia de deslizamiento, en elastómeros existe disipación de energía y la resistencia asociada a la misma. En general, interesa que esta resistencia sea mínima al mismo tiempo que la fricción dinámica sea máxima. Esto es factible dado que la frecuencia a la que ocurre el deslizamiento, $\omega_{\text{deslizamiento}} \approx v/\lambda$ (λ es la longitud de onda que caracteriza la rugosidad del asfalto, cuyo valor suele estar en torno a $10-100 \mu\text{m}$) y la frecuencia a la que ocurre la rodadura, $\omega_{\text{rodadura}} \approx v/a$ (a es el radio de contacto igual a 5 cm), se diferencian en dos o tres órdenes de magnitud. Para una rueda en régimen normal de funcionamiento, es deseable que, a frecuencias en torno a $\omega_{\text{deslizamiento}}$, el módulo de pérdida sea mayor que el de almacenamiento, $G'' \geq G'$, y que lo contrario, $G'' \ll G'$, suceda a frecuencias en torno a ω_{rodadura} (fig. 16.6).

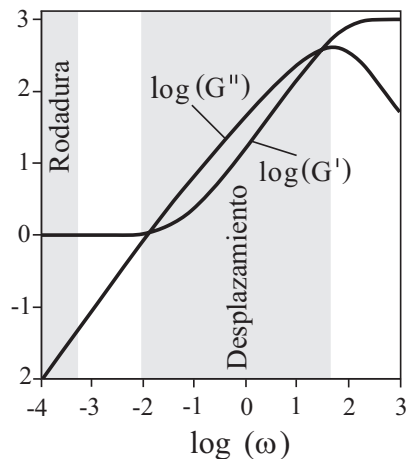


Fig. 16.6 Módulos de almacenamiento y pérdida en función de la frecuencia para un elastómero descrito por el modelo reológico del capítulo 15. Para que la resistencia a la rodadura sea baja y la fricción dinámica alta (y constante), las condiciones han de definirse de manera que las frecuencias características de la rodadura se sitúen en la zona marcada a la izquierda, y las del desplazamiento en la zona marcada a la derecha.

En el intervalo de frecuencias donde se cumple el requisito para que exista rodadura, $G'' \ll G'$, el módulo de almacenamiento apenas depende de la frecuencia y coincide con el valor del módulo estático G_∞ . Por consiguiente, se puede considerar, en primera aproximación, que se trata de un caso de contacto hertziano puramente elástico.

Se puede estimar la energía disipada durante la rodadura si se considera esta última como el «reposicionamiento continuo y repetitivo» de una rueda. Cuando una esfera de radio R rueda sobre un plano rígido, se cumplen las siguientes relaciones hertzianas para la fuerza normal F_N y el radio de contacto a :

$$F_N \approx \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} \approx \frac{16}{3} G_\infty R^{1/2} d^{3/2}, \quad (16.18)$$

$$a^2 \approx R d, \quad (16.19)$$

donde d es la profundidad de indentación. Se calcula la frecuencia característica mediante

$$\omega \approx \frac{v}{a}, \quad (16.20)$$

y la amplitud de la deformación mediante

$$\varepsilon_0 \approx \frac{d}{a}. \quad (16.21)$$

La potencia de la energía disipada por unidad de volumen se deriva de la expresión (15.23)

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0^2 G''(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{v}{a} \left(\frac{d}{a} \right)^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right) \quad (16.22)$$

y la potencia de disipación para todo el volumen $\sim (2a)^3$,

$$\dot{W} \approx 4v d^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right). \quad (16.23)$$

Dividiendo la potencia por la velocidad, se obtiene la fuerza de resistencia a la rodadura

$$F_r \approx 4d^2 G'' \left(\frac{v}{a} \right). \quad (16.24)$$

A frecuencias bajas, el módulo de pérdida es siempre proporcional a la frecuencia, y por tanto, se puede escribir de la forma siguiente

$$G''(\omega) = \bar{\eta} \omega, \quad (16.25)$$

donde $\bar{\eta}$ es la viscosidad dinámica a bajas frecuencias. La resistencia a la rodadura es, por tanto, igual a

$$F_r \approx 4\bar{\eta} \left(\frac{a^2}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{a} \right) = 4\bar{\eta} \frac{a^3}{R^2} v. \quad (16.26)$$

Teniendo en cuenta el resultado hertziano (5.24), que se puede reescribir de la siguiente forma

$$a^3 = \frac{3RF_N}{16G_\infty}, \quad (16.27)$$

obteniéndose la siguiente expresión para la fuerza de resistencia a la rodadura

$$F_r \approx F_N \frac{3}{4} \frac{\bar{\eta}}{G_\infty} \frac{v}{R} = F_N \frac{3}{4} \frac{v\tau}{R}, \quad (16.28)$$

y la siguiente para el «coeficiente de fricción de rodadura»

$$\mu_{rodadura} = \frac{F_r}{F_N} \approx \frac{3}{4} \frac{v\tau}{R}, \quad (16.29)$$

donde $\tau = \bar{\eta} / G_\infty$ es el tiempo de relajación del elastómero. Esta ecuación es correcta salvo por un factor adimensional de orden de magnitud 1. La fricción de rodadura es, por tanto, proporcional al producto de la velocidad de rodadura por el tiempo (máximo) de relajación de la goma, e inversamente proporcional al radio de curvatura de la esfera.

16.3 EL CONTACTO ADHERENTE CON ELASTÓMEROS

Hasta ahora se ha supuesto que no existe adherencia entre el elastómero y la superficie rígida. Sin embargo, esto no sucede cuando las superficies son suficientemente lisas. Se va a analizar el contacto adherente entre una esfera rígida y un elastómero de superficies planas (fig. 16.7). El borde del contacto puede visualizarse y tratarse como si fuese un frente de grieta³. En el equilibrio, se puede suponer que el elastómero se comporta como un cuerpo elástico, caracterizado por un módulo de cizalla G_∞ y un módulo elástico o módulo de Young efectivo dado por

$$E^* = \frac{2(1+\nu)G_\infty}{1-\nu^2} = \frac{2G_\infty}{(1-\nu)} = 4G_\infty \quad (16.30)$$

En estas condiciones, se cumple la ecuación JKR (6.20), que relaciona la fuerza normal F_N con el radio de contacto a :

$$F_N = E^* \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{R} - \left(\frac{8\gamma^* \pi a^3}{E^*} \right)^{1/2} \right]. \quad (16.31)$$

γ^* es la energía interfacial, es decir, la energía necesaria para generar una unidad de área de interfase. La igualdad (16.31) se puede expresar de forma que permita tratar el borde de contacto como si fuese un frente de grieta. Para ello, se despeja primero γ^* de la ecuación (16.31):

$$\gamma^* = \left(F_N - \frac{4}{3} \frac{E^* a^3}{R} \right)^2 \frac{1}{8\pi a^3 E^*}. \quad (16.32)$$

Dado que la energía interfacial efectiva γ^* es igual a la carga lineal por unidad de longitud necesaria para «cerrar la grieta», es decir, para desplazar el frente de la grieta de forma que el radio de contacto aumente, la ecuación (16.32) puede interpretarse como una condición de equilibrio para las fuerzas lineales a lo largo del frente de la grieta. En el lado izquierdo de la ecuación figura la expresión de la fuerza lineal, la cual se determina por las fuerzas de van der Waals entre las superficies. Correspondientemente, en el lado derecho debe aparecer la expresión de la fuerza lineal que resulta de las deformaciones elásticas del medio continuo y que actúa en sentido contrario. Asignando el lado derecho de la ecuación (16.32) como D , se tiene

3. La teoría original de Johnson, Kendall y Roberts se basa exactamente en esa analogía.

$$D = \left(F_N - \frac{4 E^* a^3}{3 R} \right)^2 \frac{1}{8\pi a^3 E^*} \quad (16.33)$$

Y se puede escribir la condición de equilibrio de esta manera

$$\gamma^* = D. \quad (16.34)$$

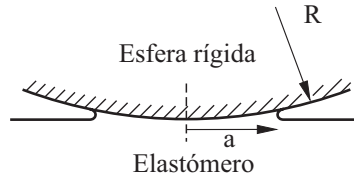


Fig. 16.7 Contacto entre una esfera rígida y un elastómero. El borde del contacto puede considerarse como el frente de una grieta.

La diferencia $D - \gamma^*$ puede interpretarse como la «fuerza aplicada» al frente de grieta, la cual es cero en el equilibrio. Si la fuerza normal cambia, entonces la fisura deja de estar en equilibrio. En un cuerpo puramente elástico bajo la acción de una «fuerza» constante igual a $D - \gamma^*$, la grieta avanza a una velocidad cada vez mayor hasta que alcanza un valor comparable a la velocidad de transmisión de las ondas acústicas superficiales en un continuo elástico (*ondas de Rayleigh*). En un cuerpo viscoelástico, esta velocidad alcanza un valor finito debido a la alta disipación. Si el movimiento es lento, la mayor parte de la región de contacto puede considerarse como puramente elástica, mientras que todas las pérdidas de energía se localizan en «zonas de procesado» relativamente pequeñas y cercanas al frente de grieta. Maugis y Barquins propusieron la siguiente ecuación cinética, la cual relaciona la carga lineal efectiva, $D - \gamma^*$, con la velocidad de avance de la grieta v :

$$D - \gamma^* = \gamma^* \Phi(\tau(T)v), \quad (16.35)$$

en dicha expresión, $\tau(T)$ es la función de Williams-Landel-Ferry. En la región de velocidades intermedias, la función adimensional $\Phi(\tau(T)v)$ depende de la velocidad v . Esta dependencia adopta típicamente la forma de una función potencia:

$$\Phi(\tau(T)v) = \alpha(T)v^n. \quad (16.36)$$

El exponente n suele estar comprendido entre los valores 0,25 y 0,7. Como ejemplo, la fig. 16.8 muestra la función Φ para el caso de una esfera de vidrio sobre poliuretano. Las ecuaciones (16.35) y (16.36) permiten tratar la cinética

de los procesos de adherencia bajo condiciones mecánicas distintas (véase, por ejemplo, el problema 3 de este capítulo).

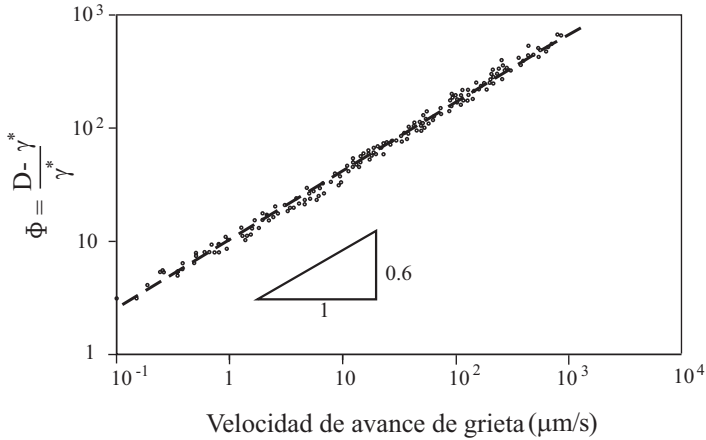


Fig. 16.8 La «función de disipación» Φ representada como magnitud dependiente de la velocidad de avance de la grieta para el caso de una esfera de vidrio sobre poliuretano. Los datos corresponden a dos radios de curvatura de la esfera y a dos temperaturas. La curva maestra se obtiene a partir de ensayos de pelado con distintos indentadores. Fuente: M. Barquins, «Adherence, friction and wear of rubber-like materials», *Wear* **158**, 87-117 (1992). El comportamiento obtenido puede aproximarse mediante la función $\Phi \approx 10 \cdot (v/v_0)^{0.6}$ con $v_0 = 1 \mu\text{m}/\text{s}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Se tiene una superficie rígida descrita por una superposición de dos funciones aleatorias, una de ellas caracterizada por el número de onda k_1 y el valor cuadrático medio del gradiente ∇z_1 , y la otra caracterizada por el número de onda $k_2 \gg k_1$ y un valor cuadrático medio del gradiente ∇z_2 . Determinar el coeficiente de fricción entre esta superficie y un elastómero.

Resolución: En el capítulo 10 se vio que las contribuciones del coeficiente de fricción a distintas escalas se suman siempre y cuando cada una de estas contribuciones sea menor que 1 (en la práctica, menor que 0,3).

En primer lugar, se considera una superficie rugosa caracterizada por un vector de onda medio k_1 y una distribución de vectores de onda de la misma magnitud. En una superficie de tales características, la rugosidad y la dispersión de los valores de altura l_1 tienen el mismo orden de magnitud, $l_1 \approx h_1$. Se puede estimar el radio de curvatura de los máximos si se representa el perfil local de la superficie por la función siguiente $z = h_1 \cos k_1 x \approx h_1 \left(1 - \frac{1}{2} k_1^2 x^2\right)$, lo cual resulta en $1/R = |z''(0)| \approx h_1 k_1^2$. El diámetro característico de los micro-contactos puede estimarse mediante la expresión

$$r \approx \sqrt{Rl} \approx \sqrt{\frac{h_1}{h_1 k_1^2}} = \frac{1}{k_1}$$

y es por tanto del mismo orden de magnitud que el de la dimensión lineal de la ondulación superficial ($\approx \lambda_1 / 2\pi$, donde λ_1 es la longitud de onda característica).

En el caso de que haya rugosidad a solo una escala y esté caracterizada por un número de onda k_1 , se podría calcular el coeficiente de fricción empleando la ecuación (16.12), la cual se reescribe de la siguiente forma

$$\mu_1 \approx \nabla_{z_1} \cdot \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|}$$

Si por el contrario, existen irregularidades a dos escalas diferentes, entonces el coeficiente de fricción se obtiene sumando las contribuciones de cada una de las escalas (siempre y cuando estas sean menores que 1), lo cual resulta en

$$\mu \approx \mu_1 + \mu_2 \approx \nabla_{z_1} \cdot \frac{G''(k_1 v)}{|G(k_1 v)|} + \nabla_{z_2} \cdot \frac{G''(k_2 v)}{|G(k_2 v)|}$$

Problema 2: Determinar el coeficiente de resistencia a la rodadura de una rueda rígida sobre una capa elástica constituida por una serie de elementos idénticos dispuestos en fila (cimentación o elemento Winkler, véase la fig. 16.9). Cada elemento consiste en un muelle (rigidez cdx) y un émbolo (constante de amortiguamiento δdx) conectados en paralelo.

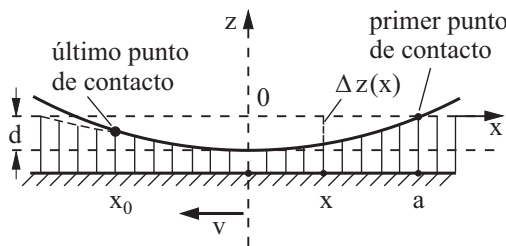


Fig. 16.9 Una rueda rígida se mantiene inmóvil, mientras que una placa rígida adherida a una capa viscoelástica, la cual se modeliza aquí mediante una cimentación tipo Winkler, se desplaza hacia la izquierda a la velocidad v . La «profundidad de indentación» es constante e igual a d .

Resolución: El perfil de la rueda en torno al punto de contacto se aproxima mediante la expresión

$$z = -d + \frac{x^2}{2R}$$

donde d es la profundidad de indentación. Para la pendiente en el punto x se obtiene $\tan \theta = z' = x/R$. Un movimiento horizontal del sustrato a la velocidad v en el sentido del eje x negativo, produce un movimiento vertical de los muelles caracterizado por la velocidad $\dot{z} = -vz' = -vx/R$. La fuerza de los muelles que actúa sobre el disco es igual a

$$dF_z = (-cz - \delta \dot{z}) dx = (-cz + \delta vz') dx = \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) dx$$

La componente z de la fuerza global se calcula mediante esta ecuación

$$F_N = \int_{x_0}^a \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) dx$$

y la componente x según

$$F_r = \int_{x_0}^a \left(-c \left(-d + \frac{x^2}{2R} \right) + \delta \cdot v \frac{x}{R} \right) \frac{x}{R} dx$$

donde a designa la coordenada del primer punto de contacto a la derecha, y x_0 la coordenada del último punto de contacto a la izquierda. La coordenada a se calcula mediante la condición $z = 0$, y x_0 mediante $dF_z = 0$. De aquí se llega a:

$$a = \sqrt{2Rd} \quad \text{y} \quad x_0 = -\sqrt{2Rd + \left(\frac{v\delta}{c} \right)^2} + \frac{v\delta}{c}.$$

Mediante la sustitución $\xi = x/\sqrt{2Rd}$, las expresiones de F_N y F_r pueden formularse de la siguiente manera

$$F_N = 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) d\xi,$$

$$F_r = 2d^2 c \int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa \xi) \xi d\xi,$$

usando para ello las identidades

$$\kappa = \frac{2^{1/2} \delta \cdot v}{cd^{1/2} R^{1/2}} = \frac{2\delta \cdot v}{ca}$$

y

$$\xi_0 = -\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} + \frac{\kappa}{2}.$$

El coeficiente de resistencia a rodadura se calcula mediante la siguiente ecuación

$$\mu = \frac{F_r}{F_N} = \left(\frac{2d}{R}\right)^{1/2} \cdot \frac{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa\xi) \xi d\xi}{\int_{\xi_0}^1 (1 - \xi^2 + \kappa\xi) d\xi}.$$

Se van a considerar dos casos límites:

(a) $\kappa \ll 1$: Velocidades muy bajas. En este caso, son válidas las siguientes aproximaciones $F_N = \frac{4}{3} 2^{1/2} R^{1/2} d^{3/2} c$ y $F_r = \frac{4}{3} d^2 c \kappa$, y el coeficiente de resistencia a la rodadura se puede calcular mediante la expresión

$$\mu = \frac{d^{1/2}}{2^{1/2} R^{1/2}} \kappa = \frac{\delta v}{cR} = \frac{\tau v}{R}$$

donde $\tau = \delta / c$ (este resultado puede compararse con el de la estimación dada por la expresión (16.29)).

(b) $\kappa \gg 1$: Velocidades muy altas, como las que se dan cuando se circula sobre una capa de fluido ($c = 0$). En este caso, se cumplen las aproximaciones $F_N = \delta v d$ y $F_r = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{d^{3/2} \delta \cdot v}{R^{1/2}}$, lo que resulta en la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia a la rodadura⁴

$$\mu = \frac{2^{3/2}}{3} \left(\frac{F_N}{\delta v R}\right)^{1/2}.$$

Problema 3: Determinar la cinética de un proceso de pelado de una esfera en contacto con un elastómero, cuando a la esfera, inicialmente en equilibrio y sin soportar carga, se le aplica en el tiempo $t = 0$ una fuerza $F_N = -F_A = -\frac{3}{2} \gamma^* \pi R$, $F_N = -1,5 \cdot F_A$ o $F_N = -2 \cdot F_A$. Para ello, se emplearán los siguientes datos: $R = 2$ mm, $E^* = 10$ MPa, $\gamma^* = 0,05$ J/m², $\Phi \approx 10 \cdot (v/v_0)^{0,5}$, y $v_0 = 1$ $\mu\text{m} / \text{s}$.

4. Para un sistema tridimensional, δ ha de sustituirse por $4\bar{\eta}$, dando lugar a $\mu = \frac{1}{3} \left(\frac{2F_N}{\bar{\eta}vR}\right)^{1/2}$. La explicación se detalla en el capítulo 19.

Resolución: El problema se resuelve empleando la ecuación (16.35), la cual se puede escribir de la siguiente manera:

$$D - \gamma^* = 10\gamma^* \left(v / v_0 \right)^{0,5}.$$

Empleando la siguiente definición para la fuerza de adherencia

$$F_A = \frac{3}{2} \pi \gamma^* R \quad (\text{en este caso} = 0,47 \cdot 10^{-3} \text{ N})$$

y la siguiente para el radio de contacto en el equilibrio en ausencia de carga

$$a_0 = \left(9 \frac{\gamma^* \pi R^2}{2E^*} \right)^{1/3} \quad (\text{en este caso} = 6,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}),$$

se puede expresar la «carga lineal» D de la siguiente manera:

$$D = \gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2.$$

Antes del tiempo $t = 0$ existe equilibrio en ausencia de carga, por lo que el radio de contacto es igual a a_0 . A partir de $t = 0$, se cumple la siguiente ecuación

$$\gamma^* \left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2 - \gamma^* = 10\gamma^* \left(\frac{v}{v_0} \right)^{0,5},$$

de la cual se llega a la expresión de la velocidad

$$v = -\frac{da}{dt} = \frac{v_0}{100} \left(\left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} - \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2} \right]^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

En términos de las variables adimensionales $\tilde{a} = a / a_0$ y $\tilde{t} = tv_0 / 100a_0$, se obtiene la ecuación diferencial

$$-\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \left(\left[\frac{1}{4} \frac{F_N}{F_A} \tilde{a}^{-3/2} - \tilde{a}^{3/2} \right]^2 - 1 \right)^{1/2}$$

definida por la condición inicial $\tilde{a} = 1$ para $\tilde{t} = 0$. Los resultados de la integración numérica de dicha ecuación para tres valores de F_N / F_A distintos se muestran en la fig. 16.10.

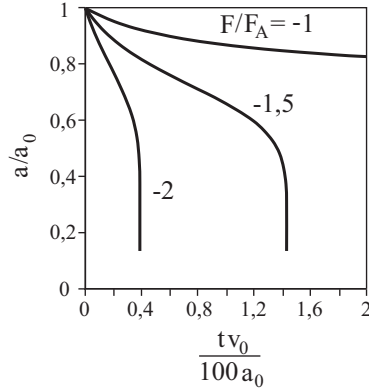
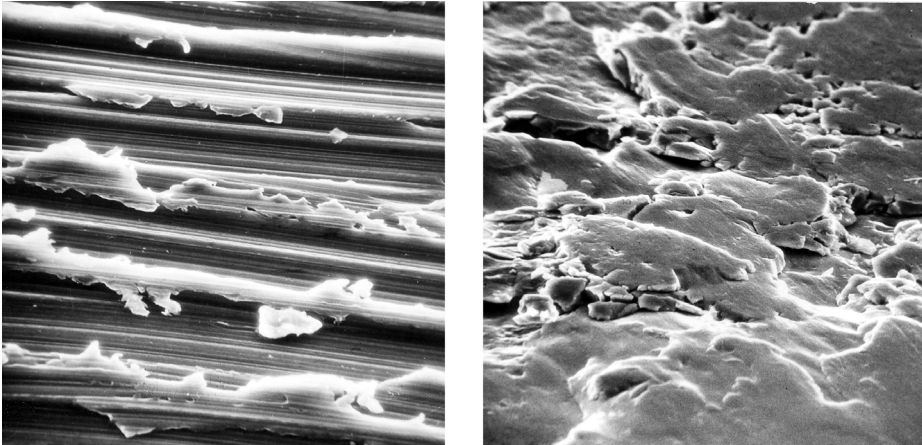


Fig. 16.10 Radio de contacto en función del tiempo para varios valores de fuerza normal.

Para $F_N = -F_A$ el sistema se aproxima al equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. La fuerza normal $F_N = -1,5 \cdot F_A$ corresponde a una fuerza supercrítica de despegado. En este caso, la esfera se desprende tras un tiempo $\sim 1,4 \cdot 100a_0 / v_0 \approx 9 \cdot 10^3$ s.

17. DESGASTE



17.1 INTRODUCCIÓN

El desgaste es una de las causas principales del deterioro de piezas y componentes, y del consiguiente fallo de funcionamiento de máquinas y aparatos. Por tanto la reducción del desgaste mediante la elección apropiada de materiales, recubrimientos, diseño de las superficies o lubricación, cobra una gran importancia económica.

Aun cuando el rozamiento y el desgaste siempre aparecen juntos en la práctica, son fenómenos cualitativamente diferentes, ya que es posible concebir rozamiento sin desgaste, al menos en modelos. Por ejemplo en el modelo de Prandtl-Tomlinson existe rozamiento pero no desgaste. Lo contrario, imaginar desgaste sin rozamiento también es posible, dado que el desgaste puede producirse bien por efecto de una fuerza normal o carga, o por un movimiento tangencial.

El que la fricción y el desgaste vengan dados por mecanismos físicos a menudo diferentes, se refleja en el hecho de que la velocidad a la que se produce el desgaste en distintos pares de materiales sometidos a fricción puede variar en varios órdenes de magnitud, aun cuando las condiciones sean las mismas. Hay que remarcar también que, en determinadas situaciones, los procesos que causan rozamiento producen a su vez desgaste de manera simultánea, como ocurre en la deformación plástica de micro-contactos. En estos casos, el rozamiento y el desgaste están estrechamente interrelacionados.

Si bien en la mayoría de los casos, el desgaste se percibe como un fenómeno indeseado, es también la base de muchos procesos tecnológicos deseables como son los de afilado, limado, pulido o arenado.

Según el mecanismo físico que lo genera, se suele hacer la siguiente distinción entre los tipos de desgaste:

- Desgaste por abrasión o abrasivo, el cual ocurre cuando dos cuerpos de dureza muy diferente entran en contacto, o bien cuando la capa intermedia contiene partículas sólidas.
- Desgaste por adherencia o adhesivo, el cual ocurre siempre que exista un contacto entre cuerpos de igual dureza, o muy parecida.
- Desgaste por corrosión o corrosivo, el cual está asociado a transformaciones químicas en la superficie, y al consiguiente desprendimiento de capas superficiales.
- Desgaste por fatiga superficial o simplemente fatiga superficial, que ocurre siempre que la superficie se someta repetidamente a un ciclo de carga que cause deslizamiento o rodadura y que, en caso de aplicarse una vez, no produzca cambios aparentes en la superficie.

17.2 DESGASTE ABRASIVO

En un desgaste por abrasión, los picos de las asperezas del material más duro penetran en el material más blando, produciendo pequeños cortes. El deslizamiento genera a su vez surcos o estrías en la misma dirección, los cuales son característicos de este tipo de desgaste. Para estimar la velocidad a la que se produce el desgaste por abrasión, se parte de un modelo sencillo en el que todos los micro-contacts en la superficie dura tienen forma cónica. En primer lugar, se analiza cada micro-contacto de manera individual cuando se le somete a una carga ΔF_N .

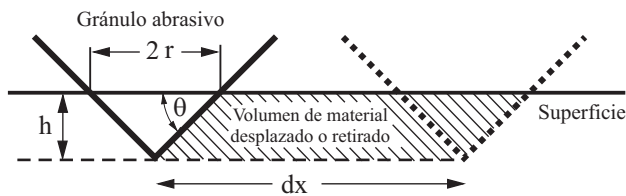


Fig. 17.1 Estriado en un material mediante un cono rígido.

Bajo la acción de una fuerza normal, el cono penetra en el material más blando. Considerando la definición de dureza σ_0 (del material más blando), se cumple que

$$\Delta F_N = \sigma_0 \cdot \pi r^2. \quad (17.1)$$

La proyección del área del cono en la dirección vertical es igual a rh . Cuando el cono se desplaza una distancia dx , este extrae una cantidad de material de volumen dV , el cual viene dado por la siguiente expresión

$$dV = rh \cdot dx = r^2 \tan \theta \cdot dx = \frac{\Delta F_N \tan \theta \cdot dx}{\pi \sigma_0}. \quad (17.2)$$

En una estimación muy aproximada, se identifica esta magnitud con el volumen del material desgastado o volumen de desgaste. Por consiguiente, la velocidad de desgaste –definida como el volumen de material retirado dividido por el camino recorrido– es igual a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\Delta F_N \tan \theta}{\pi \sigma_0}. \quad (17.3)$$

Sumando todas las contribuciones de las micro-rugosidades, se obtiene el volumen de material desgastado

$$V = \frac{F_N \overline{\tan \theta}}{\pi \sigma_0} x, \quad (17.4)$$

donde $\overline{\tan \theta}$ es la media ponderada de los valores $\tan \theta$ en todos los micro-contacts. Esta expresión se suele escribir en forma de *ecuación de desgaste* según:

$$V = \frac{k_{abr} F_N}{\sigma_0} x. \quad (17.5)$$

El volumen de material desgastado es proporcional a la fuerza normal y a la distancia recorrida, e inversamente proporcional a la dureza del material. El *coeficiente de desgaste*, k_{abr} , define las características geométricas de la superficie abrasiva.

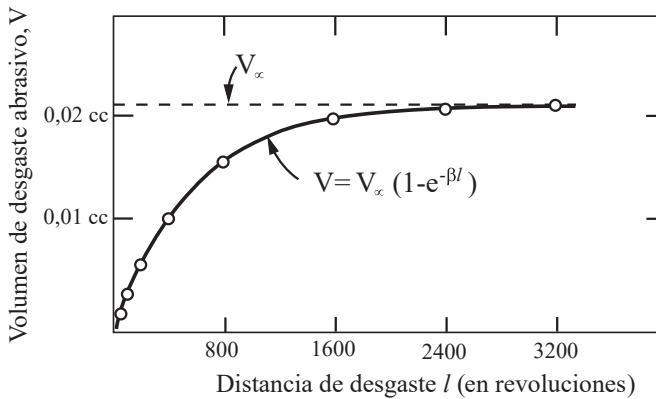
El desgaste entre un material blando y un cuerpo abrasivo que contiene partículas duras en su interior, se denomina *desgaste de dos cuerpos*. Un tipo especial de desgaste abrasivo es el producido entre cuerpos en presencia de un medio intermedio que contiene partículas adhesivas. En este caso se habla de *desgaste de tres cuerpos*.

La tabla 17.1 muestra que los coeficientes de desgaste en el caso del desgaste de dos cuerpos suelen estar comprendidos entre los valores $6 \cdot 10^{-2}$ y $6 \cdot 10^{-3}$, mientras que los correspondientes al desgaste de tres cuerpos son aproximadamente un orden de magnitud menor.

La ecuación de desgaste (17.5) muestra que el volumen de material desgastado es proporcional a la distancia recorrida. Esto se cumple siempre que las irregularidades del material más duro no se «rellenen» del material más blando. Cuando esto ocurre, la velocidad de desgaste disminuye con el tiempo (fig. 17.2).

Tabla 17.1 Coeficientes de desgaste abrasivo

Autores	Tipo de desgaste	Tamaño de grano (μ)	Material	$k (\times 10^{-3})$
Spurr et al. (1975)	2-cuerpos	–	varios	60
Spurr et al. (1975)	2-cuerpos	110	varios	50
Avient et al. (1960)	2-cuerpos	40-150	varios	40
Lopa (1956)	2-cuerpos	260	acero	27
Kruschov and Babichev (1958)	2-cuerpos	80	varios	8
Samuels (1956)	2-cuerpos	70	latón	5
Toporov (1958)	3-cuerpos	150	acero	2
Rabinowicz et al. (1961a)	3-cuerpos	80	acero	1,7
Rabinowicz et al. (1961a)	3-cuerpos	40	varios	0,7

**Fig. 17.2** Variación del coeficiente de desgaste con el tiempo. Fuente: T.O. Mulhearn y L.E. Samuels. «The abrasion of metals: A model of the process». *Wear* 5, 478-498 (1962).

Siempre y cuando las propiedades superficiales del otro material no cambien (lo cual se puede conseguir limpiando regularmente la superficie de partículas), el volumen del material desgastado es proporcional a la distancia. La ecuación (17.5) predice que la velocidad a la que se produce el desgaste es inversamente proporcional a la dureza, o lo que es lo mismo, la magnitud inversa dx/dV , denominada *resistencia al desgaste*, es proporcional a la dureza del material más blando. Esta relación de proporcionalidad se ha demostrado experimentalmente en numerosas ocasiones (fig. 17.3). Por el contrario, la dureza del abrasivo apenas influye en la velocidad de desgaste.

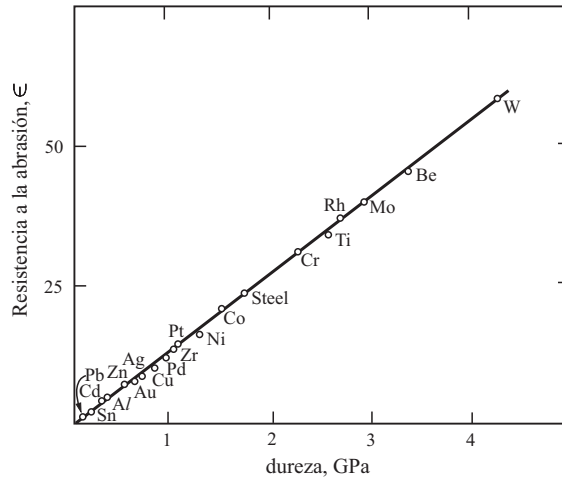


Fig. 17.3 La resistencia al desgaste de los metales es, con gran exactitud, proporcional a la dureza. Fuente: M. M. Хрущев, М. А. Бабичев. Исследования изнашивания металлов (Investigación del desgaste en metales). Moscú, (1960).

En la elección del material abrasivo no solo hay que tener en cuenta la dureza, sino también la capacidad de producir cantos afilados y cortantes. Por ello se suelen preferir materiales frágiles y de alta dureza.

La ecuación (17.4) se puede interpretar de otra manera. Dado que el estriado determina un coeficiente de fricción μ igual a $\tan \theta$, la igualdad (17.4) puede también expresarse de la siguiente forma

$$V = \tilde{k} \frac{F_N \mu x}{\sigma_0} = \tilde{k} \frac{W}{\sigma_0}, \quad (17.6)$$

donde W es el trabajo de fricción. Por consiguiente, el volumen de material desgastado es proporcional a la energía disipada dividida por la dureza del material. Dicha relación de proporcionalidad se cumple también en el caso de desgaste adhesivo (véase la siguiente sección) y en el de desgaste erosivo (véase el problema 1 de este capítulo), mientras que en otros tipos de desgaste la expresión se suele considerar como «ecuación general de desgaste».

17.3 DESGASTE ADHESIVO

Si el par de materiales sometidos a fricción son de dureza parecida, entonces es otro tipo de desgaste el que tiene lugar, el llamado desgaste por adherencia. Este es el dominante en aquellas aplicaciones tribológicas donde el desgaste haya de reducirse al mínimo, y por tanto haya que evitar las condiciones que favorecen la aparición del desgaste abrasivo. El mecanismo del desgaste adhesivo puede

imaginarse como la formación de soldaduras entre micro-rugosidades y la liberación posterior de fragmentos próximos a la superficie (partículas de desgaste). A continuación, se procede a analizar las condiciones bajo las que tiene lugar una micro-soldadura y la liberación de una partícula según este mecanismo.

Se analizará el caso en el que, durante el desplazamiento relativo de dos cuerpos en contacto y sometidos a rozamiento, una aspereza entra en contacto con otra, forma un micro-contacto de diámetro D y finalmente se aleja (fig. 17.4).

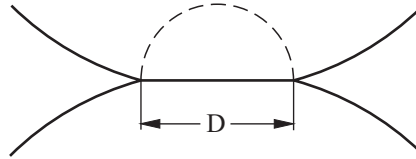


Fig. 17.4 Formación de una unión de soldadura entre dos micro-rugosidades.

En el estado condensado en el que típicamente se encuentran las capas superficiales, los tres esfuerzos críticos, esto es, el esfuerzo de fluencia, el límite de fractura y la «tensión de soldadura», tienen el mismo orden de magnitud. Cuando las rugosidades entran en contacto, el esfuerzo en el micro-contacto alcanza el valor de la dureza del material, σ_0 , y, en consecuencia, se produce la soldadura de las rugosidades. En el momento de separarse, justo antes de romperse la unión, el esfuerzo alcanza aproximadamente el mismo valor σ_0 pero con distinto signo.

La energía elástica almacenada antes de la ruptura es $U_{el} \approx \frac{\sigma_0^2}{2G} D^3$, y permitirá la liberación de la partícula siempre que dicha energía sea mayor que la energía de adhesión, $U_{adh} \approx \gamma_{ef} D^2$, es decir, la energía necesaria para producir dos superficies libres. γ_{ef} es, en este caso, la *energía superficial efectiva* de las interfases internas en el material (también llamada resistencia a la fractura). Por consiguiente, la partícula se libera solo cuando $U_{el} > U_{adh}$:

$$D > \frac{2G\gamma_{ef}}{\sigma_0^2}. \quad (17.7)$$

Para muchos cristales de estructura simple, se cumple que $\sigma_0 \propto G$. En estos casos la ecuación (17.7) se puede escribir como

$$D_c = const \frac{\gamma_{ef}}{\sigma_0} \quad (17.8)$$

Esta ecuación determina el diámetro de las partículas de desgaste en función de la dureza y de la energía superficial efectiva. El valor experimental de la constante en la expresión (17.8) es en torno a 60000^1 .

Dado que la liberación de una partícula deja una oquedad de profundidad aproximadamente igual al diámetro de la misma, se puede asumir que la rugosidad producida por desgaste es del mismo orden de magnitud que la dada por la expresión (17.8).

En muchas aplicaciones se requiere que el margen de tolerancia entre piezas móviles sea lo más pequeño posible. Sin embargo, en la práctica, dicho margen no puede ser demasiado pequeño, dado que puede conducir a un deterioro progresivo de las superficies, el cual se denomina «gripaje» o «gripado». Es razonable asumir que el margen de tolerancia mínimo, h_{\min} , es del mismo orden de magnitud que el diámetro característico de las partículas de desgaste, lo cual hace posible su cálculo mediante la siguiente expresión empírica

$$h_{\min} = 180.000 \frac{\gamma_{ef}}{\sigma_0}. \quad (17.9)$$

Para estimar la velocidad a la que se produce el desgaste adhesivo, se consideran dos superficies rugosas en contacto (fig. 17.5).

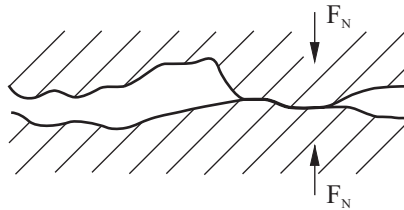


Fig. 17.5 Dos superficies rugosas en contacto.

La fuerza normal F_N depende del área de contacto y de la dureza de los cuerpos en contacto según la expresión:

$$F_N = \sigma_0 A. \quad (17.10)$$

Si el valor medio del diámetro de un micro-contacto es D y el número de micro-contactos es n , se tiene que $A \approx \frac{\pi D^2}{4} \cdot n$, de lo cual se llega a

$$n = \frac{4A}{\pi D^2} = \frac{4F_N}{\pi D^2 \sigma_0}. \quad (17.11)$$

1. Véase el libro de E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).

La «longitud de existencia» de un micro-contacto, es decir, la distancia a lo largo de la cual un micro-contacto se forma y se destruye, es del mismo orden de magnitud que el diámetro del micro-contacto, D . Por tanto, el número total de contactos que se producen en la distancia x es igual a

$$N \approx n \frac{x}{D} \approx \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 D^3}. \quad (17.12)$$

Si en vez de suponer que todos los micro-contactos que se forman y se destruyen dan lugar a la liberación de una partícula, se supone que la formación de partículas viene dada por la probabilidad k^* , entonces el volumen total de las partículas de desgaste generadas es igual a

$$V = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \frac{\pi D^3}{8} k^* N = \frac{\pi D^3}{12} k^* \frac{4F_N x}{\pi \sigma_0 D^3} = \frac{k^*}{3} \frac{F_N x}{\sigma_0}. \quad (17.13)$$

Englobando $k^*/3$ en un único coeficiente k_{adh} , se obtiene la ecuación del desgaste adhesivo:

$$V = k_{adh} \frac{F_N x}{\sigma_0}. \quad (17.14)$$

También en el caso del desgaste adhesivo, el volumen de material desgastado es proporcional a la fuerza normal y a la distancia recorrida e inversamente proporcional a la dureza. Esta expresión se suele denominar *ecuación de Holm-Archard*.

Al introducir en la ecuación la probabilidad de formación de una partícula de desgaste –cuya magnitud puede depender, por ejemplo, del grado de limpieza de la superficie–, los coeficientes de desgaste por adherencia pueden variar en varios órdenes de magnitud. El valor típico del coeficiente de desgaste para un contacto no lubricado entre dos metales miscibles (que forman aleación) es del orden de $k_{adh} \sim 10^{-3}$. Este valor puede llegar a disminuir en tres o cuatro órdenes de magnitud, bien en presencia de lubricantes muy buenos, o en el caso de metales inmiscibles.

17.4 CONDICIONES PARA EL ROZAMIENTO DE BAJO DESGASTE

Los requisitos para que tenga lugar deslizamiento a bajo desgaste dependen de muchos factores, por lo que es difícil formular reglas sencillas. Según el estado de lubricación del sistema, se pueden dar distintas situaciones. Mientras que en

los sistemas lubricados la rugosidad actúa como reservorio de lubricante, disminuyendo de esta forma el desgaste, en los sistemas no lubricados es preferible, por lo general, que las superficies sean lo más lisas posible. Si en los micro-contactos no se alcanza el esfuerzo límite de fluencia del material, entonces solo ocurre deformación elástica en las superficies –siempre y cuando no se produzca ninguna reacción química entre las mismas². Dado que, según la expresión (7.16), el esfuerzo medio en micro-rugosidades es del orden de $\frac{1}{2} E^* \nabla z$, y por otro lado es de esperar que en micro-contactos individuales el esfuerzo no supere el valor máximo dado por $E^* \nabla z$, se ha de cumplir la condición $E^* \nabla z < \sigma_0$ o

$$\nabla z < \frac{\sigma_0}{E^*}. \quad (17.15)$$

En muchos metales, la dureza se identifica con el módulo de elasticidad, por lo que se cumple que³

$$\frac{\sigma_0}{E} \approx 0,01. \quad (17.16)$$

Para que el par de materiales sometidos a fricción se deforme solo elásticamente, las superficies han de ser extremadamente lisas; en particular, el gradiente medio de las superficies no debe superar el valor 0,01. Además, es deseable que la longitud de onda que caracteriza la rugosidad sea lo más pequeña posible, de tal forma que el diámetro de los micro-contactos se mantenga por debajo del valor dado por la expresión (17.8) y por tanto, la condición del desgaste adhesivo no se cumpla. Si el gradiente medio es mayor que el dado en la expresión (17.15), entonces el material más blando se deformará plásticamente en los micro-contactos. El efecto que dicha deformación plástica tiene sobre el desgaste depende fundamentalmente de las propiedades de las capas superficiales más externas.

Las consideraciones al modelo del desgaste adhesivo, descritas en la sección anterior, requieren que la formación y la ruptura de las micro-soldaduras ocurran en distintos puntos en el material. Si el material forma una capa de óxido o está lubricado, es posible que la ruptura de los micro-contactos tenga lugar en la misma interfase que en la que se formaron. Es por ello por lo que el cociente entre la tenacidad de la interfase y la tenacidad volumétrica del material juegan un papel muy importante en el desgaste adhesivo, aun cuando este cociente no aparezca explícitamente en la ecuación (17.14). Esto último motivó a Kragelski⁴

-
2. Un requisito necesario para cumplir esta condición es que los materiales en contacto sean inmiscibles, es decir, no formen aleación.
 3. Los datos estadísticos que apoyan este enunciado pueden encontrarse en: E. Rabinowicz. «*Friction and wear of materials*». 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).
 4. I.V. Kragelski. *Friction and wear*. Butter Worth, Londres (1965).

a formular el «*principio del gradiente positivo de dureza*» como base para el establecimiento de las condiciones del rozamiento de bajo desgaste. Según este principio, la tenacidad de la capa superficial más externa del material ha de aumentar con la profundidad. Esto puede conseguirse mediante lubricación, modificación química de las capas superficiales o reblandecimiento del material, bien a través de un aumento local de la temperatura o de una baja energía superficial de la capa límite. En los contactos de bajo desgaste y cuando los metales no pueden formar aleación, es conveniente fabricar una aleación de tenacidad menor a las de ambos componentes por separado. Si por alguna razón, el gradiente de dureza es negativo, la velocidad a la que se produce el desgaste aumenta de forma drástica. Por esta razón, procesos como la formación de capas de óxido o la interacción con películas de lubricante de espesor molecular cobran una gran importancia en el desarrollo del desgaste, si bien aún no es posible describirlos mediante un modelo mecánico sencillo.

17.5 EL DESGASTE COMO MECANISMO DE TRANSPORTE DE MATERIA DESDE LA ZONA DE ROZAMIENTO

Para analizar el desgaste, no basta con establecer las condiciones bajo las que se liberan partículas. Mientras estas permanezcan en la región donde se produce el rozamiento, estarán continuamente sometidas a la acción mecánica, integrándose una y otra vez en las superficies de los materiales en contacto. El desgaste se manifiesta como función del contacto cuando existe rozamiento si el material abandona la zona en la que aquel se produce. Por tanto, el desgaste no se concibe solo es un problema de tenacidad, sino que, en términos más amplios, como un problema de mecanismo de transporte desde la zona donde tiene lugar el rozamiento.

Según Kragelski, para mejorar la resistencia al desgaste es conveniente que la capa superficial del material posea un esfuerzo de fluencia menor que el del material de base. A continuación, se analiza la resistencia al desgaste de un material recubierto por una capa más blanda, caracterizada por una tenacidad a cizalla τ_c y un espesor h . El diámetro de la zona sometida a rozamiento es L .

La velocidad a la que se produce el desgaste se puede estimar cualitativamente mediante el siguiente razonamiento. Suponiendo que el comportamiento de la capa es idealmente plástico, el esfuerzo tangencial en dicha capa es independiente de la velocidad de deslizamiento, además de ser constante e igual a τ_c . Formalmente, puede introducirse una viscosidad efectiva de capa η_{ef} tal que el esfuerzo cortante en la misma pueda, como en el caso de un fluido viscoso, calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$\tau_c = \eta_{ef} \frac{v}{h}. \quad (17.17)$$

De donde se llega a

$$\eta_{ef} = \frac{h\tau_c}{v}. \quad (17.18)$$

Una película que se encuentre en un estado de flujo plástico, no tiene, en relación con otras componentes del esfuerzo (p.ej. la componente normal), límite de fluencia y se comporta, en primera aproximación, como un fluido de viscosidad efectiva dada por la expresión (17.18). Por consiguiente, la capa se extrae por compresión a una velocidad que puede estimarse mediante la ecuación (14.27):

$$|\dot{h}| \approx \frac{2h^3}{3\pi\eta_{ef}R^4} F_N \approx \frac{2h^2v}{3\pi R^4\tau_c} F_N. \quad (17.19)$$

Por consiguiente, el volumen de material retirado de la zona de fricción – y por tanto el que corresponde al material desgastado – en relación a la distancia de deslizamiento es igual a $\frac{dV}{dx} = \frac{|\dot{h}|\pi R^2}{v} \approx \frac{8}{3} \frac{F_N}{\tau_c} \left(\frac{h}{2R}\right)^2$. Esta expresión ha sido confirmada mediante simulaciones numéricas salvo por una constante. Por tanto, la ecuación de desgaste puede escribirse de la forma siguiente⁵:

$$V \approx \frac{F_N}{\sigma_0} \left(\frac{h}{L}\right)^2 x. \quad (17.20)$$

En este caso, σ_0 designa la dureza del material. Esta relación tiene la misma forma que la ecuación de desgaste (17.14) salvo por un factor geométrico $(h/L)^2$, el cual se encarga de reducir en gran medida la velocidad de desgaste a valores pequeños de h y a valores altos de L .

17.6 DESGASTE EN ELASTÓMEROS

El desgaste en elastómeros es un proceso muy complicado que hasta hoy no se ha llegado a comprender de manera suficiente. Como estimación muy aproximada, se puede emplear la ecuación de desgaste (17.14) para el desgaste adhesivo, donde la dureza σ_0 se sustituye por el valor medio del esfuerzo en micro-contactos dado por la expresión (16.10):

$$V = k_{adh} \frac{\kappa F_N x}{4 \left| \hat{G}(vk) \right| \nabla z} \quad (17.21)$$

5. V.L. Popov, I. Yu. Smolin, A. Gervé, B. Kehrwald. «Simulation of wear in combustion engines». *Computational Materials Science* **19**(1-4), 285-291 (2000).

donde $\kappa \approx 2$ y k –el número de onda característico de la rugosidad.

Para caracterizar el desgaste en la goma, a menudo se emplea la llamada *abradabilidad* γ (*abradability* en inglés), la cual se define como el cociente entre el volumen de desgaste y la energía disipada⁶, y que se puede estimar de la manera siguiente

$$\gamma = \frac{V}{\mu F_N x} = \frac{\kappa k_{adh}}{\mu 4 \left| \hat{G}(vk) \right| \nabla z} = \frac{\kappa k_{adh}}{4 \nabla z^2 \text{Im}(\hat{G}(vk))}. \quad (17.22)$$

La magnitud es inversamente proporcional a la parte imaginaria del módulo complejo, por lo que alcanza un mínimo a velocidades intermedias (fig. 17.6). La fig. 17.7 muestra una gráfica de la evolución de la abradabilidad en función de la velocidad obtenida a partir de datos experimentales.

Aparte de propiedades viscoelásticas, la goma también posee propiedades plásticas, las cuales pueden caracterizarse *grosso modo* mediante un esfuerzo crítico, σ_c , el «esfuerzo de fluencia», el cual se define de manera aún más inespecífica que en el caso de los metales. El triple de este valor se considera una magnitud característica de la dureza a la indentación de la goma, $\sigma_0 \approx 3\sigma_c$. Según la ecuación (16.10), el esfuerzo característico en los micro-contactos se puede aproximar por la siguiente expresión

$$\sigma \approx 4\kappa^{-1} \left| \hat{G}(vk) \right| \nabla z. \quad (17.23)$$

Si este esfuerzo alcanza el valor de la dureza del material, la goma se deforma plásticamente y el desgaste aumenta de forma rápida. La velocidad crítica a la que esto ocurre se calcula a partir de la condición dada por

$$\sigma_0 \approx 2 \left| \hat{G}(v_c k) \right| \nabla z. \quad (17.24)$$

Un tratamiento en detalle de los procesos de fricción y desgaste debería también incluir el efecto de la temperatura en los micro-contactos, dado que el módulo complejo depende de la temperatura.

Para coeficientes de fricción altos, se forma una inestabilidad en la zona de contacto, la cual hace que una parte de la misma alcance el estado de no deslizamiento o de agarre. En estas condiciones, el desplazamiento del cuerpo solo es posible mediante la formación de ondas evanescentes – las llamadas *ondas de Schallamach*. Este régimen viene caracterizado por otro mecanismo de desgaste, el desgaste a la rodadura.

6. La *abradabilidad* γ no debe confundirse con la energía superficial aunque se utilice la misma notación para ambas magnitudes.

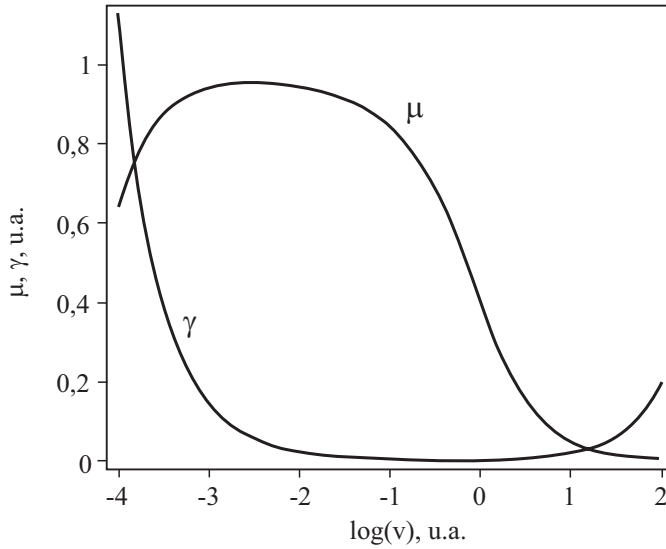


Fig. 17.6 El coeficiente de fricción μ y la *abradabilidad* γ en función de la velocidad según la ecuación (17.22) para el modelo reológico dado por la expresión (15.51) y caracterizado por los parámetros $G_0 = 1$, $G_1 = 1000$, $\tau_1 = 10^{-2}$, $\tau_2 = 10^2$, $g(\tau) = \tau_1 \tau^{-2}$.

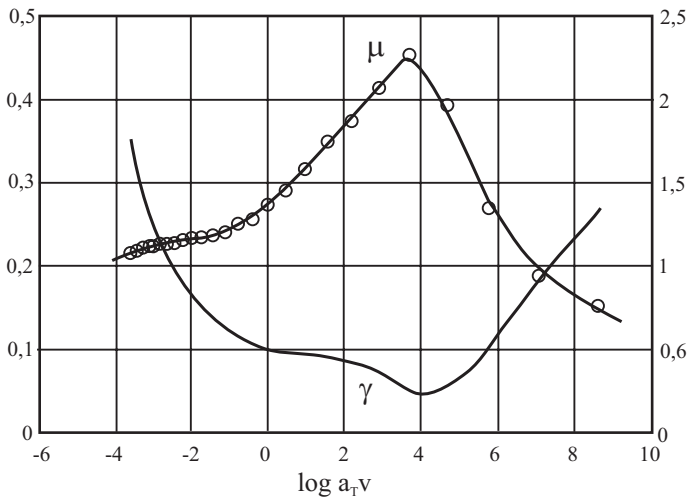


Fig. 17.7 Datos experimentales del coeficiente de fricción, μ , y de la *abradabilidad*, γ , en función de la velocidad para el caso de una goma compuesta. Fuente: K.A. Grosch. 'The rolling resistance, wear and traction properties of tread compounds'. *Rubber Chemistry and Technology* **69(3)**, 495-568 (1996).

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Desgaste erosivo a bajas velocidades. Una partícula dura y esférica de radio R impacta perpendicularmente contra la superficie de un sólido de dureza σ_0 a una velocidad v_0 . Determinar la profundidad de indentación, el diámetro de la huella resultante, y el volumen de material retirado en el impacto.

Resolución: La profundidad de indentación instantánea $d(t)$ está relacionada con el radio de contacto instantáneo $a(t)$ mediante la expresión $a(t) \approx \sqrt{2Rd(t)}$. El área de contacto se calcula de la siguiente manera,

$$A(t) \approx 2\pi R d(t).$$

Sea el valor medio del esfuerzo en la región de contacto constante en el tiempo e igual a la dureza del material. La fuerza de contacto que actúa sobre la esfera es, por consiguiente, igual a $-\sigma_0 2\pi R d(t)$, y la ecuación de movimiento adquiere la forma siguiente

$$m \frac{\partial^2 d(t)}{\partial t^2} = -2\pi\sigma_0 R d(t).$$

La solución para las condiciones iniciales $d(0) = 0$, $\dot{d}(0) = v_0$ viene dada por

$$d(t) = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0 R}{m}}$. La profundidad máxima de indentación es igual a

$$d_{\max} = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\sigma_0 R}}.$$

Expresando la masa de la partícula en función de la densidad ρ y del radio:

$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, se obtiene

$$d_{\max} = R \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\rho v_0^2}{\sigma_0}}.$$

El «volumen comprimido», ΔV , es igual a

$$\Delta V \approx \pi R d_{\max}^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho v_0^2}{2\sigma_0} = V \frac{\rho v_0^2}{2\sigma_0} = \frac{m v_0^2}{2\sigma_0}.$$

Es decir, el volumen de material comprimido es igual a la energía cinética de la partícula dividida por la dureza del material.

El volumen perdido por desgaste no solo depende del volumen comprimido, sino que depende además del mecanismo de extracción del material desplazado. No obstante y en general, el volumen de material desgastado es proporcional al volumen comprimido.

Problema 2: Desgaste oscilatorio (*fretting*). Un perfil de simetría axial $z = f_0(r)$ se presiona sobre un semi-espacio elástico en la magnitud d , tras lo cual oscila en dirección tangencial con la amplitud dada por $u_x^{(0)}$. A amplitudes bajas, el desgaste se localiza en una zona deslizante, o zona-*slip*, en forma de anillo en torno al borde de la región de contacto. Determinar la forma final $z = f_\infty(r)$ del perfil desgastado tras un número elevado de oscilaciones. Para ello se presupone que en el contacto se cumple la ley de rozamiento de Coulomb y que solo se desgasta el perfil del indentador.

*Resolución*⁷: De acuerdo con la ley de rozamiento de Coulomb, el esfuerzo de fricción estática máximo τ_{\max} es igual al esfuerzo de deslizamiento y este a su vez igual al producto del esfuerzo normal p por un coeficiente de fricción constante μ : $\tau_{\max} = \mu p$, $\tau_{\text{deslizamiento}} = \mu p$. La condición de no deslizamiento o de agarre se expresa como $\tau \leq \mu p$. Para formular la ecuación del desgaste, solamente se necesita hacer una suposición muy general que el desgaste solo ocurre en la región donde la presión sea finita y donde hay un desplazamiento relativo de una superficie con respecto a la otra. Consecuentemente, *no hay* desgaste en aquellas regiones donde la presión sea nula o no haya desplazamiento, es decir, zonas donde no haya contacto (presión cero), y zonas no deslizantes o zonas-*stick*, donde no existe desplazamiento relativo. Debido al propio desgaste y a medida que aumenta el número de oscilaciones, la presión disminuye en la región donde ocurre desgaste y aumenta en la zona no deslizante de radio c . Por ello, la región-*stick* original sigue permaneciendo en el estado de no deslizamiento, y no se desgasta. Por el contrario, en la región-*slip* el desgaste aumenta de forma progresiva hasta que, por efecto del mismo, se forma una oquedad entre los cuerpos tal que la presión de contacto en la zona desaparece y no se produce más desgaste. De lo anterior se concluye que la forma límite no viene dada por una expresión más o menos exacta de la ecuación de desgaste, sino que ha de determinarse con ayuda del método de reducción de dimensión (MRD), descrito en los capítulos 5 y 8.

En el contexto del MRD, una cimentación elástica se define según las directrices dadas por las expresiones (5.56) y (8.41), y un perfil equivalente $g(x)$

7. Para resolver este problema, se sigue el procedimiento descrito en la publicación: V.L. Popov. «Analytic solution for the limiting shape of profiles due to fretting wear». *Sci. Rep.* 4,3749 (2014).

según la expresión (5.52), los cuales se emplearán en el tratamiento numérico en lugar del sistema tridimensional original. Si el perfil se desplaza la cantidad $u_x^{(0)}$ en la dirección tangencial, los muelles se someten a carga tanto en la dirección normal como en la tangencial. El radio de la región no deslizante o región *stick*, se obtiene igualando la fuerza tangencial máxima con el producto de μ por la fuerza normal:

$$G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - g(c)).$$

La distribución de presiones en la región de contacto se calcula, dentro del MRD, mediante la ecuación (5.59), la cual, por conveniencia, se formula una vez más como

$$p(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'_z(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \frac{E^*}{\pi} \int_r^\infty \frac{g'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx.$$

En el estado final, la presión es cero en la región de contacto original, fuera de la zona no deslizante, esto es $p(r) = 0$, cuando $r > c$. En esta región, de la ecuación de la presión se llega a,

$$g'(x) = 0 \text{ y } g(x) = \text{const}, \text{ para } c < x < a.$$

Por tanto, la forma final del perfil unidimensional equivalente viene dada por las siguientes ecuaciones (fig. 17.8):

$$g_\infty(x) = \begin{cases} g_0(x), & \text{para } 0 < x < c \\ d, & \text{para } c < x < a \end{cases}.$$

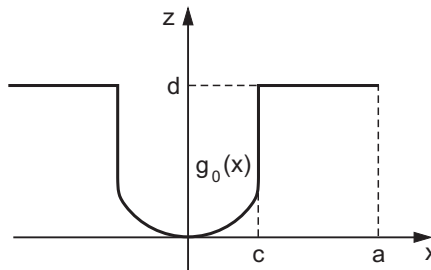


Fig. 17.8 Estado final del perfil unidimensional obtenido mediante el MRD.

El perfil tridimensional correspondiente se obtiene mediante la transformación inversa dada por la expresión (5.53):

$$f_\infty(r) = \begin{cases} f_0(r), & \text{para } 0 < r < c \\ \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{g_0(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx + \frac{2}{\pi} d \int_c^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx, & \text{para } c < r < a \end{cases}.$$

Considérese como ejemplo el perfil de forma inicial parabólica $f_0(r) = r^2/(2R)$. El perfil equivalente tras aplicar la transformación MRD es $g_0(x) = x^2/R$ (véase el capítulo 5, problema 7). El radio de la región *stick* viene dado por la ecuación $G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - c^2/R)$. De aquí se llega a

$$c = \sqrt{R \left(d - \frac{G^* u_x^{(0)}}{E^* \mu} \right)}.$$

En el estado final, la forma del perfil desgastado viene dado por

$$f_\infty(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2R}, & \text{para } 0 < r < c \\ d - \frac{2}{\pi} \left(d - \frac{r^2}{2R} \right) \arcsen \frac{c}{r} - \frac{r^2}{\pi R} \left(\frac{c}{r} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{c}{r} \right)^2}, & \text{para } c < r < a \end{cases}.$$

En términos de las variables adimensionales siguientes (las coordenadas verticales normalizadas con respecto a la profundidad de indentación, y las horizontales con respecto al radio inicial de contacto, $a_0 = \sqrt{Rd}$):

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f/d, & \tilde{d} &= d/d = 1 \\ \tilde{r} &= r/a_0, & \tilde{x} &= x/a_0, & \tilde{c} &= c/a_0, & \tilde{a} &= a/a_0, \end{aligned}$$

el perfil final se puede expresar de la siguiente forma

$$\tilde{f}_\infty(\tilde{r}) = \begin{cases} \frac{\tilde{r}^2}{2}, & \text{para } 0 < \tilde{r} < \tilde{c} \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{2} \right) \arcsen \frac{\tilde{c}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{r} \tilde{c}}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{r}} \right)^2}, & \text{para } \tilde{c} < \tilde{r} < \tilde{a} \end{cases}$$

Esta función se representa en la fig. 17.9 para distintos valores del radio de la región no deslizante, en coordenadas adimensionales.

El radio de contacto y, por tanto, el radio externo de la zona sometida a desgaste, viene dado por la condición $\tilde{f}_\infty(\tilde{a}) = \tilde{f}_0(\tilde{a})$:

$$1 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\tilde{a}^2}{2} \right) \arcsen \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} - \frac{\tilde{a} \tilde{c}}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} \right)^2} = \frac{\tilde{a}^2}{2}.$$

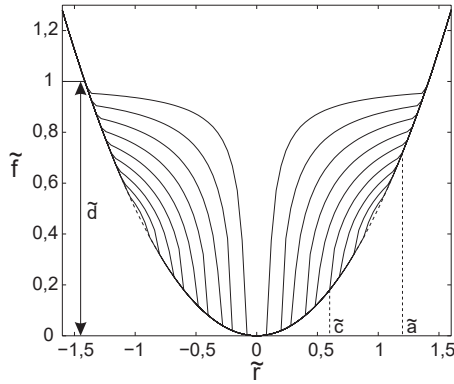


Fig. 17.9 Perfil 3D en el estado final para 9 valores crecientes del parámetro \tilde{c} , desde 0,1 hasta 0,9.

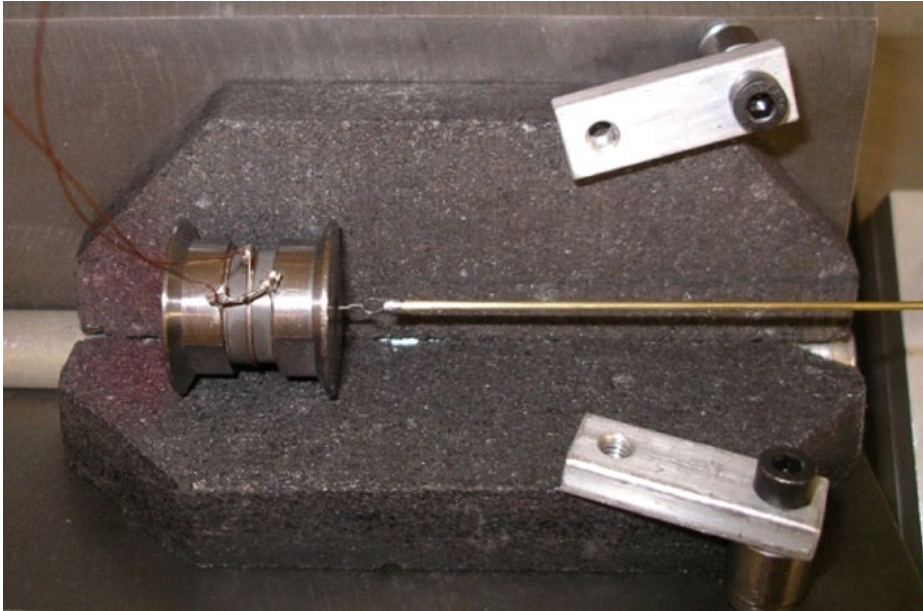
La fuerza normal se calcula mediante la ecuación

$$F_N = 2 \int_0^a E^* (d - g(x)) dx = 2 \int_0^c E^* (d - x^2/R) dx = 2E^* \left(dc - \frac{c^3}{3R} \right)$$

o, teniendo en cuenta la expresión para el radio de la zona *stick*:

$$F_N = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \left(d - \frac{G^*}{E^*} \frac{u_x^{(0)}}{\mu} \right)^{1/2} \left(d + \frac{G^*}{2E^*} \frac{u_x^{(0)}}{\mu} \right).$$

18. EL ROZAMIENTO INDUCIDO POR ULTRASONIDOS



En muchos sectores técnicos se suelen emplear vibraciones de diversas frecuencias y amplitudes para modular el rozamiento. Entre las aplicaciones de baja frecuencia más conocidas, figuran los compactadores tipo canguro y las planchas vibratorias. Las vibraciones de alta frecuencia se emplean para alterar el rozamiento en procesos de mecanizado, de ensamblaje o de embutición, pero también para suprimir inestabilidades por contacto en diversos aparatos nanotribológicos (como por ejemplo, el microscopio de fuerza atómica). Aparte de lo anterior, existen distintos métodos para producir movimiento dirigido, los cuales hacen uso de la relación entre vibración y rozamiento. Entre ellos figuran numerosos métodos de transporte y de separación por vibración. Por ejemplo, el principio del funcionamiento de los motores ultrasónicos en las lentes de cámaras fotográficas se basa en la vibración ultrasónica. Bajo determinadas condiciones, las vibraciones pueden llegar incluso a aumentar el rozamiento o a producir uniones de soldadura entre los materiales en contacto. Por esto en la tecnología de microchips se suele utilizar la soldadura o el ensamble por ultrasonidos.

18.1 EFECTO MACROSCÓPICO DE LOS ULTRASONIDOS EN LA FUERZA DE ROZAMIENTO

1. Efecto de las vibraciones en la fricción estática

Se va a analizar un cuerpo apoyado sobre un soporte de dos puntos (fig. 18.1). El coeficiente de fricción entre el soporte y el cuerpo (probeta) es μ . En primera aproximación, la probeta puede considerarse como un cuerpo rígido cuya longitud puede modificarse de forma periódica mediante un piezo-elemento incorporado al mismo.

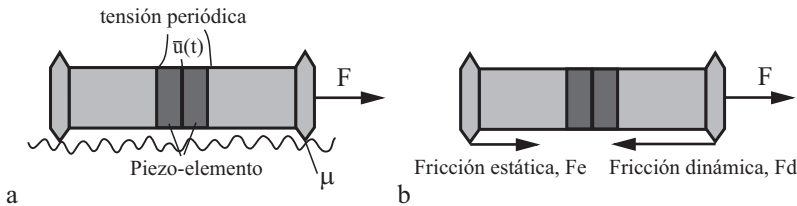


Fig. 18.1 (a) Una probeta que vibra en la dirección de deslizamiento. (b) Las fuerzas que actúan sobre la probeta en la dirección horizontal.

En ausencia de oscilación y para poner la probeta en movimiento, se ha de aplicar una fuerza crítica de magnitud $F_e = \mu F_N$. F_N es la fuerza normal, que en este caso es igual al peso de la probeta. Si por el contrario, se varía la longitud de la probeta de manera que se produce el movimiento relativo de los puntos de contacto con respecto al sustrato, la probeta se moverá independientemente de lo pequeña que sea la fuerza F aplicada. El diagrama de cuerpo libre de una probeta cuya longitud cambia con el tiempo se muestra en la fig. 18.1 b. Cuando la longitud cambia lentamente, el proceso es cuasi-estático y las fuerzas deben estar en todo momento en equilibrio. Dado que la fuerza de fricción dinámica en cada punto del contacto es de magnitud constante e igual a

$$F_d = \frac{1}{2} \mu F_N, \quad (18.1)$$

las fuerzas de rozamiento se equilibran con la fuerza externa siempre que uno de los extremos de la probeta se deslice y el otro se mantenga inmóvil. En la fase de contracción, el punto de contacto posterior es el que desliza y el anterior el que permanece inmóvil. En estas condiciones, la probeta experimenta un movimiento tipo oruga, donde en cada periodo la probeta se desplaza la distancia Δl , que coincide con el cambio de longitud de la misma. Esto implica que, *siempre y cuando la ley de rozamiento de Coulomb se cumpla*, basta una oscilación y una fuerza externa de amplitud y magnitud arbitrariamente pequeñas para mover la probeta a escala macroscópica ya que la fricción estática es nula. Sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que dicha conclusión solo se cumple a partir

de una determinada amplitud de oscilación (véase la sección sobre la medida experimental de la fuerza de fricción en función de la amplitud de oscilación).

II. El efecto de las vibraciones en la fricción dinámica

A continuación, se analiza cómo la oscilación influye en la fricción dinámica. En este caso, la frecuencia de oscilación ha de ser suficientemente alta para que las vibraciones no perturben el movimiento uniforme de la probeta. Esto permite tratar dicho movimiento como superposición de un desplazamiento a velocidad constante v_0 y otro a velocidad oscilante.

(1) Oscilación paralela al deslizamiento

Si la longitud de la probeta oscila según la función armónica

$$l = \tilde{l} + l_0 \text{sen } \omega t, \quad (18.2)$$

entonces las coordenadas de los puntos de contacto vienen dadas por

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} \tilde{l} + \frac{1}{2} l_0 \text{sen } \omega t, \quad x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \tilde{l} - \frac{1}{2} l_0 \text{sen } \omega t. \quad (18.3)$$

Estos puntos se mueven con respecto al soporte a las velocidades respectivas

$$\dot{x}_1 = v_0 + \frac{1}{2} l_0 \omega \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \frac{1}{2} l_0 \omega \cos \omega t \quad (18.4)$$

o

$$\dot{x}_1 = v_0 + \hat{v} \cos \omega t, \quad \dot{x}_2 = v_0 - \hat{v} \cos \omega t \quad (18.5)$$

donde $\hat{v} = \frac{1}{2} l_0 \omega$. Para simplificar, se supone que la fuerza normal se distribuye en los dos puntos de contacto de forma que es igual a $F_N / 2$ en cada punto y no cambia con el tiempo. Bajo este supuesto, se obtiene la siguiente expresión para la fuerza total de rozamiento que actúa sobre la probeta:

$$F_R = \frac{\mu F_N}{2} \left[\text{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \omega t) + \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \omega t) \right]. \quad (18.6)$$

La fuerza macroscópica de rozamiento se obtiene hallando el valor medio de la fuerza anterior en un periodo de oscilación:

$$\langle F_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_R(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu F_N}{2} \int_0^{2\pi} \left[\text{sgn}(v_0 + \hat{v} \cos \xi) + \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi) \right] d\xi. \quad (18.7)$$

Promediando sobre un período, la magnitud de ambos sumandos es la misma, por lo que basta con integrar uno de ellos y multiplicar por 2:

$$\langle F_R \rangle = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sgn}(v_0 - \hat{v} \cos \xi) d\xi. \quad (18.8)$$

Llegados a este punto, conviene distinguir dos casos:

(a) $v_0 > \hat{v}$. En este caso, la velocidad es siempre positiva y la fuerza de rozamiento permanece constante, tanto en módulo como en dirección. El valor medio de la fuerza de rozamiento es igual a $\langle F_R \rangle = \mu F_N$.

(b) $v_0 < \hat{v}$. En este caso, la velocidad es positiva en un subintervalo del período y negativa en el otro (estos intervalos de tiempo están indicados en la fig. 18.2 como +1 y -1, respectivamente). La fuerza de rozamiento en el subintervalo positivo es igual a μF_N y en el negativo es $-\mu F_N$. El momento en el que la velocidad cambia de signo se calcula a partir de la condición dada por $v_0 - \hat{v} \cos \xi^* = 0$. De aquí se llega a

$$\xi^* = \arccos(v_0 / \hat{v}). \quad (18.9)$$

Mediante la fig. 18.2 se puede ver claramente que una vez integrada, la expresión (18.8) resulta en

$$\langle F_R \rangle = \mu \frac{F_N}{2\pi} \left((2\pi - 2\xi^*) - 2\xi^* \right) = \mu \frac{2F_N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \xi^* \right) = \mu \frac{2F_N}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{v_0}{\hat{v}}\right) \right)$$

o

$$\langle F_R \rangle = \begin{cases} \frac{2\mu F_N}{\pi} \arccos\left(\frac{v_0}{\hat{v}}\right), & \text{para } v_0 < \hat{v} \\ \mu F_N, & \text{para } v_0 > \hat{v} \end{cases}. \quad (18.10)$$

Esta función se muestra representada gráficamente en la fig. 18.3, junto con datos experimentales.

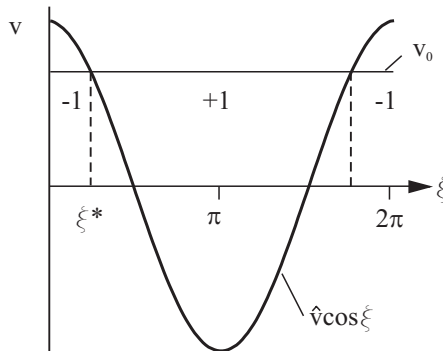


Fig. 18.2 Representación para el cálculo de la integral en la expresión (18.8).

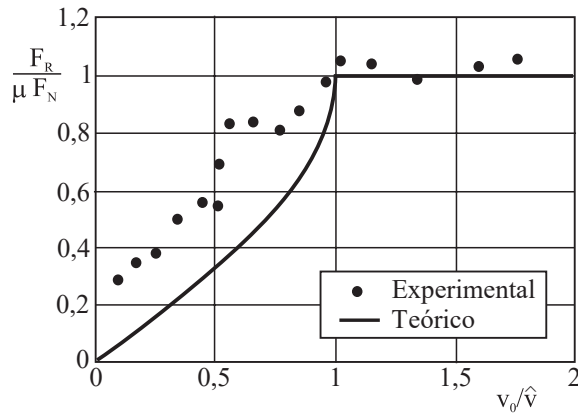


Fig. 18.3 Valores experimentales y teóricos que muestran la disminución de la fuerza de rozamiento por efecto de las vibraciones en la dirección paralela a la del movimiento. Fuente: H. Storck, W. Littmann, J. Wallaschek, M. Mracek. «The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to traveling wave ultrasonic motors». *Ultrasonics* **40**, 379-383 (2002).

(2) Oscilación perpendicular al deslizamiento

En este caso, la velocidad de la oscilación, dada por

$$v_1 = \hat{v} \cos \omega t, \quad (18.11)$$

está orientada perpendicularmente a la dirección del deslizamiento. El valor instantáneo de la fuerza de rozamiento puede obtenerse con ayuda del diagrama de fuerzas de la fig. 18.4 mediante la siguiente ecuación

$$F_R = \mu F_N \cos \varphi. \quad (18.12)$$

Teniendo en cuenta la relación $\tan \varphi = v_1 / v_0$, se llega a la siguiente expresión para la fuerza de rozamiento

$$F_R = \frac{\mu F_N}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \omega t\right)^2}}. \quad (18.13)$$

La fuerza macroscópica de rozamiento como valor promedio de la fuerza tangencial microscópica se calcula según

$$\langle F_R \rangle = \frac{\mu F_N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\hat{v}}{v_0} \cos \xi\right)^2}}. \quad (18.14)$$

Esta función se representa junto a distintos datos experimentales en la gráfica de la fig. 18.5. A diferencia del caso de la vibración paralela al deslizamiento, el coeficiente de fricción es siempre más pequeño en presencia que en ausencia de ultrasonidos.

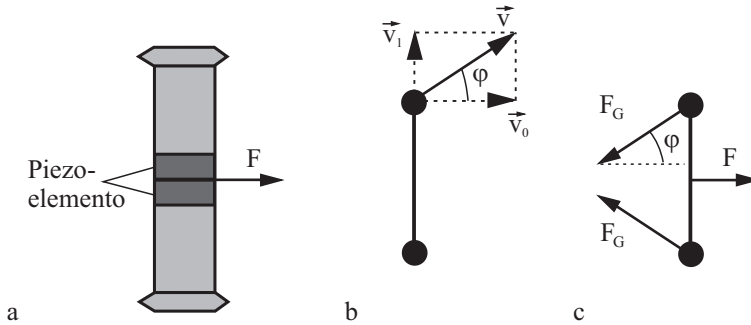


Fig. 18.4 Vibraciones perpendiculares a la dirección del deslizamiento (vista en planta): (a) Esquema del experimento, (b) diagrama de velocidades, (c) diagrama de fuerzas.

Una diferencia fundamental entre los resultados teóricos y experimentales es que el coeficiente de fricción experimental a muy bajas velocidades nunca llega a ser cero, al contrario de lo que predice la teoría. Esto muestra que la ley de rozamiento de Coulomb deja de ser válida cuando la amplitud de la oscilación es pequeña.

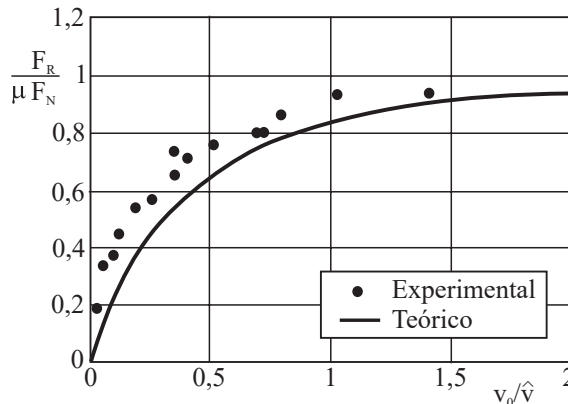


Fig. 18.5 Valores experimentales y teóricos que muestran la disminución de la fuerza de rozamiento por efecto de las vibraciones en la dirección perpendicular a la del movimiento. Fuente: H. Storck, W. Littmann, J. Wallaschek, M. Mracek. «The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to traveling wave ultrasonic motors». *Ultrasonics* **40**, 379-383 (2002).

Ultrasonics **40**, 379-383 (2002).

18.2 EFECTO MICROSCÓPICO DE LOS ULTRASONIDOS EN LA FUERZA DE ROZAMIENTO

El valor macroscópico de la fricción dinámica no es otro que el promedio temporal de la fuerza tangencial entre el cuerpo y el sustrato. Por consiguiente y en sentido estricto, el término «fuerza de fricción macroscópica» solo puede referirse con relación al intervalo sobre el que se calcula el promedio. A escalas de espacio y tiempo suficientemente pequeñas, la ley macroscópica de rozamiento falla y por tanto, no puede emplearse en el análisis del efecto de la vibración en el rozamiento para amplitudes de oscilación arbitrariamente pequeñas.

El hecho de que la ley macroscópica de rozamiento deje de cumplirse a escalas pequeñas y que por tanto haya de refinarse, se puede mostrar mediante el modelo Prandtl-Tomlinson (véase capítulo 11), el cual se puede modificar para el sistema de dos cuerpos presentado anteriormente. Sean dos masas puntuales de masa total m , cuya distancia cambia con el tiempo según la fórmula

$$l(t) = l_0 + \Delta l \operatorname{sen}(\omega t). \quad (18.15)$$

Ambos cuerpos se encuentran sometidos a un potencial espacial periódico. La ecuación (11.1) se modifica para dar lugar a

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - \frac{F_0}{2} [\operatorname{sen}k(x - l(t)/2) + \operatorname{sen}k(x + l(t)/2)]. \quad (18.16)$$

En ausencia de oscilación, se ha de aplicar la fuerza dada por

$$F_{e,0} = F_0 \left| \cos\left(\frac{1}{2}kl_0\right) \right| \quad (18.17)$$

para poner el sistema en movimiento. $F_{e,0}$ tiene, por tanto, el mismo sentido físico que la fuerza de fricción estática en ausencia de ultrasonidos.

A continuación, se deja oscilar la longitud l en la forma dada por la expresión (18.15) y se promedia la ecuación (18.16) a lo largo de un período $T = 2\pi / \omega$; la media temporal se representa entre paréntesis angulares.

$$m\langle \ddot{x} \rangle = F - \eta\langle \dot{x} \rangle - \frac{F_0}{2} \langle \operatorname{sen}k(x - l(t)/2) + \operatorname{sen}k(x + l(t)/2) \rangle. \quad (18.18)$$

Siempre que el sistema no se mueva macroscópicamente (es decir, siempre que se encuentre en régimen de no deslizamiento), los valores medios $\langle \ddot{x} \rangle$ y $\langle \dot{x} \rangle$ son cero, por lo que se llega a la siguiente expresión para la fuerza de fricción estática

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{F_0}{2} \left\langle \operatorname{sen} k \left(x_0 - (l_0 + \Delta l \operatorname{sen}(\omega t)) / 2 \right) + \operatorname{sen} k \left(x_0 + (l_0 + \Delta l \operatorname{sen}(\omega t)) / 2 \right) \right\rangle \\
 &= F_0 \operatorname{sen} k x_0 \cdot \left\langle \cos k \left(l_0 + \Delta l \operatorname{sen}(\omega t) \right) / 2 \right\rangle \\
 &= F_0 \operatorname{sen} k x_0 \cdot \left(\cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) \left\langle \cos \left(\frac{1}{2} k \Delta l \operatorname{sen} \omega t \right) \right\rangle - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) \left\langle \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} k \Delta l \operatorname{sen} \omega t \right) \right\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{18.19}$$

El valor medio del segundo término es igual a cero, dado que se trata de una función impar, mientras que el valor medio del primer término puede calcularse con ayuda del siguiente desarrollo en serie¹

$$\cos(\zeta \operatorname{sen} \varphi) = J_0(\zeta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\zeta) \cos(2n\varphi), \tag{18.20}$$

donde J_n es la función de Bessel de orden n . Correspondientemente, la expresión para la fuerza de rozamiento se transforma en

$$F = F_0 \operatorname{sen} k x_0 \cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) J_0 \left(\frac{1}{2} k \Delta l \right). \tag{18.21}$$

Esta fuerza es función de la coordenada x_0 . El valor máximo de dicha función, dado por

$$F_e = F_0 \left| \cos \left(\frac{1}{2} k l_0 \right) J_0 \left(\frac{1}{2} k \Delta l \right) \right| = F_{s,0} \left| J_0 \left(\frac{1}{2} k \Delta l \right) \right|, \tag{18.22}$$

es igual a la fuerza de fricción estática, la cual depende de la amplitud de la oscilación. Dicha dependencia se representa en la fig. 18.6.

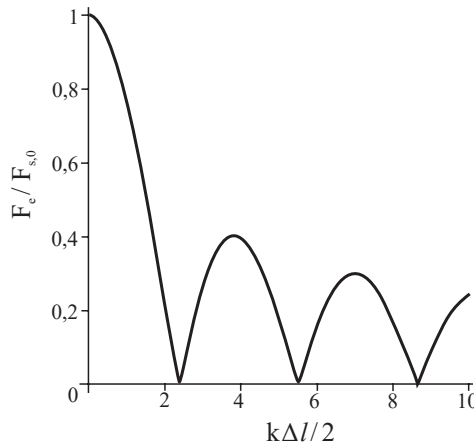


Fig. 18.6 La fuerza de fricción estática en función de la amplitud de la oscilación para un sistema de dos cuerpos sometidos a un potencial espacial periódico.

1. O.J. Farrell, B. Ross. *Solved problems: As applied to Gamma and Beta functions, Legendre Polynomials and Bessel functions*. Dover Publications (2013).

El rozamiento disminuye con la amplitud y desaparece cuando $k\Delta l / 2 = 2,4048$, es decir, cuando $\Delta l \approx 0,77\Lambda$, donde Λ es la longitud de onda del potencial. Si el potencial de interacción incluyese más componentes de Fourier, las oscilaciones de la fricción estática desaparecerían, lo que resultaría en una función (monótonamente) decreciente. Este ejemplo permite identificar la transición gradual desde la fricción estática en ausencia de ultrasonidos al resultado macroscópico en presencia de ultrasonidos ($F_e = 0$). Se puede observar que las amplitudes de oscilación para las que la fricción estática disminuye considerablemente, aportan información sobre la longitud de onda característica del potencial de interacción. De ello hace uso la *Tribo-spectroscopía* para investigar los mecanismos de fricción.

18.3 INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL DE LA FRICCIÓN ESTÁTICA EN FUNCIÓN DE LA AMPLITUD DE OSCILACIÓN

El sistema mostrado en la fig. 18.1 forma parte de un experimento real donde la fuerza de fricción estática se midió en función de la amplitud de oscilación². El experimento se efectuó a frecuencias de 60-70 kHz y amplitudes de oscilación de hasta 1 μm aproximadamente. La amplitud de oscilación se midió con un vibrómetro láser. Los resultados se representan gráficamente en la fig. 18.7 para el caso de una probeta de acero en contacto con varios sustratos de distintos materiales.

Para la mayor parte de los pares de materiales examinados, el coeficiente de fricción disminuye con la amplitud de la oscilación. La magnitud de decaimiento de la fuerza de fricción determina la escala espacial característica de los procesos de rozamiento para un par de materiales dado y bajo unas condiciones experimentales determinadas. Dicha escala es diferente para cada material. En la tabla 18.1 se muestran los resultados para 9 materiales distintos, donde además se indica si los datos se obtuvieron en un primer ensayo o en ensayos tras la puesta en marcha.

Para la mayor parte de los materiales, la longitud característica es menor tras la puesta en marcha, a excepción del latón y el vidrio. De los resultados de la tabla 18.1 se desprende que para todos los materiales estudiados, la escala característica está comprendida entre 15 y 100 nm. Aunque el origen físico de dicha escala no está claro aún, es probable que esté relacionado con el espesor de la capa límite. En presencia de ultrasonidos de alta amplitud, la muestra se calienta y la capa límite pierde su eficacia. Una manifestación típica de este fenómeno es la disminución del coeficiente de fricción cuando la amplitud de

2. V.L. Popov, Y. Starcevic. «Tribospectroscopic study of a steel-steel friction couple». *Tech. Phys. Lett.* **31**(4), 309-311 (2005).

Una descripción más detallada puede encontrarse en la siguiente tesis doctoral: J. Starcevic, *Tribospektroskopie als neue Methode zur Untersuchung von Reibungsmechanismen: Theoretische Grundlagen und Experiment*, TU Berlin, 2008.

la vibración ultrasónica es suficientemente alta. A amplitudes aún más altas, se produciría una fuerte adherencia metálica y fenómenos de *soldadura por fricción*.

En relación con otros materiales, la goma y el aluminio exhiben un comportamiento cualitativamente distinto (fig. 18.8). La goma constituye un caso en el que la escala no viene esencialmente determinada por interacciones en la nano-escala. Por otro lado, se sabe que el comportamiento tribológico del aluminio se desvía del resto de metales, probablemente debido al bajo punto de rotura de su capa de óxido, a consecuencia del cual el rozamiento abandona el régimen de capa límite.

En el caso del teflón, el coeficiente de fricción que muestra la fig. 18.7 no es solo reducido, sino que es *negativo* cuando la amplitud de oscilación aumenta. Esto puede ocurrir cuando la estructura de la superficie no es simétrica, de forma que se genera una suerte de «carraca»³, lo cual genera transporte en una sola dirección aún en ausencia de fuerzas externas.

Experimentos tribo-espectroscópicos muestran que en el régimen de fricción de capa límite, se puede aplicar la ley macroscópica de rozamiento a partir de desplazamientos de aproximadamente 100 nanómetros. A desplazamientos muy pequeños, del orden de 20-60 nanómetros, el coeficiente de fricción disminuye de manera drástica, por lo que estas amplitudes bastan para controlar los coeficientes de fricción.

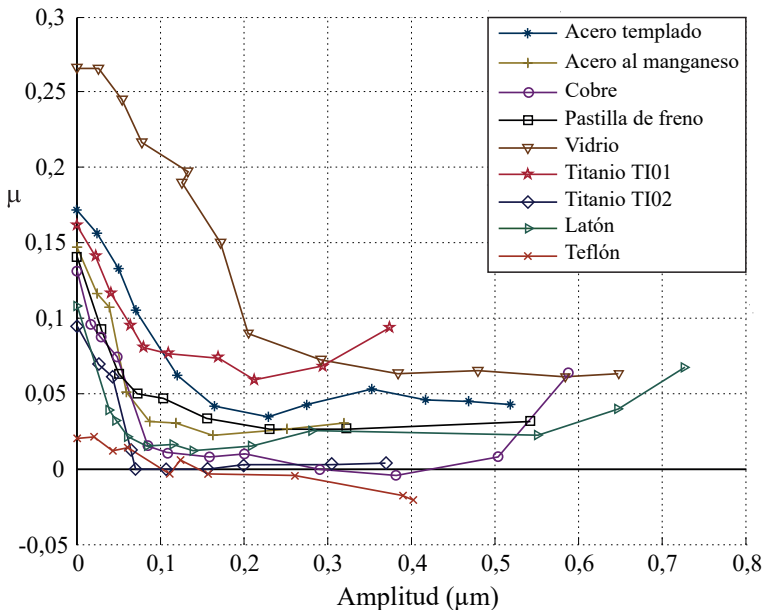


Fig. 18.7 Coeficientes de fricción estática en función de la amplitud de oscilación para distintos materiales en contacto con una muestra de acero C45.

3. Una discusión en detalle sobre trinquetes puede encontrarse en la sección 11.5.

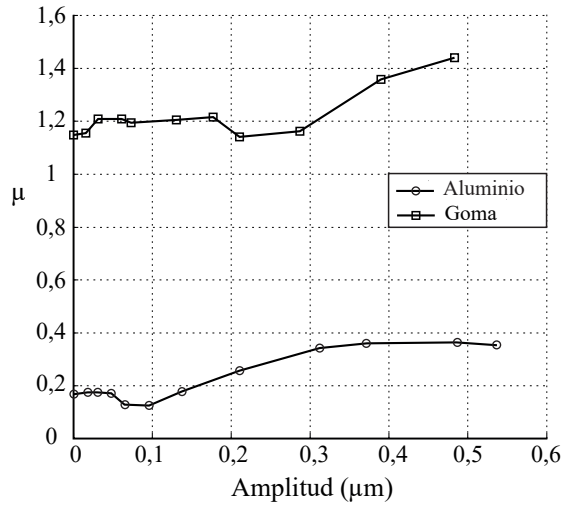


Fig. 18.8 Coeficiente de fricción estática en función de la amplitud de oscilación para la goma y el aluminio.

Tabla 18.1 Escalas de fricción características, l_0 , para distintos materiales, obtenidas del primer experimento y calculadas como valor medio de experimentos tras la puesta en marcha.

Material	l_0 [nm] 1.º experimento	l_0 [nm] Tras la puesta en marcha
Acero templado C 45	61	41
Acero al manganeso X120Mn12	39	24
Titanio TI01	34	27
Titanio TI02	25	22
Titanio TI03	50	–
Cobre	42	37
Latón	17	29
Pastilla de freno	31	29
Vidrio	104	111

18.4 INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL DE LA FRICCIÓN DINÁMICA EN FUNCIÓN DE LA AMPLITUD DE LA OSCILACIÓN

En muchas aplicaciones donde se requiere controlar activamente el rozamiento, es importante saber cómo varía la fricción *dinámica* con la amplitud de oscilación. En esta sección se presentan varios resultados experimentales típicos obtenidos con un tribómetro ultrasónico tipo varilla sobre disco⁴ (esquema mostrado en la fig. 18.9 a).

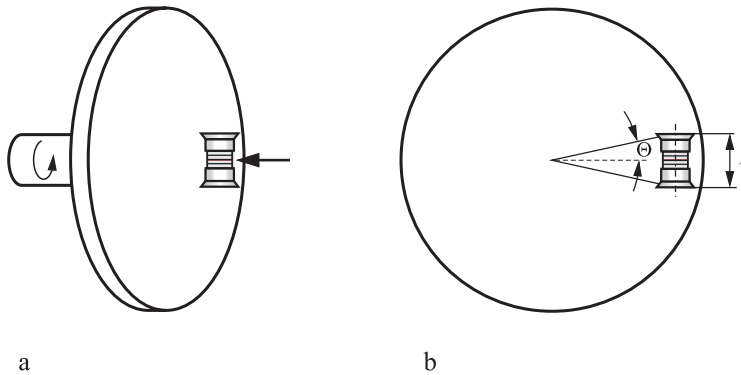


Fig 18.9 (a) Esquema de un tribómetro ultrasónico tipo varilla sobre disco; (b) Geometría del deslizamiento en un tribómetro ultrasónico tipo varilla sobre disco.

La fricción dinámica en función de la velocidad de deslizamiento está representada en la fig. 18.10 para el par acero-acero, encontrándose dependencias similares para otros pares tribológicos. Es característico el hecho de que la fuerza de rozamiento en ausencia de vibración apenas disminuye con la velocidad (curva 1 en la fig. 18.10), lo cual puede dar lugar a la generación de inestabilidades. La aplicación de oscilaciones ultrasónicas al sistema hace que la fuerza de rozamiento aumente monótonamente con la velocidad de deslizamiento (en este ejemplo, a partir de una amplitud de oscilación de aproximadamente $0,1 \mu m$, curva 3 en fig. 18.10). Este efecto puede emplearse en la supresión de inestabilidades por rozamiento.

El aluminio es una excepción ya que en el par acero-aluminio, el coeficiente de fricción no depende ni de la velocidad de deslizamiento ni de la amplitud de oscilación, y fluctúa considerablemente en torno al valor constante $\mu \approx 0,6 \pm 0,1$ (fig. 18.11).

4. V.L. Popov, J. Starcevic, A.E. Filippov. «Influence of ultrasonic in-plane oscillations on static and sliding friction and intrinsic length scale of dry friction». *Trib. Lett.* **39**, 25-30 (2010).

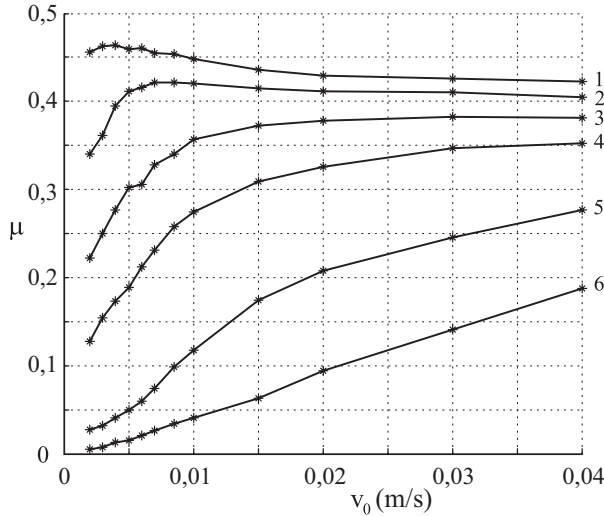


Fig. 18.10 Coeficiente de fricción en función de la velocidad de deslizamiento y la amplitud de oscilación para el par «acero-acero», obtenido a una frecuencia de 45 kHz, $\theta = 31,5^\circ$, y a las siguientes amplitudes de oscilación: (1) 0,023 μm , (2) 0,056 μm , (3) 0,095 μm , (4) 0,131 μm , (5) 0,211 μm , (6) 0,319 μm . Fuente: V.L. Popov, J. Starcevic, A.E. Filippov. «Influence of ultrasonic in-plane oscillations on static and sliding friction and intrinsic length scale of dry friction». *Trib. Lett.* **39**, 25-30 (2010).

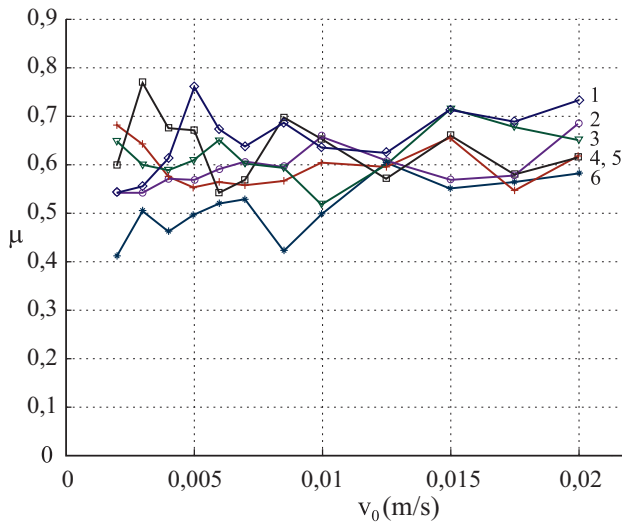


Fig. 18.11 Coeficiente de fricción en función de la velocidad de deslizamiento y la amplitud de oscilación para el par aluminio-acero, obtenido a una frecuencia de 48 kHz y a las siguientes amplitudes de oscilación: (1) 0,21 μm , (2) 0,081 μm , (3) 0,31 μm , (4) 0,14 μm , (5) 0,41 μm , (6) 0,035 μm . El coeficiente de fricción exhibe fuertes fluctuaciones en torno al valor 0,6, pero ninguna dependencia clara con la velocidad de deslizamiento o con la amplitud de oscilación. Fuente: V.L. Popov, J. Starcevic, A.E. Filippov. «Influence of ultrasonic in-plane oscillations on static and sliding friction and intrinsic length scale of dry friction». *Trib. Lett.* **39**, 25-30 (2010).

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Determinar el efecto de las oscilaciones en la fuerza normal sobre la fricción estática y dinámica, especialmente la dependencia del valor medio del rozamiento, suponiendo que se cumple la ley de rozamiento de Coulomb. El coeficiente de fricción es constante e igual a μ .

Resolución: Se parte del modelo más sencillo de un sistema tribológico, el cual consiste en un bloque rígido de masa m en contacto con un plano también rígido (fig. 18.12). Al bloque se le aplica una fuerza de tracción F en la dirección horizontal y una fuerza normal F_N , la cual varía en función del tiempo de la forma

$$F_N(t) = F_{N,0} + \Delta F_N \cos \omega t .$$

Si el valor mínimo $\mu(F_{N,0} - \Delta F_N)$ de la fricción estática es mayor que F , el cuerpo permanece en reposo. El valor macroscópico de la fricción estática es por tanto igual a

$$F_e = \mu(F_{N,0} - \Delta F_N) .$$

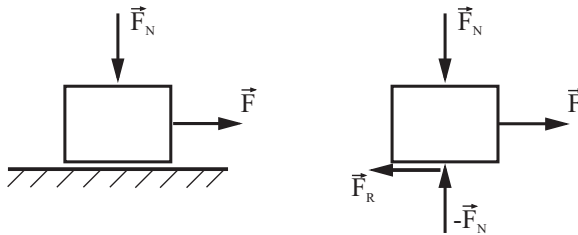


Fig. 18.12. Un bloque rígido sobre un plano es sometido a la acción de una fuerza de tracción F en la dirección horizontal y a la de una fuerza normal F_N dependiente del tiempo.

Si por el contrario y como muestra la fig. 18.13, la fuerza F es mayor que F_e , entonces existe un tiempo t_1 para el que la tracción es mayor que la fricción estática. A partir de ese momento, el cuerpo se pone en movimiento.

La ecuación de movimiento en la fase de deslizamiento es

$$m\ddot{x} = F - \mu(F_{N,0} + \Delta F_N \cos \omega t) ,$$

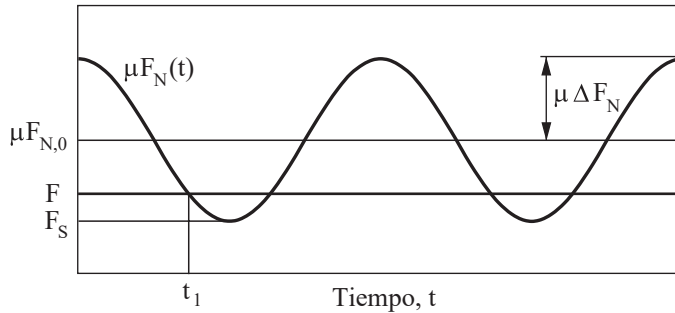


Fig. 18.13. Evolución temporal del producto de la fuerza normal por el coeficiente de fricción. El valor mínimo de dicha función es igual a la fricción estática F_e .

la cual se puede escribir de la forma siguiente

$$m\ddot{x} = \left[F - \mu(F_{N,0} - \Delta F_N) \right] - \mu\Delta F_N (1 + \cos \omega t)$$

o, dividiendo por $\mu\Delta F_N$,

$$\frac{m}{\mu\Delta F_N} \ddot{x} = \frac{\left[F - \mu(F_{N,0} - \Delta F_N) \right]}{\mu\Delta F_N} - (1 + \cos \omega t).$$

Introduciendo las variables $\tau = \omega t$ y $\xi = \frac{m\omega^2}{\mu \cdot \Delta F_N} x$, así como las identidades $f = \frac{\left[F - \mu(F_{N,0} - \Delta F_N) \right]}{\mu\Delta F_N}$ y $\xi'' = \partial^2 \xi / \partial \tau^2$, la ecuación puede expresarse de forma adimensional:

$$\xi'' = f - (1 + \cos \tau).$$

Esta ecuación contiene un solo parámetro, f . El movimiento del cuerpo se inicia en el tiempo τ_1 , en el que la igualdad $f - (1 + \cos \tau) = 0$ se cumple por primera vez. De aquí, se obtiene que

$$\tau_1 = \arccos f - 1.$$

Integrando dos veces la ecuación de movimiento y aplicando las condiciones iniciales $\xi'(\tau_1) = 0$ y $\xi(0) = 0$, se llega a

$$\xi' = (f - 1)(\tau - \tau_1) + (\text{sen } \tau_1 - \text{sen } \tau),$$

$$\xi = \frac{f-1}{2}(\tau^2 - 2\tau\tau_1) + (\tau \operatorname{sen} \tau_1 + \cos \tau) - 1.$$

La velocidad vuelve a ser cero y el cuerpo alcanza el reposo en el tiempo τ_2 , en el que

$$\xi' = f \cdot (\tau_2 - \tau_1) - (\tau_2 - \tau_1) + (\operatorname{sen} \tau_1 - \operatorname{sen} \tau_2) = 0.$$

Para $f = 1$, este tiempo se distingue del momento en el que se inicia el movimiento en un periodo completo, 2π . Para valores mayores del parámetro f , el cuerpo nunca alcanza el reposo. Por consiguiente, el intervalo más interesante de valores posibles para f es $0 < f < 1$.

El valor medio de la velocidad del cuerpo se calcula según la siguiente expresión

$$\langle \xi' \rangle = \frac{\xi(\tau_2) - \xi(\tau_1)}{2\pi} = \frac{f-1}{4\pi}(\tau_2 - \tau_1)^2 + \frac{1}{2\pi}((\tau_2 - \tau_1)\operatorname{sen} \tau_1 + \cos \tau_2 - \cos \tau_1)$$

La velocidad media de deslizamiento se obtiene para el valor crítico $f = 1$

$$\langle \xi' \rangle_{crit} = \operatorname{sen} \tau_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \tau_1} = \sqrt{1 - (f-1)^2} = 1.$$

Para valores pequeños de f se puede encontrar una expresión analítica aproximada para la velocidad media. Para ello, es de nuevo más sencillo partir de la ecuación de movimiento $\xi'' = f - (1 + \cos \tau)$ y aproximar la función coseno como $\cos \tau \approx -1 + \frac{(\tau - \pi)^2}{2}$ en torno al primer mínimo. Por consiguiente, la ecuación de movimiento se transforma en $\xi'' = f - \frac{\hat{\tau}^2}{2}$, donde $\hat{\tau} = (\tau - \pi)$. El movimiento comienza en el tiempo

$$\hat{\tau}_1 = -\sqrt{2f}.$$

Para la velocidad y la posición durante la fase de deslizamiento se obtiene, respectivamente,

$$\xi' = f \cdot (\hat{\tau} - \hat{\tau}_1) - \frac{\hat{\tau}^3 - \hat{\tau}_1^3}{6},$$

$$\xi = f \cdot \left(\frac{\hat{\tau}^2}{2} - \hat{\tau}_1 \hat{\tau} \right) - \frac{\hat{\tau}^4 - 4\hat{\tau}_1^3 \hat{\tau}}{24}.$$

El cuerpo alcanza el reposo cuando

$$\xi'(\hat{\tau}_2) = f \cdot (\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1) - \frac{\hat{\tau}_2^3 - \hat{\tau}_1^3}{6} = 0,$$

de lo que se llega a

$$\hat{\tau}_2 = -2\hat{\tau}_1 = 2\sqrt{2f}.$$

Para la velocidad media se obtiene

$$\langle \xi' \rangle = \frac{\xi(\hat{\tau}_2) - \xi(\hat{\tau}_1)}{2\pi} = \frac{9f^2}{4\pi}$$

o, despejando f :

$$f = \sqrt{\frac{4\pi}{9} \langle \xi' \rangle}.$$

Comparando este resultado con la solución numérica de la ecuación de movimiento, se concluye que la solución exacta en el intervalo de velocidades $0 < \langle \xi' \rangle < 1$ que interesa, se puede aproximar por la siguiente ecuación:

$$f = \sqrt{\frac{4\pi}{9} \langle \xi' \rangle} + \left(1 - \sqrt{\frac{4\pi}{9}} \right) \langle \xi' \rangle^{1,2},$$

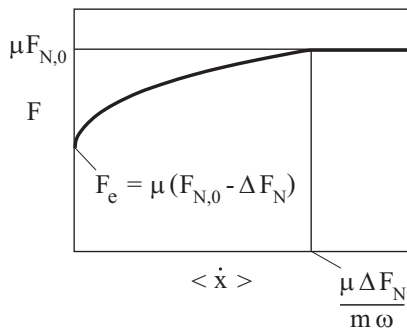


Fig. 18.14. La fuerza media de rozamiento en función de la velocidad media de deslizamiento bajo la acción de una fuerza normal oscilante.

o expresada en términos de las variables originales,

$$F = \mu(F_{N,0} - \Delta F_N) + \mu \Delta F_N \left[\sqrt{\frac{4\pi}{9} \frac{m\omega}{\mu \Delta F_N} \langle \dot{x} \rangle} + \left(1 - \sqrt{\frac{4\pi}{9}} \right) \left(\frac{m\omega}{\mu \Delta F_N} \langle \dot{x} \rangle \right)^{1,2} \right].$$

En términos de las variables dimensionales, el dominio de definición de esta función es el siguiente:

$$0 < \langle \dot{x} \rangle < \frac{\mu \Delta F_N}{m\omega};$$

A altas velocidades, la fuerza de rozamiento permanece constante e igual a $F = \mu F_{N,0}$. La dependencia del rozamiento con la velocidad de deslizamiento se muestra a modo de ejemplo en la fig. 18.14 para el caso $\Delta F_N = F_N / 2$.

Problema 2: Se tiene una probeta de longitud variable y apoyada en dos puntos sobre un sustrato, los cuales se pueden modelizar de manera simple como contactos hertzianos (fig. 18.5). La longitud de la probeta oscila según la fórmula $l(t) = l_0 + \Delta l \cdot \cos(\omega t)$. Suponiendo que en las superficies de contacto el coeficiente de fricción local es constante e igual a μ , determinar el valor macroscópico del coeficiente de fricción estática en función de la amplitud de oscilación.

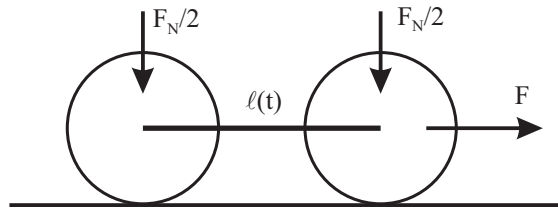


Fig. 18.15 Esquema de una probeta de longitud variable. Los puntos de apoyo entre la probeta y el sustrato se consideran contactos hertzianos.

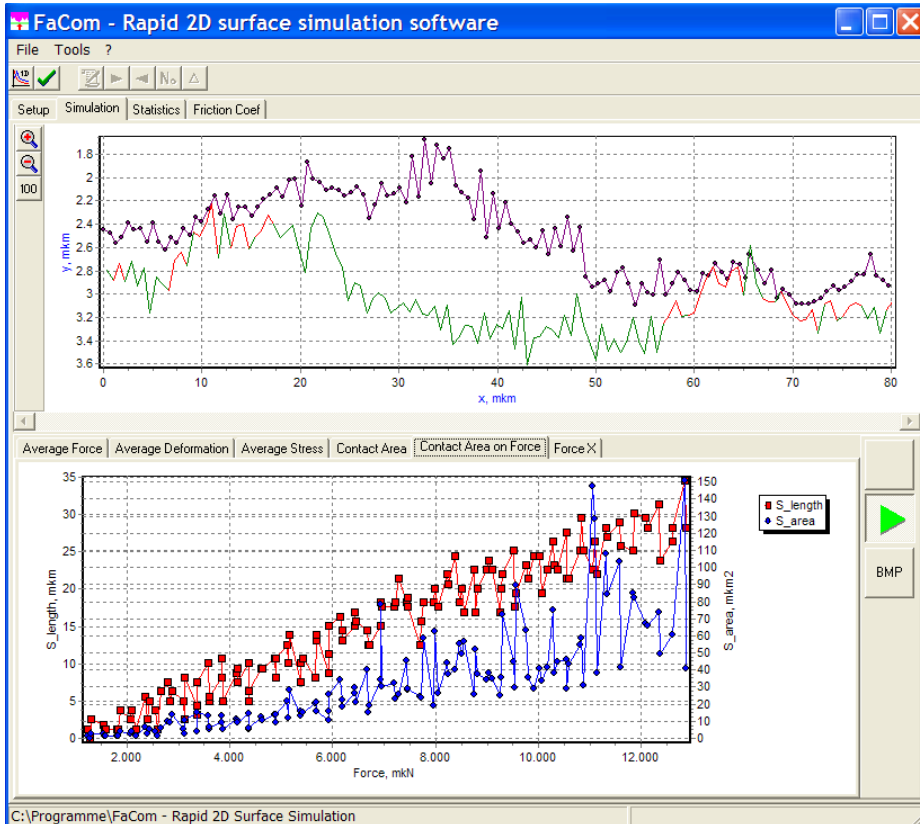
Resolución: En presencia de una fuerza externa F , la oscilación es simétrica y el máximo desplazamiento de cada extremo con respecto al estado inicial (de referencia) es igual a $\Delta l / 2$. La relación entre la fuerza y el desplazamiento tangenciales, F_x y u_x , viene dada por la siguiente ecuación (véase capítulo 8)

$$F_x = \mu F_N \left(1 - \left(1 - \frac{u_x}{\mu(E^* / G^*)d} \right)^{3/2} \right) = \mu F_N \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta l}{2\mu(E^* / G^*)d} \right)^{3/2} \right).$$

La diferencia entre esta fuerza y el valor crítico μF_N es la fricción estática detectable macroscópicamente, F_e :

$$F_e = \mu F_N \left(1 - \frac{\Delta l}{2\mu(E^* / G^*)d} \right)^{3/2} .$$

19. MÉTODOS DE SIMULACIÓN NUMÉRICA EN LA MECÁNICA DE CONTACTO



En capítulos anteriores se han considerado los problemas de contacto y fricción conforme a modelos sencillos. Aun cuando dichos modelos ofrecen una visión general de sistemas tribológicos complejos, existen multitud de planteamientos en Tribología –en particular, aquellos que implican el refinamiento de sistemas tribológicos– que no pueden resolverse mediante cálculos analíticos. En estos casos, tanto investigadores como ingenieros han de recurrir a métodos numéricos. Conviene tener en cuenta que la eficacia de dichos métodos depende, en gran medida, de la dimensión y de la calidad de la aproximación analítica de la que se parte.

En este capítulo se consideran brevemente los métodos más importantes que se emplean en la Mecánica de Contacto, sin entrar en detalles y haciendo referencia a la bibliografía correspondiente.

19.1 SISTEMAS DE VARIOS CUERPOS

Las simulaciones por ordenador de sistemas de varios cuerpos son indispensables en los procesos de desarrollo en la industria. A medida que crece la necesidad de ganar en precisión, aumenta también el interés en describir los fenómenos de contacto y fricción de la mejor manera posible. Una parte considerable de la investigación en este campo se enfoca a encontrar métodos que permitan implementar condiciones de contacto sencillas y el rozamiento de Coulomb, centrándose en la búsqueda de algoritmos más eficientes (en términos de tiempo de computación y costes de implementación). En este contexto, los contactos suelen considerarse como ligaduras direccionales rígidas y las características del rozamiento suelen venir dadas de antemano y definidas por un valor máximo de fricción estática máxima y una dependencia de la fricción dinámica con la velocidad de deslizamiento determinados. Con frecuencia, la fricción dinámica se supone constante e igual a la fricción estática máxima.

El método más sencillo para integrar el rozamiento en programas que simulan sistemas de varios cuerpos consiste en aproximar la ley de rozamiento mediante una función continua (de la fuerza de fricción). La fricción se trata como si fuese una fuerza predeterminada de la cual se conoce cómo varía con la velocidad. Típicamente se emplean fuerzas de la forma (fig. 19.1)

$$F_R = \frac{2}{\pi} \mu F_N \arctan(v / \hat{v}). \quad (19.1)$$

Con expresiones de este tipo no es necesario preocuparse por la diferencia entre la fricción estática y la dinámica. La velocidad característica \hat{v} ha de elegirse de forma que sea mucho más pequeña que las velocidades de deslizamiento características del sistema a simular. En este caso, la fricción dada por la expresión (19.1) reproduce la fuerza tanto en el régimen de deslizamiento como en el de no deslizamiento.¹

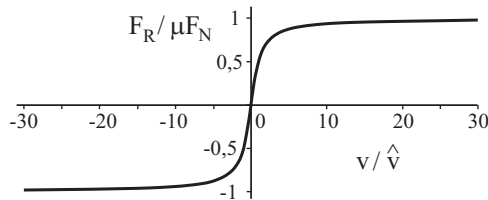


Fig. 19.1 Aproximación de la ley de rozamiento por una función continua.

19.2 EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En muchas aplicaciones es importante saber la distribución de presiones y la deformación de las superficies en contacto. Para el cálculo de las deformaciones elásticas y plásticas –y en principio, también para el análisis de los contactos adherentes y los fenómenos de rozamiento–, existen diversos métodos de simulación. Entre ellos, los procedimientos basados en la discretización de ecuaciones en el continuo son bien conocidos, en especial el método de elementos finitos (MEF, *FEM* en inglés), y el de elementos de contorno.

Las formulaciones del contacto en el ámbito del MEF vienen desarrollándose desde mediados de los años 70. En la actualidad, los programas comerciales de elementos finitos (EF) hacen uso de la *formulación nodo a superficie (node-to-surface*, en inglés), en la que a cada nodo de una superficie se le asigna uno o varios elementos de la otra.

En muchas aplicaciones prácticas (como en el sellado, en los procesos de mecanizado, o en los ensayos de indentación), entran en juego deformaciones considerables, comportamientos no lineales y amplios desplazamientos de los componentes en contacto. En estos casos, suelen fallar los programas EF comerciales y es la *formulación superficie a superficie* (método *mortar*) la que permite simular los casos de contacto de manera más robusta y exacta².

Los casos de contacto rodante (como el par rueda-raíl o el par neumático-asfalto) suelen analizarse mediante el método EF. El llamado Método Euleriano-Lagrangiano arbitrario (ELA, *Arbitrary Lagrangian Eulerian* o *ALE*, en inglés)³, es un método eficaz en el cálculo de estos problemas de contacto. La discretización espacial compacta que ofrece este método hace posible el refinado de malla en los puntos de contacto. Este método permite resolver de manera especialmente elegante los problemas de rodadura estacionaria, ya que en este caso las soluciones no dependen del tiempo. Sin embargo, el método no permite integrar sin dificultad el comportamiento inelástico de materiales, debido a que la malla no está unida al material.

Las ventajas de los modelos 3D de elementos finitos son las siguientes: (1) el empleo de la geometría correcta, incluyendo dimensión, topografía y grados de libertad, y (2) la posibilidad de calcular esfuerzos y deformaciones en todo el cuerpo. Sin embargo, cuando se utilizan mallas especialmente finas como en el caso de la simulación de contactos rugosos, los modelos 3D de EF requieren tiempos de computación muy altos. Esto constituye una clara desventaja si se

2. M.A. Puso, T. A. Laursen. «A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**, 601-629, (2004).

3. U. Nackenhorst. «The ALE-formulation of bodies in rolling contact: theoretical foundations and finite element approach». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**, 4299-4322 (2004).

tiene en cuenta el alto grado de cálculo variacional y optimización que conlleva este tipo de simulaciones.

19.3 EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

El método de elementos de contorno es especialmente adecuado en el cálculo del contacto entre dos cuerpos *linealmente elásticos* bajo la hipótesis de semi-espacio, puesto que solo requiere la discretización de las superficies. Es decir, no se necesita el mallado en el interior de los cuerpos ni tenerlo en cuenta en el cálculo. Dada la alta importancia de este método en el tratamiento de problemas de contacto mecánico, se aborda con más detalle a continuación.

Sea el caso del contacto normal entre un cuerpo elástico y un plano rígido. El desplazamiento vertical de un punto en la superficie de un cuerpo elástico (suficientemente grande) bajo la acción de una distribución continua de presiones, viene dado por la ecuación (5.7). La región de interés se divide en $N \times N$ elementos cuadrados y se supone que cada elemento soporta una presión constante p_{ij} . El desplazamiento vertical en el centro de cada elemento se designa por $u_{ij}^{(z)}$. La relación entre la distribución discreta de presiones p_{ij} y el desplazamiento vertical $u_{ij}^{(z)}$ en cada punto puede calcularse de forma analítica⁴:

$$u_{ij}^{(z)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{(z)} p_{ij} \quad (19.2)$$

donde

$$K_{ij}^{(z)} = \frac{\Delta}{\pi E^*} \left[a \ln \left(\frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{d + \sqrt{a^2 + d^2}} \right) + b \ln \left(\frac{d + \sqrt{b^2 + d^2}}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \right) + c \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{b + \sqrt{c^2 + b^2}} \right) + d \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + d^2}} \right) \right] \quad (19.3)$$

y

$$a = i - \hat{i} + \frac{1}{2}, \quad b = i - \hat{i} - \frac{1}{2}, \quad c = j - \hat{j} + \frac{1}{2}, \quad d = j - \hat{j} - \frac{1}{2}. \quad (19.4)$$

Δ es la distancia entre elementos de la red. Si se agrupan todos los p_{ij} y u_{ij} en sendos vectores, la ecuación (19.2) se puede escribir en forma matricial de la forma siguiente

4. A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4.ª edición revisada. Dover Publications, Nueva York (2011). Véase también: K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 6.ª impresión de la 1.ª edición, pág. 54 (2001).

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad (19.5)$$

donde \mathbf{A} es una matriz de dimensión $N^2 \times N^2$.

En los problemas de contacto se parte de que el tamaño y la forma de la región de contacto no se conocen, por lo que dichos problemas han de resolverse de manera iterativa. En la región de contacto, el espacio intersticial es cero, es decir, el desplazamiento de la superficie elástica es conocido. Fuera de la región de contacto la presión es cero; por el contrario, el desplazamiento no es nulo y no se conoce en principio. Para comenzar, se considera una región de contacto determinada. Las variables se redistribuyen entre las pertenecientes al interior de la región de contacto, \mathbf{p}_i y $\mathbf{u}_i^{(z)}$, y las pertenecientes al exterior, \mathbf{p}_a y $\mathbf{u}_a^{(z)}$, de las cuales se conocen $\mathbf{u}_i^{(z)}$ y $\mathbf{p}_a = 0$. Partiendo de la expresión (19.5) y tras la redistribución, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^{(z)} \\ \mathbf{u}_a^{(z)} \end{Bmatrix}, \quad (19.6)$$

y finalmente,

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i^{(z)} \quad (19.7)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_a^{(z)}. \quad (19.8)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (19.7) proporciona la presión en la región de contacto, \mathbf{p}_i . Este resultado permite calcular el desplazamiento fuera de la región de contacto, $\mathbf{u}_a^{(z)}$, mediante la expresión (19.8).

En general, el primer paso de iteración suele dar como resultado presiones negativas (esfuerzos de tracción) en la región de contacto, así como distancias de separación negativas fuera de ella. La nueva región de contacto se define retirando todos los puntos con esfuerzos de tracción, e incluyendo todos los puntos con distancias de separación negativas. Con la región de contacto modificada de esta manera, se repite el cálculo. Las iteraciones se realizan sucesivamente hasta que (en buena aproximación) no se obtienen más puntos con esfuerzos de tracción o distancias de separación negativas.

19.4 EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO: EL CONTACTO TANGENCIAL

De modo completamente similar al caso del contacto normal, se simula también el contacto tangencial con ayuda del método de elementos de contorno. En vez de la expresión (5.7), se emplea la relación de Cerrutti (8.3)

$$u^{(x)} = \frac{1}{2\pi G} \iint \left[\frac{1-\nu}{s} + \nu \frac{(x-x')^2}{s^3} \right] \tau(x', y') dx' dy' \quad (19.9)$$

$$s = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

en forma discreta, donde

$$K_{ijj}^{(x)} = \frac{\Delta}{2\pi G} \left[(1-\nu) \left(a \cdot \ln \frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{d + \sqrt{a^2 + d^2}} + b \cdot \ln \frac{d + \sqrt{b^2 + d^2}}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \right) + \left(c \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{b + \sqrt{b^2 + c^2}} + d \cdot \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + d^2}} \right) \right] \quad (19.10)$$

Esta expresión describe la relación entre el esfuerzo superficial τ y el desplazamiento $u^{(x)}$ en la dirección de aplicación de la fuerza, x . También en este caso es válida la representación en forma matricial dada por la ecuación (19.5). Si fuese necesario diferenciar entre las zonas deslizante (subíndice «d») y no deslizante (subíndice «e»), los nodos han de distribuirse de manera adecuada. Se supone que el caso correspondiente de contacto en la dirección normal se ha resuelto y el desplazamiento tangencial $u_{macro}^{(x)}$ se conoce. En los puntos donde hay fricción dinámica, el esfuerzo tangencial viene determinado por $\tau_d = \mu \mathbf{p}_d$ y el desplazamiento no se conoce. Por el contrario, en aquellos puntos donde existe agarre entre las superficies, se cumple que $u_{e,ij}^{(x)} = u_{macro}^{(x)}$ y el esfuerzo tangencial ha de cumplir la condición $\tau_d = \mu \mathbf{p}_d$. De forma análoga a la expresión (19.6), se pueden reorganizar las variables para llegar a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu \mathbf{p}_d \\ \tau_e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_d^{(x)} \\ \mathbf{u}_{macro}^{(x)} \\ \mathbf{u}_a^{(x)} \end{Bmatrix} \quad (19.11)$$

Calculando $\tilde{\mathbf{u}}_e^{(x)} = \mu \mathbf{A}_{21} \mathbf{p}_d$ y obteniendo τ_e de la ecuación $\mathbf{A}_{22} \tau_e = \mathbf{u}_{macro}^{(x)} - \tilde{\mathbf{u}}_e^{(x)}$, se conocen todos los esfuerzos y se pueden determinar $\mathbf{u}_d^{(x)}$ y $\mathbf{u}_a^{(x)}$.

En todos los cálculos, la ecuación (19.5) ha de desarrollarse o resolverse una y otra vez, y de cómo esto se consiga, dependerán tanto la velocidad como el éxito de la simulación. Gracias a las propiedades de la matriz \mathbf{A} , las cuales vienen determinadas por las ecuaciones de base (5.9) o (8.3), el producto de la matriz por el vector puede calcularse como convolución rápida mediante la transformada rápida de Fourier (FFT, en inglés). Partiendo de esta operación,

se puede emplear un procedimiento iterativo para la resolución del sistema de ecuaciones, como por ejemplo, el procedimiento del gradiente conjugado (GC).⁵

19.5 EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO: EL CONTACTO ADHERENTE

El contacto adherente puede describirse mediante el método de elementos de contorno como se muestra a continuación bajo el supuesto de que las fuerzas adhesivas son de muy pequeño alcance⁶. Considérese de nuevo una región dividida en elementos cuadrados de lado Δ , cada uno de los cuales está bajo la acción de un esfuerzo normal constante. Al separar tal contacto, los elementos no solo pueden soportar esfuerzos de compresión, sino también, y en cierta medida, esfuerzos de tracción. Para determinar la condición de despegado para un elemento de contorno, se utiliza el principio de los trabajos virtuales, según el cual un elemento se encuentra en estado de equilibrio siempre y cuando su energía no varíe con pequeños cambios en la configuración del sistema. Aplicado a un contacto adhesivo, esto implica que la energía de adherencia $U_{adh} = \Delta^2 \gamma_{12}$, necesaria para separar las superficies (γ_{12} es la energía de separación por unidad de superficie) ha de ser igual a la energía elástica que se libera al separar un elemento. Esta energía es igual a

$$U_{el} = \frac{1}{2} \iint \sigma u dA, \quad (19.12)$$

donde u es el desplazamiento de la superficie, la cual está asociada al esfuerzo σ . Aplicando el principio de Boussinesq se cumple que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \iint \frac{\sigma(\tilde{x}, \tilde{y})}{\sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}} d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad (19.13)$$

de forma que para la energía de un solo elemento se obtiene la siguiente expresión:

$$U_{el}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi E^*} \int_0^\Delta \int_0^\Delta \int_0^\Delta \int_0^\Delta \frac{1}{\sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}} d\tilde{x} d\tilde{y} dx dy = \frac{\sigma^2}{\pi E^*} \chi \quad (19.14)$$

donde

-
5. R. Pohrt, Q. Li. «Complete boundary element formulation for normal and tangential contact problems». *Physical Mesomechanics* **17**(4), 334-340 (2014).
 6. R. Pohrt, V.L. Popov. «Adhesive contact simulation of elastic solids using local mesh-dependent detachment criterion in boundary elements method». *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* **13**(1), 3-10 (2015).

$$\chi = \Delta^3 \frac{2}{3\pi} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{3}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \right) \approx 0,473201 \Delta^3. \quad (19.15)$$

A partir de la condición $U_{el} = U_{adh}$, se obtiene el esfuerzo crítico necesario para separar un elemento, σ_c :

$$\sigma_c = -\sqrt{\frac{\pi E^* \gamma_{12}}{0,473201 \cdot \Delta}}. \quad (19.16)$$

A diferencia de los casos de contacto no adherente, en cada paso de iteración se ha de comprobar que el esfuerzo de tracción no sobrepasa el valor crítico, dado por la expresión (19.16), en ningún elemento del borde de la región de contacto. Diversas pruebas de cálculo han mostrado que el procedimiento aquí descrito reproduce de manera muy exacta las soluciones analíticas conocidas (véase capítulo 6).

19.6 MÉTODOS DE PARTÍCULAS

Otra forma de abordar los problemas de contacto y fricción mediante simulación es la proporcionada por los métodos de partículas, para los que los objetos de cálculo son partículas discretas. Estas partículas no son reales, es decir, físicas, sino «unidades de cálculo». Las interacciones entre las partículas han de definirse de forma tal que permitan describir correctamente el comportamiento macroscópico, tanto elástico como plástico. Por consiguiente, no se resuelven ni las ecuaciones macroscópicas del continuo ni las microscópicas de la mecánica molecular, sino las ecuaciones microscópicas de un sistema equivalente apropiado. El tamaño de las partículas puede adaptarse al del problema a resolver; por ejemplo, en el análisis de terremotos, el tamaño de partículas puede llegar a ser de la escala de metros.

La fuerza de rozamiento se determina mediante procesos de deformación elástica y plástica, de ruptura, de liberación e integración de partículas, así como a través de procesos de mezcla. Dichos procesos tienen lugar en los micro-contactos. El *método de autómatas celulares móviles* (*movable celular automata* o *MAC* en inglés) es un método de partículas mediante el cual se pueden simular con éxito los procesos en micro-contactos⁷.

7. V.L. Popov, S. G. Psakhie. «Numerical simulation methods in tribology». *Tribology International* **40**(6), 916-923 (2007).

19.7 EL MÉTODO DE REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN

El método de reducción de dimensión ofrece otra posibilidad para el cálculo numérico efectivo de problemas mecánicos en el contacto, el cual se ha discutido en varias ocasiones en este libro y utilizado a través de varios ejemplos de aplicación. No obstante, una descripción pormenorizada del método puede encontrarse en⁸. En este método se sustituye el sistema original tridimensional por un contacto con una serie de elementos independientes dispuestos en fila (muelles o elementos reológicos cualesquiera). Es importante resaltar que no se trata de una aproximación sino de una representación exacta del sistema. El método de reducción de dimensión simplifica los problemas en el contacto de dos maneras: por un lado, el sistema con grados de libertad en el espacio tridimensional, se sustituye por otro con grados de libertad solo en una dimensión. Por otro, los grados de libertad tras la transformación MRD son independientes. Estas dos propiedades permiten que el tiempo de computación se reduzca *enormemente* (según el planteamiento y para problemas mecánicos en el contacto, este puede ser de 10^3 a 10^6 veces menor que el empleado usando los programas de elementos finitos o elementos de contorno ya optimizados). Esto hace posible integrar el cálculo de fuerzas de contacto en simulaciones dinámicas de sistemas.

8. V.L. Popov, M. Heß. *Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (2013).

20. TERREMOTOS Y ROZAMIENTO



La Tectónica de Placas es una disciplina que a su vez puede considerarse parte de la Tribología. La corteza terrestre está constituida por placas tectónicas, las cuales se desplazan lentamente unas con respecto a otras por efecto de las llamadas corrientes de convección en el manto superior. En la escala de tiempos geológicos, del orden de millones de años, estos desplazamientos determinan la estructura de la superficie de la Tierra, mientras que a escalas de tiempos más reducidas son la causa de los terremotos. Los modelos del rozamiento encuentran su aplicación tanto en la descripción de la dinámica de fracturas aisladas, como en la descripción de la corteza terrestre como medio granular. Los modelos que reproducen el mecanismo de los terremotos se basan en una observación fundamental: los terremotos no son el resultado de la súbita formación y propagación de grietas nuevas, sino que suelen ocurrir tras un deslizamiento repentino a lo largo de una fractura ya formada. Esto se constata por el hecho, entre otros, de que la disminución de la tensión tras un terremoto (del orden de MPa), es mucho menor que la tenacidad de la roca. Por consiguiente, un terremoto es más bien un fenómeno físico de fricción que un fenómeno de fractura mecánica. Más recientemente y tras el trabajo de Brace y Byerlee¹ se ha llegado a reconocer de

1. W.F. Brace, J.D. Byerlee. «Stick slip as a mechanism for earthquakes». *Science*, **153**, 990-992 (1966).

forma general que los terremotos han de entenderse en términos de inestabilidades tipo *stick-slip*.

20.1 INTRODUCCIÓN

Debido a la lentitud con la que se desplazan las placas tectónicas, en los puntos de las fracturas donde ocurre rozamiento se generan esfuerzos de magnitud tal que, cuando superan un valor crítico, producen un movimiento rápido y brusco, el cual percibimos como terremoto. Inestabilidades parecidas ocurren también en los sistemas tribológicos experimentales más sencillos –como en un cuerpo del que se tira lentamente por medio de un muelle blando. Es por ello por lo que algunas de las características generales de los terremotos se ponen de manifiesto con modelos de este tipo. En el modelo más simple de una inestabilidad *stick-slip*, se asume que el deslizamiento comienza cuando el cociente entre el esfuerzo cortante y el esfuerzo normal en la superficie de contacto supera el valor del coeficiente de fricción estática, μ_e (véase problema 1 del capítulo 12). Al ponerse el cuerpo en movimiento, el coeficiente de fricción disminuye al valor μ_d , lo que conduce a una inestabilidad en la fricción tipo *stick-slip*. En el problema 1 del capítulo 12 se vio que el desplazamiento durante la fase *slip* viene dado por

$$u = 2 \frac{F_e - F_d}{c}, \quad (20.1)$$

donde es la rigidez del muelle. La energía disipada durante la fase *slip* es igual a

$$E = F_d u = 2 \frac{F_d (F_e - F_d)}{c}. \quad (20.2)$$

En una zona de fractura real no existen ni masas aisladas ni muelles discretos. En su lugar, han de resolverse las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad partiendo de la ley de rozamiento. Aquí se da una estimación sencilla, suponiendo que la región de contacto, de extensión lineal L , es más pequeña que el espesor de la zona frágil de la corteza, D (*schizosphere* en inglés)². Un movimiento en este contacto provoca desplazamientos y deformaciones considerables en un volumen de dimensiones $L \times L \times L$. La dureza de un cubo de tales dimensiones es del orden de $c \approx GL$. Partiendo de las ecuaciones (20.1) y (20.2), se obtienen las siguientes aproximaciones para el desplazamiento y la energía disipada en un fenómeno *slip*:

$$u \approx 2F_N \frac{\mu_e - \mu_d}{GL} \approx \frac{2\sigma_N L}{G} (\mu_e - \mu_d), \quad (20.3)$$

$$E \approx \mu_d F_N u \approx 2\sigma_N^2 \frac{\mu_d (\mu_e - \mu_d)}{G} L^3 \quad (20.4)$$

donde $\sigma_N = F_N / L^2$ es el esfuerzo normal. Para *terremotos fuertes* (de extensión mayor que el espesor D de la zona frágil de la corteza), la dureza de la zona de deslizamiento de longitud L puede aproximarse por $c \approx GD$. Para el desplazamiento durante el fenómeno *slip* sirve la misma aproximación, y para la energía disipada,

$$E \approx \sigma_N^2 \frac{\mu_d (\mu_e - \mu_d)}{G} DL^2. \quad (20.5)$$

Es decir, la energía disipada es proporcional al cubo de la extensión del deslizamiento en el caso de temblores, y al cuadrado de la extensión del deslizamiento en el caso de terremotos fuertes.

La duración del terremoto en este modelo puede estimarse según la expresión

$$T \approx \frac{4L}{c_{sonido}}, \quad (20.6)$$

donde c_{sonido} es la velocidad de las ondas transversales en la corteza. Para terremotos fuertes con $L \approx 100$ km, la duración se estima en minutos.

20.2 CUANTIFICACIÓN DE TERREMOTOS

Como medida de la intensidad de un terremoto se emplea el *momento sísmico*, M :

$$M = GAu \quad (20.7)$$

donde G es el módulo de cizalla de la roca (típicamente del orden de magnitud 30 GPa), A es el área de superficie de la fractura y el desplazamiento medio a lo largo de la grieta. El momento sísmico es la base de la *escala sismológica de magnitud de momento*. La magnitud de momento sísmico M_w , se define como

$$M_w = \frac{2}{3} (\log_{10} M - 9,1) \quad (20.8)$$

Para el caso del modelo sencillo de fricción descrito anteriormente, se obtiene la siguiente estimación del momento sísmico:

$$M \approx 2\sigma_N (\mu_e - \mu_d) L^3, \text{ para temblores } (L < D) \quad (20.9)$$

$$M \approx 2\sigma_N (\mu_e - \mu_d) DL^2, \text{ para terremotos fuertes } (L > D) \quad (20.10)$$

El momento sísmico es, por tanto, proporcional al esfuerzo normal en la zona de fractura y al cubo de la extensión del deslizamiento en el caso de temblores, o al cuadrado de dicha magnitud en el caso de terremotos fuertes.

20.2.1 La ley de Gutenberg-Richter

Se va a considerar un contacto sometido a rozamiento entre dos cuerpos elásticos con un área aparente de contacto \tilde{A} . Los cuerpos se desplazan uno con respecto a otro una distancia \tilde{L} en la dirección tangencial, la cual ha de ser mucho mayor que el desplazamiento en una inestabilidad, dado por la expresión (20.3). En el caso de que solo tuviesen lugar terremotos con zonas de deslizamiento de extensión característica L , habría un total de \tilde{A}/\tilde{L}^2 zonas de deslizamiento en la superficie de contacto. Por tanto, a lo largo de toda la longitud \tilde{L} tendrían lugar un total de

$$N \approx \frac{\tilde{A} \tilde{L}}{L^2 u} \approx \frac{G\tilde{A}\tilde{L}}{2\sigma_N (\mu_s - \mu_k) L^3} \quad (20.11)$$

terremotos. Es decir, la frecuencia de los terremotos de una extensión de deslizamiento determinada es inversamente proporcional al cubo de dicha longitud y, por la expresión (20.9), inversamente proporcional al momento sísmico:

$$N \propto M^{-1}. \quad (20.12)$$

Dado que el sistema, en realidad, no posee ninguna longitud característica, se puede presuponer que la probabilidad de que ocurran desplazamientos de distinta magnitud L , es la misma en todos los casos. Bajo dichas condiciones, la expresión (20.12) es válida también para la distribución de terremotos. Si se define $\phi(M)$ como la densidad de probabilidad de un terremoto con un determinado momento sísmico M , la aproximación dada por (20.12) puede expresarse también en la forma siguiente

$$N \propto \phi(M) \cdot M \propto M^{-1}, \quad (20.13)$$

a partir de la cual se llega a

$$\phi(M) \propto M^{-2}. \quad (20.14)$$

La probabilidad $\Phi(M)$ de que ocurra un terremoto de momento sísmico *mayor que* M es

$$\Phi(M) = \int_M^{\infty} \phi(M) dM \propto \int_M^{\infty} M^{-2} dM = M^{-1}. \quad (20.15)$$

Esta fórmula fue propuesta por Gutenberg y Richter en el año 1954 a partir de datos empíricos, y se la conoce como *ley de Gutenberg-Richter*³.

La ley de Gutenberg-Richter permite definir una escala válida tanto para temblores como para grandes terremotos. La fig. 20.1 ilustra la ley de Gutenberg-Richter basada en los datos del catálogo de terremotos ocurridos en California durante los años 1984-2000.

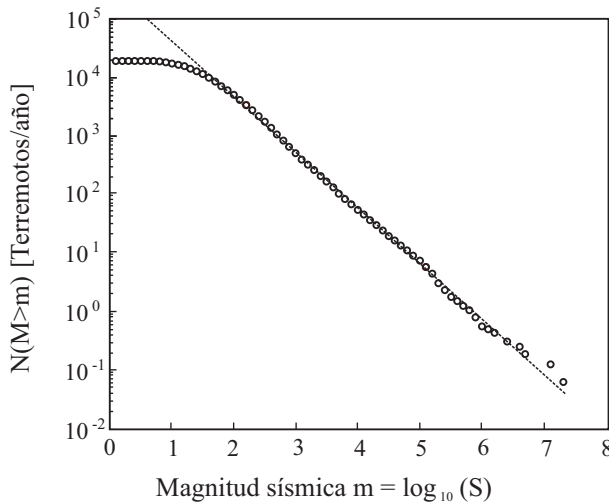


Fig. 20.1 Número de terremotos $N(M > m)$ con magnitud sísmica mayor que m por año (círculos). La recta representa la ley de Gutenberg-Richter, $\log_{10} N(M > m) \propto -bm$, con $b = 0,95$. La desviación con respecto al comportamiento lineal que se observa a valores pequeños de la magnitud sísmica, es probablemente debida a la dificultad en la medida de terremotos de muy baja intensidad. Datos procedentes del catálogo de terremotos en California en los años 1984-2000 (335076 terremotos, aprox. 150 terremotos/día). Fuente: P. Bak *et. al. Phys. Rev. Lett.* **88**(17):178501 (2002).

20.3 LAS LEYES DE ROZAMIENTO EN ROCAS

La ley de rozamiento (fig. 12.11) que se asumió para obtener la estimación (20.1) es demasiado simple. Tras el trabajo de Brace y Byerlee, se investigaron más intensamente las leyes que rigen el rozamiento en las rocas, lo que condujo a una modificación sustancial del «modelo estándar» para la fricción seca. A través de ella, se estableció que la diferencia entre fricción estática y dinámica es relativa, reemplazándose por el concepto de fricción como función de la

velocidad y del estado⁴. El nuevo concepto, introducido en las leyes generalizadas de rozamiento, consiguió describir con éxito varios aspectos como la génesis de terremotos, el acoplamiento sísmico, el pre- y el post-deslizamiento, así como la falta de respuesta de los terremotos a fenómenos de periodicidad corta, como las mareas. Por consiguiente y en lo sucesivo, se tratarán con detalle las leyes de rozamiento en rocas.

Ya era conocido por Coulomb que el coeficiente de fricción estática aumentaba lentamente con el tiempo y que el coeficiente de fricción dinámica dependía de la velocidad. Las investigaciones experimentales de Dieterich⁵, las cuales se integraron en la teoría de Ruina⁶ para dar lugar a una ley de rozamiento en función de la velocidad y del estado, mostraron que entre estos dos efectos existe una estrecha relación. En la ley de rozamiento de Dieterich-Ruina, el coeficiente de fricción depende tanto de la velocidad de deslizamiento, v , como de la variable de estado, θ , según la siguiente ecuación:

$$\mu = \mu_0 - a \ln \left(\frac{v^*}{|v|} + 1 \right) + b \ln \left(\frac{v^* \theta}{D_c} + 1 \right) \quad (20.16)$$

donde la variable de estado cumple la siguiente ecuación cinética:

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|v| \theta}{D_c} \right). \quad (20.17)$$

Ambas constantes a y b de la ecuación (20.16) son positivas y toman valores entre 10^{-2} y 10^{-3} , si bien D_c es cercano a $10 \mu\text{m}$ en condiciones de laboratorio, su escalado a sistemas de mayor envergadura no está aún claro, y v toma el valor típico de $0,2 \text{ m/s}$. Esta ley de rozamiento ha demostrado tener validez general, pudiéndose aplicar a materiales de diversa naturaleza tales como plástico, vidrio, papel, madera y diversos metales, además de rocas.

En el caso estático, se cumple que $\theta = t$. La variable de estado θ puede interpretarse como la «edad» media de los contactos desde el momento de su formación. En el caso de movimiento a velocidad constante y bajo la condición inicial dada por $\theta = (0) = \theta_0$, la solución de la ecuación (20.17) es

$$\theta(t) = \frac{D_c}{|v|} + \left(\theta_0 - \frac{D_c}{|v|} \right) \exp \left(- \frac{|v| t}{D_c} \right). \quad (20.18)$$

La variable de estado θ relaja al nuevo valor de equilibrio en la distancia de deslizamiento D_c . Por consiguiente, la magnitud puede interpretarse como la longitud crítica de deslizamiento a la que todos los micro-contactos previos

se destruyen y otros nuevos se forman. Tras el período de transición, se cumple que $\theta(\infty) = \frac{D_c}{v}$, lo cual está en consonancia con la idea de θ como variable indicativa de la edad del contacto; el valor estacionario de θ es, en este caso, igual a la duración media de los micro-contacts.

En el estado de deslizamiento estacionario, se cumple la siguiente expresión para el coeficiente de fricción

$$\mu = \mu_0 - (a - b) \ln \left(\frac{v^*}{|v|} + 1 \right). \quad (20.19)$$

A bajas velocidades, la ley de rozamiento (20.16) puede reescribirse en la forma

$$\mu \approx \mu_0 - a \ln \left(\frac{v^*}{|v|} \right) + b \ln \left(\frac{v^* \theta}{D_c} \right), \quad (20.20)$$

la cual se analiza a continuación.

La ley de rozamiento de Dieterich-Ruina no solo describe los procesos de rozamiento estacionarios, sino también los fenómenos de transición. Se va a considerar un proceso de rozamiento caracterizado por un deslizamiento a la velocidad v_1 . El coeficiente estacionario de fricción es, conforme a la ecuación (20.19), igual a

$$\mu^{(1)} \approx \mu_0 + (a - b) \ln \left(\frac{v_1}{v^*} \right). \quad (20.21)$$

Si la velocidad de deslizamiento cambia de forma abrupta de v_1 a v_2 , también lo hará, en un primer momento, el segundo miembro de la ecuación (20.20), y el coeficiente de fricción aumenta en la cantidad $\Delta\mu_1 = a \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$, alcanzando el valor dado por

$$\mu^{(2)} = \mu_0 + a \ln \left(\frac{v_2}{v^*} \right) - b \ln \left(\frac{v_1}{v^*} \right). \quad (20.22)$$

Tras el período de transición, alcanza el siguiente valor

$$\mu^{(3)} = \mu_0 + (a - b) \ln \left(\frac{v_2}{v^*} \right), \quad (20.23)$$

y, por tanto, cambia en la magnitud $\Delta\mu_2 = -b \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$. Este comportamiento se ilustra en la fig. 20.2, partir de datos experimentales de C. Marone⁷. Para el sistema mostrado en la fig. 20.2, los valores de las constantes son, aproximadamente, $v_2 / v_1 = 10$, $\Delta\mu_1 = 0,01$ y $\Delta\mu_2 = -0,014a$.

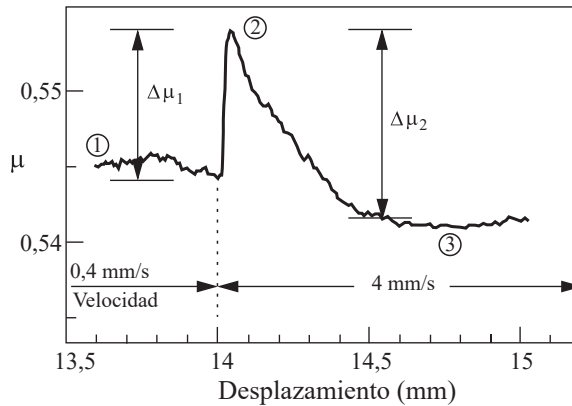


Fig. 20.2 Variación del coeficiente de fricción antes y después de un cambio repentino en la velocidad: La fuerza de rozamiento aumenta primero bruscamente y se relaja después hacia un valor estacionario. Fuente: C. Marone. «Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting». *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **26**, 643-696 (1998).

Hasta ahora se ha discutido la ley de rozamiento a esfuerzo normal constante, pero es fácil comprender que dicha formulación no es completa. Al aumentar el esfuerzo normal, entran nuevas asperezas en contacto, para las que el «tiempo de contacto» empieza a contar. En consecuencia, un aumento repentino del esfuerzo normal también conduce, aún en ausencia de movimiento tangencial, a la formación de nuevos contactos y a la disminución de la duración media de contacto. Dado que el área de contacto real entre superficies rugosas es, en primera aproximación, proporcional al esfuerzo normal, $A \propto \sigma_N$, un salto en el esfuerzo normal de magnitud $d\sigma_N$, conduce a un salto en el área de contacto tal que $dA \propto d\sigma_N$. Si la variable de estado θ se interpreta como el valor medio de la duración del contacto, este cambia, debido al salto, en la magnitud dada por $d\theta / \theta = -dA / A = -d\sigma_N / \sigma_N$ (puesto que la duración de los contactos recién formados es cero). Por consiguiente, la formulación de la ecuación cinética de θ (20.17), ha de completarse añadiendo el término $-\frac{\theta d\sigma_N}{\sigma_N}$. Esta nueva forma de

7. C. Marone. «Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting». *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **26**, 643-696 (1998).

la ecuación permite reproducir los datos experimentales de Linker y Dieterich⁸, aunque para ello debe introducirse el coeficiente fenomenológico ζ :

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|v|\theta}{D_c} \right) - \zeta \frac{\theta}{\sigma_N} \dot{\sigma}_N. \quad (20.24)$$

20.4 ESTABILIDAD DEL DESLIZAMIENTO BAJO FUERZAS DE FRICCIÓN VARIABLES CON LA VELOCIDAD Y EL ESTADO

Se va a considerar de nuevo el modelo mostrado en la fig. 12.1, el cual viene descrito por la siguiente ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}, \theta) + cx = cv_0t, \quad (20.25)$$

donde ahora la fuerza de rozamiento $F(\dot{x}, \theta) = F_N \mu(\dot{x}, \theta)$ viene definida por las ecuaciones (20.20) y (20.17). La solución estacionaria de esta ecuación viene dada por

$$x = v_0t - \frac{F(v_0, \theta_0)}{c}, \quad \theta_0 = \frac{D_c}{v_0}. \quad (20.26)$$

Mediante las fórmulas

$$x = x_0 + v_0t + \delta x, \quad \theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad (20.27)$$

se obtienen las ecuaciones linealizadas en la forma siguiente

$$m\delta\ddot{x} + F_{,v}\delta\dot{x} + c\delta x + F_{,\theta}\delta\theta = 0, \quad \delta\dot{\theta} = -\frac{1}{v_0}\delta\dot{x} - \frac{v_0}{D_c}\delta\theta \quad (20.28)$$

con

$$F_{,v} = \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{\dot{x}=v_0} = F_N \frac{a}{v_0}, \quad F_{,\theta} = \left. \frac{\partial F}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = F_N \frac{bv_0}{D_c}. \quad (20.29)$$

Haciendo las siguientes sustituciones

$$\delta x = Ae^{\lambda t}, \quad \delta\theta = Be^{\lambda t}, \quad (20.30)$$

8. M.F. Linker, J.H. Dieterich. «Effects of variable normal stress on rock friction: observations and constitutive equations». *J. Geophys. Res.* **97**, 4923-4940 (1992).

se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{\left(\frac{F_N a}{m v_0} + \frac{v_0}{D_c} \right)}_P + \lambda \underbrace{\left(\frac{c}{m} + \frac{F_N (a-b)}{m D_c} \right)}_Q + \underbrace{\frac{c v_0}{m D_c}}_R = 0. \quad (20.31)$$

La condición de estabilidad viene dada por $R = PQ$ (véase la sección 12.7) o por

$$\frac{c v_0}{m D_c} = \left(\frac{F_N a}{m v_0} + \frac{v_0}{D_c} \right) \left(\frac{c}{m} + \frac{F_N (a-b)}{m D_c} \right). \quad (20.32)$$

De la cual se llega a la expresión de la rigidez crítica

$$c = \frac{(b-a)}{D_c} \left(F_N + \frac{m v_0^2}{a D_c} \right). \quad (20.33)$$

Si $a > b$, el deslizamiento es siempre estable, mientras que en caso contrario, $a < b$, el deslizamiento es solo estable si la rigidez es mayor que el valor crítico, dado por (20.33). A muy bajas velocidades, el criterio de estabilidad (20.33) se simplifica para dar lugar a

$$c > c_{crit} = \frac{(b-a)}{D_c} F_N. \quad (20.34)$$

Este resultado se puede también interpretar de otra manera. El deslizamiento es estable cuando

$$F_N < \frac{c D_c}{b-a}, \quad (20.35)$$

es decir, cuando las cargas normales son suficientemente pequeñas. En el continuo se emplea la relación $c \approx GL$; en este caso, el deslizamiento es estable cuando

$F_N < \frac{GL D_c}{b-a}$ o cuando:

$$L \sigma_N < \frac{GD_c}{b-a}, \quad (20.36)$$

en la que se ha introducido el esfuerzo normal $\sigma_N \approx F_N / L^2$. Por consiguiente, bloques de masa suficientemente pequeños siempre se deslizarán de forma estable, mientras que bloques de dimensiones mayores que

$$L_c = \frac{GD_c}{\sigma_N (b-a)}, \tag{20.37}$$

se deslizarán de manera inestable.

El parámetro más importante que determina las características de la estabilidad, $(b-a)$, depende del material, la temperatura y la presión. En el caso del granito, el mineral más representativo de la zona superior de la corteza terrestre, el parámetro es positivo a temperaturas menores de 300°C y negativo a temperaturas mayores (fig. 20.3). Esto implica que en la corteza continental no se espera que ocurran terremotos a profundidades donde la temperatura alcance valores por encima de 300°C.

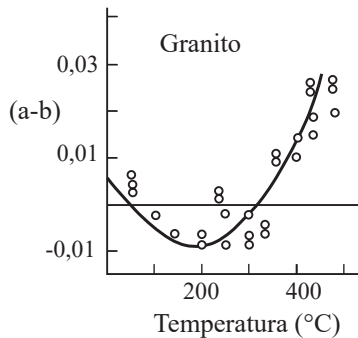


Fig. 20.3 Dependencia del parámetro $(a - b)$ con la temperatura para el caso del granito.
Fuente: C.H. Scholz. «Earthquakes and friction laws». *Nature* 391, 37-42 (1998).

Un análisis no lineal de estabilidad más detallado mostraría que un deslizamiento dado por la ecuación de rozamiento (20.20) y bajo una perturbación finita, vendría descrito por un diagrama de estabilidad del tipo mostrado en la fig. 20.4.

En la Dinámica de Terremotos, la existencia de tres zonas de estabilidad tiene el siguiente significado. Los terremotos solo pueden iniciarse en regiones de la corteza donde se cumplan las condiciones de inestabilidad. No obstante, pueden extenderse a regiones estables siempre y cuando produzcan saltos en la velocidad suficientemente grandes.

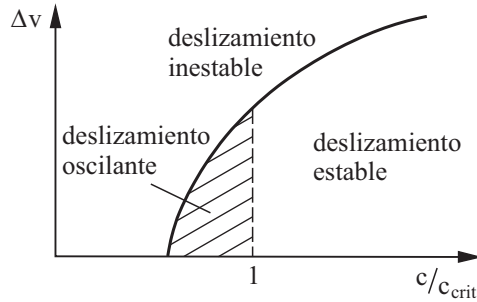


Fig. 20.4 Representación cualitativa de un diagrama de estabilidad para el sistema caracterizado por la ecuación (20.25) y la ley de rozamiento dada por las expresiones (20.20) y (20.17). El estado de deslizamiento estacionario se perturba mediante un cambio súbito en la velocidad de avance en la magnitud Δv . El movimiento es estable a perturbaciones pequeñas y cuando la dureza supera el valor crítico. Sin embargo, la inestabilidad surge cuando la perturbación es lo suficientemente grande, aunque la dureza siga estando por encima del valor crítico. Para durezas por debajo de la crítica existe una zona en la que, si bien el deslizamiento estacionario es inestable, la velocidad es finita y oscila en torno a un valor estacionario. En la zona de «deslizamiento inestable» (y sin tener en cuenta la inercia) la velocidad de deslizamiento diverge en un intervalo de tiempo finito.

20.5 NUCLEACIÓN DE TERREMOTOS Y POST-DESLIZAMIENTO

Aunque se perciben como súbitas sacudidas sin que en principio se advierta nada que las preceda, los terremotos son el resultado de una serie de procesos que se desarrollan con lentitud y que se engloban bajo el término de nucleación de terremotos. En este estadio, el sistema puede tratarse como si fuese cuasi-estacionario, en el que en cada momento se han de cumplir las condiciones de equilibrio. En el sencillo «modelo de bloque», descrito por la ecuación generalizada del rozamiento de Dieterich (20.20), y suponiendo que el muelle se desplaza a velocidad constante v_0 , la condición de equilibrio tiene la forma siguiente

$$c(x_0 + v_0 t - x) = F_N \left(\mu_0 - a \ln \left(\frac{v^*}{|v|} \right) + b \ln \left(\frac{v^* \theta}{D_c} \right) \right). \quad (20.38)$$

Esta ecuación, junto a la ecuación cinética que describe la evolución de la variable de estado

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{|\dot{x}| \theta}{D_c} \right), \quad (20.39)$$

puede resolverse solo numéricamente. Inmediatamente después del salto, tiene lugar un movimiento acelerado de reptación o *creep*, y la velocidad de deslizamiento v es entonces mucho mayor que la velocidad de reptación estacionaria: $v \gg D_c / \theta_0 = v_0$. La ecuación (20.39) puede entonces simplificarse, dando lugar a

$$\frac{d\theta}{dx} = -\left(\frac{\theta}{D_c}\right), \quad \theta = \theta_0 e^{-x/D_c}. \quad (20.40)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (20.38), se obtiene

$$\frac{c}{F_N}(x_0 + v_0 t - x) = \left(\mu_0 + a \ln \frac{\dot{x}}{v^*} + b \ln \frac{\theta_0 v^*}{D_c}\right) - \frac{bx}{D_c}. \quad (20.41)$$

Esta ecuación puede integrarse de forma explícita:

$$A \int_0^t \exp\left(\frac{cv_0}{aF_N} t\right) dt = \int_0^x \exp\left(-\frac{Bx}{a}\right) dx, \quad (20.42)$$

donde

$$A = v^* \exp\left(-\frac{\mu_0}{a} - \frac{b}{a} \ln \frac{\theta_0 v^*}{D_c} + \frac{cx_0}{aF_N}\right) = \dot{x}_0, \quad (20.43)$$

es igual a la velocidad de deslizamiento en el punto $t = 0$, \dot{x}_0 , y

$$B = \left(\frac{b}{D_c} - \frac{c}{F_N}\right). \quad (20.44)$$

La ecuación (20.42) tiene la siguiente solución:

$$x = -\frac{a}{B} \ln \left[1 - \frac{\dot{x}_0 B F_N}{cv_0} \left(\exp\left(\frac{cv_0}{aF_N} t\right) - 1 \right) \right]. \quad (20.45)$$

La fig. 20.5 muestra una evolución típica del proceso de reptación según la ecuación anterior. El tiempo transcurrido hasta la aparición de la inestabilidad se calcula a partir de la condición por la que el argumento del logaritmo en la ecuación (20.45) es igual a cero:

$$t_c = \frac{aF_N}{cv_0} \ln \left(1 + \frac{cv_0}{\dot{x}_0 B F_N} \right). \quad (20.46)$$

En la proximidad de la inestabilidad, la ecuación (20.45) se puede aproximar por la siguiente expresión asintótica

$$x \approx -\frac{a}{B} \ln \left[\frac{\dot{x}_0 B}{a} \left(1 + \frac{cv_0}{\dot{x}_0 B F_N} \right) (t_c - t) \right]. \quad (20.47)$$

La velocidad de deslizamiento aumenta según la fórmula

$$\dot{x} \approx \frac{a}{B}(t_c - t)^{-1}. \quad (20.48)$$

El movimiento acelerado de reptación o *creep* que precede a un fenómeno de deslizamiento o de *slip* se ha podido demostrar en el laboratorio a partir de modelos tribológicos sencillos (fig. 20.6).

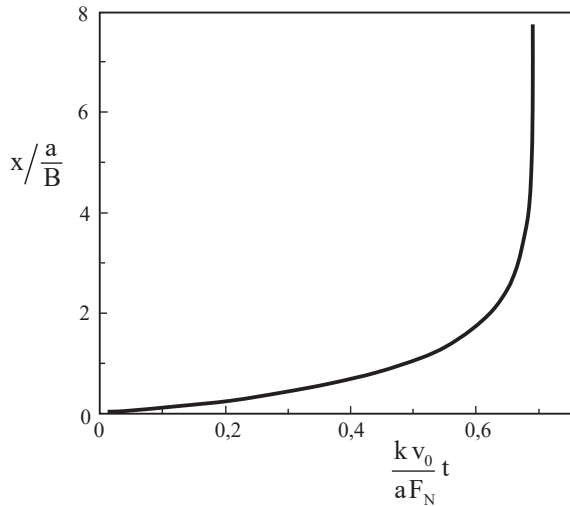


Fig. 20.5 Movimiento acelerado de reptación o *creep* antes de un salto según la ecuación (20.45) con $\frac{\dot{x}_0 B F_N}{c v_0} = 1$.

Incluso tras el salto en las condiciones, ocurre en general un cierto «post-deslizamiento», el cual viene descrito por la ley de rozamiento. Inmediatamente después del salto y debido a la distancia recorrida, la variable es prácticamente nula (véase ecuación (20.40)). Por tanto, la variable tras el salto vendrá descrita por la siguiente ecuación

$$\dot{\theta} \approx 1, \quad \theta \approx t - t'_c, \quad (20.49)$$

donde t'_c es el tiempo al que cesa el salto. A bajas velocidades v_0 , la «fuerza elástica del muelle» F puede asumirse constante. Por consiguiente, la ecuación (20.38) puede reescribirse en la forma

$$F / F_N = \left(\mu_0 + a \ln \frac{\dot{x}}{v^*} + b \ln \frac{v^*(t - t'_c)}{D_c} \right), \quad (20.50)$$

De lo cual se llega a

$$\dot{x} = v^* e^{\frac{1}{a} \left(\frac{F}{F_N} - \mu_0 \right)} \cdot \left(\frac{v^*(t - t'_c)}{D_c} \right)^{-b/a}. \quad (20.51)$$

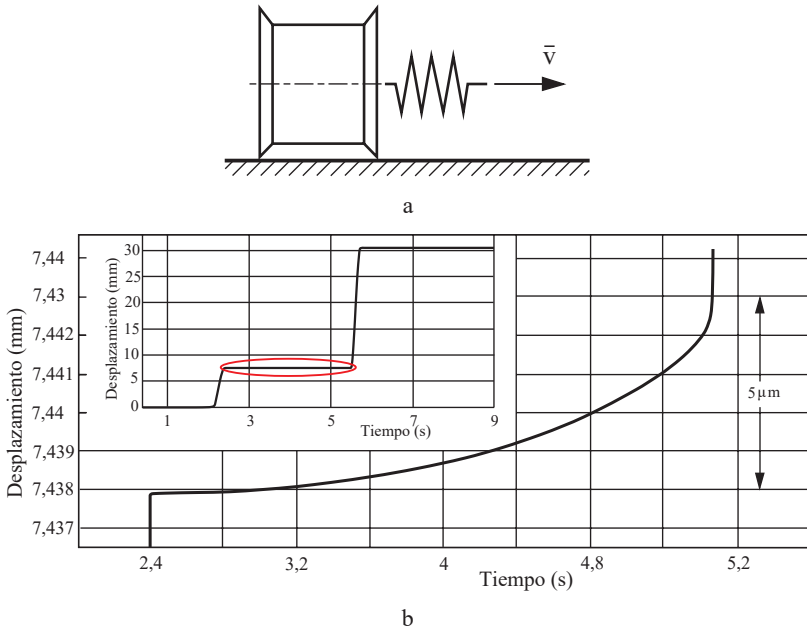


Fig. 20.6 (b) Seguimiento experimental de la posición de un cuerpo de acero que se desliza sobre un sustrato de acero en función del tiempo. El esquema del experimento se muestra en (a). Los datos de posición se adquirieron con una resolución de 8 nm. En el recuadro interior se muestran dos saltos sucesivos de magnitudes 8 y 22 mm. En la gráfica principal se muestra ampliada la fase «stick» completa (rodeada en rojo en el recuadro interior). En ella se puede observar que durante esta fase tiene lugar un movimiento de reptación o *creep* lento, que se acelera rápidamente cuando se aproxima a la fase *slip*. (Experimento realizado por V.L. Popov y J. Starcevic, Universidad Técnica de Berlín).

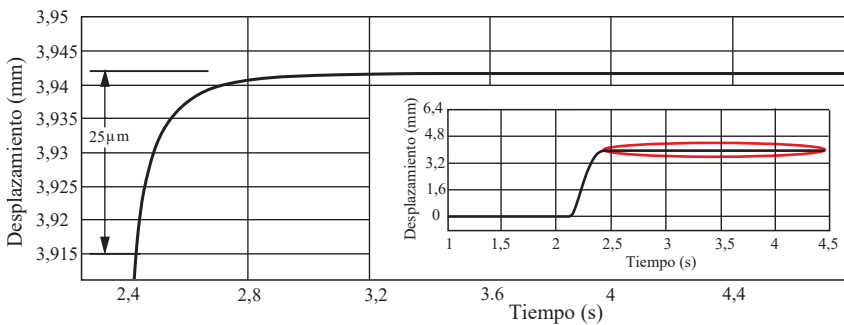


Fig. 20.7 Representación de la coordenada de posición en función del tiempo en un cuerpo de acero deslizándose sobre un sustrato de *vidrio*. Los datos se han obtenido a partir de un experimento mostrado en la fig. 20.6 (a). En el recuadro interior se observa un salto de unos 4 mm. En la gráfica principal se muestra ampliada la fase *stick* (rodeada en rojo en el recuadro interior). En dicha gráfica puede observarse que durante la fase *stick* tiene lugar un movimiento de reptación (*creep*) ralentizado (post-deslizamiento). (Datos experimentales de V.L. Popov y J. Starcevic, Universidad Técnica de Berlín).

El exponente b/a siempre toma valores en torno a 1. En el ejemplo mostrado en la fig. 20.7, este es igual a 1,5. Al contrario de lo que ocurre en el pre-deslizamiento, la intensidad del post-deslizamiento es muy sensible al esfuerzo residual (proporcional a $(F/F_N - \mu'_0)$), el cual depende de la estructura particular de la región de fractura o del par de materiales.

20.6 PREMONITORES Y RÉPLICAS

Si el movimiento de reptación descrito por la ecuación (20.48) tuviese lugar en una serie de saltos discretos de longitud l , la frecuencia con la que ocurren los premonitores, \dot{n} , vendría dada por esta ecuación:

$$\dot{n}_{\text{premonitores}} \approx \frac{a}{Bl} (t_0 - t)^{-1}. \quad (20.52)$$

Lo mismo se aplica al post-deslizamiento descrito por la ecuación (20.51). Si este ocurriese en una serie de saltos discretos (réplicas) de igual longitud l , la ecuación que describe la frecuencia de las réplicas, \dot{n} , sería:

$$\dot{n}_{\text{réplicas}} = \frac{1}{l} e^{a \left(\frac{F}{F_N} - \mu'_0 \right)} \cdot (t - t'_0)^{-b/a}. \quad (20.53)$$

Las leyes en forma de función potencia para premonitores y réplicas, dadas por las ecuaciones (20.52) y (20.53), fueron formuladas de manera empírica en 1894 por Fusakichi Omori y se las conoce como las *leyes de Omori*.

Los premonitores forman parte de la nucleación de terremotos. Visto en detalle como proceso continuo, los premonitores tienen lugar en las proximidades del epicentro del «sismo principal». Por el contrario, las réplicas constituyen mecanismos de relajación de esfuerzos producidos por los terremotos principales, y se localizan en general en el borde de las zonas de deslizamiento de dichos sismos.

20.7 MECÁNICA DEL CONTINUO APLICADA A MEDIOS GRANULARES Y A LA ESTRUCTURA DE FALLAS

Los medios geológicos son en general medios granulares constituidos por agregados de fragmentos o partículas. La resistencia a la cizalladura de un medio de este tipo se determina principalmente por la fuerza de rozamiento entre unos pocos bloques. Considérese un medio granular y poroso, sometido a la acción de un tensor de esfuerzos principales $\tilde{\sigma}_3 < \tilde{\sigma}_2 < \tilde{\sigma}_1$ y presión en poro p , el cual se muestra esquematizado en la fig. 20.8a. En la representación 2D de la figura, el esfuerzo principal que actúa en la dirección perpendicular al plano del dibujo y de valor intermedio $\tilde{\sigma}_2$, carece de importancia.

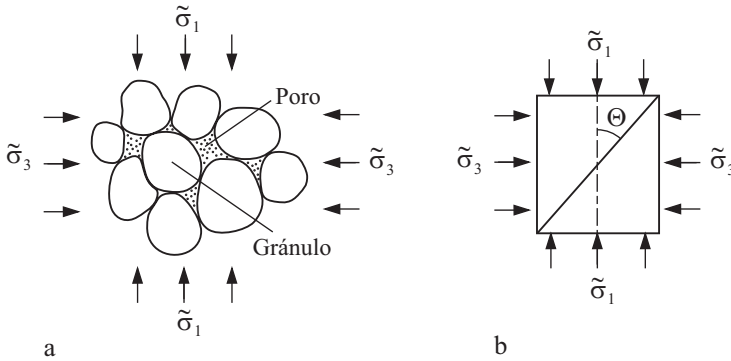


Fig. 20.8 Medio granular y poroso bajo la acción de los esfuerzos principales $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_3$ y presión en poro.

El tensor efectivo de esfuerzos, el cual determina el comportamiento del material, se calcula como diferencia entre el tensor de esfuerzos y la presión hidrostática en poro:

$$\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 - p, \quad \sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 - p, \quad \sigma_3 = \tilde{\sigma}_3 - p. \tag{20.54}$$

Los esfuerzos normal y tangencial en una sección orientada de manera tal que forma un ángulo θ con el «eje 1» (fig. 20.8b), se calculan mediante las ecuaciones

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} - \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \cos 2\theta, \tag{20.55}$$

$$\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sen 2\theta \tag{20.56}$$

o

$$\sigma_N = \frac{(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_3)}{2} - \frac{(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)}{2} \cos 2\theta - p, \tag{20.57}$$

$$\tau = \frac{(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)}{2} \sen 2\theta. \tag{20.58}$$

Es decir, la presión en poro disminuye el esfuerzo normal que actúa sobre una sección dada, pero no tiene ninguna influencia en el esfuerzo cortante.

El deslizamiento en la cara de la sección comienza cuando el esfuerzo cortante τ alcanza el valor $\mu\sigma_N$:

$$\tau = \mu \sigma_N, \quad (20.59)$$

o bien, teniendo en cuenta la contribución de la adherencia,

$$\tau = \tau_0 + \mu \sigma_N. \quad (20.60)$$

En este contexto, denota el «coeficiente interno de fricción», que en principio puede estimarse a partir de experimentos independientes. La fig. 20.9 ilustra el criterio de deslizamiento mediante datos experimentales con distintos tipos de roca. El valor experimental del coeficiente de fricción típico en rocas, se encuentra entre $\tau \approx 0,6$ y $\mu = 0,85$.

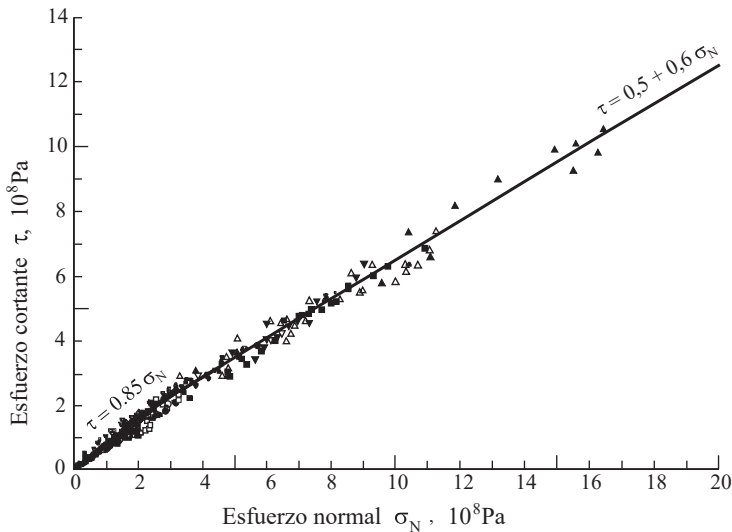


Fig. 20.9 «Tenacidad al rozamiento» en función del esfuerzo normal para diversos tipos de roca. Fuente: J.D. Byerlee. «Friction of rocks». *Pure. Appl. Geophys.* **116**, 615-626 (1978).

Este criterio se denomina *criterio de rotura de (Mohr-)Coulomb* para medios granulares, y se representa gráficamente por una línea recta, como muestra la fig. 20.10. Todos los esfuerzos normales y tangenciales dados por las ecuaciones (20.55) y (20.56), y que actúan sobre una sección inclinada en un ángulo cualquiera, forman un círculo en el plano (σ_N, τ) – el llamado círculo de Mohr. Si dicho círculo se encuentra por debajo de la línea de la ecuación (20.60), como en el caso que muestra la fig. 20.10a, entonces el criterio de ruptura no se cumple en ninguna sección. Aumentando el esfuerzo principal σ_3 , o disminuyendo σ_1 , lo cual equivale a desplazar el círculo completo hacia la izquierda (por ejemplo, aumentando la presión en poro, según la ecuación (20.57)), el círculo de Mohr «roza» la recta (20.60) (fig. 20.10b). En este momento, el criterio de ruptura se cumple por primera vez para el ángulo dado por

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \tag{20.61}$$

donde es el ángulo crítico:

$$\tan \varphi = \mu. \tag{20.62}$$

Para un coeficiente de fricción $\mu = 0,6$ se obtiene que $\theta \approx 0,52$ (o $\approx 30^\circ$) y para un valor de $\mu = 0,85$, el ángulo es $\theta \approx 0,43$ (o $\approx 25^\circ$).

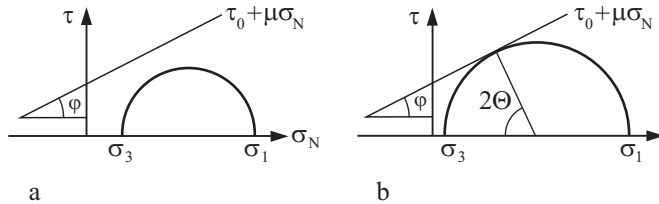


Fig. 20.10 Círculo de Mohr y el criterio de rotura de (Mohr-)Coulomb.

El criterio dado por la expresión (20.60) se puede expresar, con la ayuda de la fig. 20.10b, en función de los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 \left(\sqrt{1 + \mu^2} - \mu \right) - \sigma_3 \left(\sqrt{1 + \mu^2} + \mu \right) = 2\tau_0. \tag{20.63}$$

Es decir, entre los esfuerzos principales que actúan sobre la superficie de la fractura existe una dependencia lineal. Los esfuerzos principales, los cuales se pueden medir in situ mediante taladrado, muestran que dicha condición se cumple para todas las profundidades; lo cual significa que la corteza terrestre se encuentra cerca del estado crítico, independientemente de la profundidad. Si el esfuerzo principal, σ_3 , fuese negativo (esfuerzo de tracción), entonces se puede usar por lo general el criterio de rotura, dado por

$$\sigma_3 = -\sigma_0. \tag{20.64}$$

Anderson⁹ fue el primero en darse cuenta de que las fallas (o zonas de fractura) pueden clasificarse en varios tipos básicos, los cuales pueden explicarse fácilmente a través de las propiedades de medios granulares. La clasificación de Anderson parte de la observación de que los ejes principales del tensor de esfuerzos en la parte superior de la corteza terrestre son, con frecuencia, o bien normales o paralelos a la superficie. Según la orientación de los ejes del esfuerzo principal mayor (σ_1) y menor (σ_3), existen tres posibilidades, las cuales se muestran en la fig. 20.11a-c y permiten distinguir tres tipos de fallas: las *fallas normales*, fig. 20.11a, las *fallas inversas*, fig. 20.11b y las *fallas de rumbo* o *transcurrentes* fig.

20.11c. En el caso de que el esfuerzo principal menor sea negativo, los bloques de la falla se separan a lo largo de un plano perpendicular al eje del esfuerzo principal negativo (*fallas divergentes*, fig. 20.11d). El tipo de falla influye tanto en la magnitud como en el grado de destrucción (intensidad) del terremoto. Una falla de rumbo de tipo (c) produce las aceleraciones tangenciales más altas, mientras que una falla normal puede provocar potentes tsunamis (en el caso de que el terremoto se produzca bajo el mar).

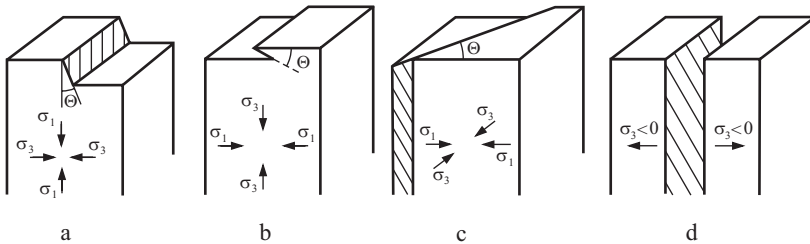


Fig. 20.11 Tipos principales de fallas según la clasificación de Anderson: (a) Falla normal o de gravedad, (b) Falla inversa, (c) Falla transcurrente o de rumbo, (d) Falla divergente.

20.8 ¿SE PUEDEN PREDECIR LOS TERREMOTOS?

Esta pregunta ha sido foco de intensa discusión en las últimas décadas, con prominentes defensores tanto del sí como del no. La polémica está servida de antemano, ya que los modelos sencillos de terremotos, descritos con anterioridad en este capítulo, permiten justificar ambas posiciones.

Si un terremoto se interpreta como una inestabilidad tipo *stick-slip* y partiendo de una ley de rozamiento con coeficientes estático y dinámico constantes, entonces no ocurre desplazamiento previo a la fase *slip*. Por consiguiente, no existen indicios de un cambio inminente y no es posible predecir el terremoto. Extendiendo la explicación al continuo se llega a la misma conclusión, independientemente de lo complicado que sea el sistema. Si bien es cierto que en sistemas distribuidos se dan comportamientos complejos que pueden reproducir las características de los terremotos (como las leyes de Gutenberg-Richter y de Omori), las regularidades en el comportamiento no tienen un carácter puramente estadístico. Y aun cuando pueden facilitar un análisis a posteriori, no permiten hacer predicciones de cuándo y dónde ocurrirá el fenómeno sísmico.

Sin embargo, esta conclusión se basa en la concepción de un modelo que no es totalmente correcto. Tanto los experimentos de laboratorio (véase la sección 20.5) como las medidas sismológicas muestran que los terremotos siempre están precedidos por movimientos acelerados de reptación o *creep*, los cuales son una indicación de que los esfuerzos locales están cercanos al valor crítico. Este hecho conlleva un cierto optimismo. Sin embargo, los datos experimentales presentados en la sección 20.5 también muestran dónde está la pega: para la observación

concreta del proceso de reptación se requiere medir desplazamientos de la corteza terrestre con una precisión muy alta. Dado que las medidas sismológicas se basan fundamentalmente en la medida de aceleraciones y existen solo unos pocos datos de desplazamientos absolutos a alta resolución, cabe esperar que la introducción de mejoras en los modelos y métodos de medida hará posible la predicción de terremotos¹⁰.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1: Sean dos semi-espacios elásticos que primero se comprimen entre sí con un esfuerzo normal, (σ_N) , y después se someten a un esfuerzo tangencial, τ , hasta que se produce una inestabilidad del tipo *stick-slip*. Suponiendo que en la interfase se cumple la ley sencilla de rozamiento de Coulomb con coeficientes de fricción estática y dinámica constantes (μ_e y μ_d , respectivamente), determinar la velocidad relativa y la aceleración de las caras o bordes de fractura.

Resolución: Se elige el sistema de coordenadas de forma que el eje x esté situado en la cara de la fractura y el eje z es perpendicular a ella. El medio elástico se encuentra en la región de z positivos. Bajo las condiciones del enunciado del problema, en el medio solo se producen ondas transversales, las cuales se pueden describir mediante la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{sonido}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ donde } c_{sonido}^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Esta ecuación es válida para todas las derivadas u con respecto al tiempo y al espacio, y por tanto, también para el esfuerzo cortante, $\tau = G\partial u / \partial z$:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = c_{sonido}^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}.$$

El esfuerzo cortante, justo antes de que se produzca la inestabilidad, es igual a $\tau_e = \mu_e \sigma_N$ y tras comenzar el movimiento, $\tau_d = \mu_d \sigma_N$. La solución de la ecuación de onda con estas condiciones de contorno es una función escalón de altura $\Delta \tau = \sigma_N (\mu_e - \mu_d)$, la cual se propaga en el eje positivo de z a la velocidad $c_{sonido} = \sqrt{G/\rho}$. Para una solución cualquiera con forma de onda propagándose desde la superficie, $u(z - c_{sonido}t)$, se cumple que: $v = \frac{\partial u}{\partial t} = -c_{sonido} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{c_{sonido}}{G} \tau$. Entre el salto en el esfuerzo, $\Delta \tau = \sigma_N (\mu_e - \mu_d)$, y el salto en la velocidad, Δv , existe por tanto la siguiente relación:

$$\Delta v = -\frac{c_{sonido}}{G} \Delta \tau = \frac{c_{sonido}}{G} \sigma_N (\mu_e - \mu_d) = \frac{\sigma_N (\mu_e - \mu_d)}{\sqrt{G\rho}}.$$

La aceleración es cero en todos los puntos salvo en el frente de onda, donde es infinita.

Problema 2: Dos semi-espacios elásticos se ponen en contacto de la forma descrita en el problema 1. Esta vez se supone que el coeficiente de fricción decae desde el valor estático μ_e al valor dinámico μ_d a lo largo de una distancia D_c (longitud de deslizamiento). Determinar para este caso la aceleración máxima de los bordes o caras de la fractura.

Resolución: A partir del momento en que los bordes se deslizan entre sí y hasta que se alcanza la extensión D_c , el esfuerzo de fricción en la superficie de contacto es igual a

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0,t} = \sigma_N \left(\mu_e - \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} u \Big|_{z=0,t} \right).$$

La solución general de la ecuación de una onda que se propaga desde la superficie tiene la forma $u = \frac{\tau_0}{G} z + f(z - c_{\text{sonido}} t)$, donde $\tau_0 = \mu_e \sigma_N$ es constante e igual al valor macroscópico del esfuerzo cortante, lejos de las caras de fractura. Para el desplazamiento de las superficies se obtiene, por tanto, la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma_N c_{\text{sonido}}}{G} \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} u.$$

Cuando el movimiento se inicia con una pequeña perturbación u_0 , la superficie se desplaza según la ecuación

$$u = u_0 \exp \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sonido}}}{G} \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} t \right).$$

La aceleración es igual a

$$\ddot{u} = \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sonido}}}{G} \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} \right)^2 u_0 \exp \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sonido}}}{G} \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} t \right).$$

Entre el desplazamiento y la aceleración se establece la siguiente relación:

$$\ddot{u} = \left(\frac{\sigma_N c_{\text{sonido}}}{G} \frac{\mu_e - \mu_d}{D_c} \right)^2 u. \text{ En el momento en el que el desplazamiento alcanza}$$

el valor $u = D_c$, la aceleración alcanza un máximo, dado por

$$\ddot{u}_{\text{max}} = \frac{\sigma_N^2 (\mu_e - \mu_d)^2}{G \rho D_c}.$$

Este valor es, por tanto, inversamente proporcional a la longitud de deslizamiento D_c . La velocidad máxima es la misma que la dada en el problema 1.

Problema 3: Dos semi-espacios elásticos se ponen en contacto de la manera descrita en el problema 1. Esta vez se supone que el coeficiente de fricción decae exponencialmente con el tiempo, desde el valor estático μ_e al dinámico μ_d ¹¹. El tiempo de relajación característico es t_0 . Determinar la velocidad máxima y la aceleración en los bordes de la fractura para este caso.

Resolución: A partir del comienzo del movimiento relativo, se cumple que el esfuerzo de fricción en el contacto viene dado por

$$\tau = G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0,t} = \sigma_N \left(\mu_e e^{-t/t_0} + \mu_d (1 - e^{-t/t_0}) \right).$$

La solución general de la ecuación de una onda propagándose desde la superficie tiene la forma $u = \frac{\tau_0}{G} z + f(z - c_{sonido} t)$, donde $\tau_0 = \mu_e \sigma_N$ es el valor macroscópico y constante del esfuerzo cortante lejos de la fractura. Para la velocidad en la superficie se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma_N c_{sonido}}{G} (\mu_e - \mu_d) (1 - e^{-t/t_0}) = \frac{\sigma_N (\mu_e - \mu_d)}{\sqrt{G\rho}} (1 - e^{-t/t_0}).$$

La aceleración es igual a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sigma_N (\mu_e - \mu_d)}{\sqrt{G\rho} t_0} e^{-t/t_0}.$$

La velocidad alcanza el valor máximo dado por

$$\dot{u}_{\max} = \frac{\sigma_N (\mu_e - \mu_d)}{\sqrt{G\rho}}$$

a tiempos $t \gg t_0$, y la aceleración \ddot{u} alcanza el máximo

$$\ddot{u}_{\max} = \frac{\sigma_N (\mu_e - \mu_d)}{\sqrt{G\rho} t_0}$$

a $t = 0$.

11. Esta suposición corresponde al caso donde la longitud de deslizamiento D_c aumenta linealmente con la velocidad, lo cual es típico de medios granulares. (Véase, por ejemplo, T. Hatano. «Scaling of the critical slip distance in granular layers». *Geophysical Research Letters* **36**, L18304 (2009), doi: 10.1029/2009GL039665.

APÉNDICE A – CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS NORMALES BAJO LA ACCIÓN DE DISTRIBUCIONES DE PRESIONES DETERMINADAS

En este apartado se calcularán los desplazamientos de la superficie de un semi-espacio elástico para varias distribuciones de presiones o esfuerzos de interés en la Mecánica de Contacto.

A. ESFUERZOS NORMALES DISTRIBUIDOS EN UN CÍRCULO DE RADIO a SEGÚN LA FUNCIÓN

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{A.1})$$

En este caso se calculará el desplazamiento de la superficie en la dirección normal dado por la ecuación (5.7), que se reproduce de nuevo aquí:

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint P_z(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \quad (\text{A.3})$$

El sistema de coordenadas empleado se muestra en la fig. A.1 a.

Puesto que la distribución de presiones tiene simetría rotacional, el desplazamiento vertical en un punto de la superficie depende tan solo de la distancia de dicho punto, r , al origen de coordenadas, O. Por tanto, basta con determinar el desplazamiento en los puntos del eje x . Se calcula a continuación el desplazamiento vertical en el punto A. Para ello, se ha de determinar el desplazamiento en el punto A causado por el esfuerzo en el punto «móvil» B, y finalmente integrar el resultado sobre todas las posiciones del punto B dentro de la región de aplicación del esfuerzo. Por la simetría del problema, el esfuerzo en el punto B también depende solo de la distancia t entre dicho punto y el origen de coordenadas O. Para esta distancia se cumple que $t^2 = r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi$.

Por consiguiente, la distribución de presiones es

$$\begin{aligned} p(s, \varphi) &= p_0 \left(1 - \frac{r^2 + s^2 + 2rs \cos \varphi}{a^2} \right)^{-1/2} \\ &= p_0 a \left(a^2 - r^2 - s^2 - 2rs \cos \varphi \right)^{-1/2} = p_0 a \left(a^2 - 2\beta s - s^2 \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde se cumple que: $\alpha^2 = a^2 - r^2$, $\beta = r \cos \varphi$.

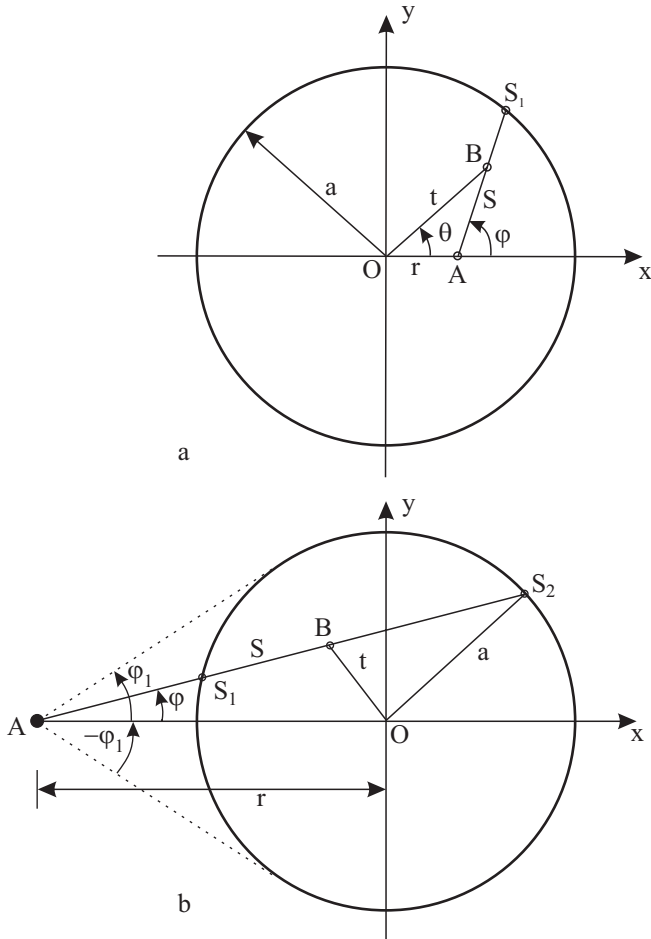


Fig. A.1 Esquema para el cálculo del desplazamiento vertical bajo la acción de una distribución de presiones en una región circular: (a) en un punto en el interior de la región sometida a presión, (b) en un punto en el exterior de la misma.

Para la componente z del desplazamiento se obtiene

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds \right) d\varphi, \quad (\text{A.5})$$

donde s_1 es la raíz positiva de la ecuación de segundo grado $\alpha^2 - 2\beta s - s^2 = 0$. La integral de ds resulta en

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds = \frac{\pi}{2} - \arctan(\beta / \alpha). \quad (\text{A.6})$$

Claramente se cumple que $\arctan(\beta(\varphi) / \alpha) = -\arctan(\beta(\varphi + \pi) / \alpha)$, y por tanto la integración sobre φ cancela el término \arctan . En consecuencia, se cumple que

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} d\varphi = \frac{\pi p_0 a}{E^*} = d = \text{const}, \quad r \leq a \quad (\text{A.7})$$

donde se ha introducido la profundidad de indentación d .

Se considera ahora el punto A fuera de la región sometida a presión (fig. A.1 b). En este caso se cumple que

$$p(s, \varphi) = p_0 a (\alpha^2 + 2\beta s - s^2)^{-1/2}. \quad (\text{A.8})$$

El desplazamiento viene ahora dado por la siguiente ecuación

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} p_0 a \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \left(\int_{s_1}^{s_2} (\alpha^2 + 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds \right) d\varphi, \quad (\text{A.9})$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación

$$\alpha^2 + 2\beta s - s^2 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Por consiguiente, se tiene que

$$\int_{s_1}^{s_2} (\alpha^2 + 2\beta s - s^2)^{-1/2} ds = \pi. \quad (\text{A.11})$$

La integración restante de la ecuación (A.9) es trivial, lo que resulta en $u_z = \frac{2}{E^*} p_0 a \varphi_1$ o, teniendo en cuenta la relación geométrica $\varphi_1 = \arcsen(a / r)$ que puede deducirse fácilmente de la fig. A1b,

$$u_z = \frac{2}{E^*} p_0 a \cdot \arcsen(a / r), \quad r > a \quad (\text{A.12})$$

o, teniendo en cuenta la expresión (A.7),

$$u_z = \frac{2}{\pi} d \cdot \arcsen(a / r), \quad r > a. \quad (\text{A.13})$$

Del resultado (A.7) se deduce la manera de producir una distribución de presiones de tales características, ya que es el resultado de presionar la superficie con un indentador cilíndrico duro.

La fuerza global que actúa sobre la zona sometida a presión es igual a

$$F_N = \int_0^a p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2. \quad (\text{A.14})$$

La rigidez del contacto viene definida por el cociente entre la fuerza y el desplazamiento:

$$c = 2aE^*. \quad (\text{A.15})$$

Teniendo en cuenta la expresión (A.7), la distribución de presiones (A.1) puede expresarse también de la siguiente manera

$$p(r) = \frac{1}{\pi} \frac{E^* u_z}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (\text{A.16})$$

B. DISTRIBUCIÓN HERTZIANA DE PRESIONES

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (\text{A.17})$$

Para el desplazamiento vertical se obtiene lo siguiente

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds \right) d\varphi. \quad (\text{A.18})$$

La integral sobre ds se calcula según

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2\beta s - s^2)^{1/2} ds = -\frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\beta/\alpha) \right). \quad (\text{A.19})$$

La integración sobre $d\varphi$ cancela los términos que contienen el producto $\alpha\beta$ y los que contienen arcotangentes. El resto de términos permite obtener el resultado final de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{1}{\pi E^*} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\pi}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \\
 &= \frac{1-\nu^2}{4E} \frac{p_0}{a} \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) .
 \end{aligned}
 \tag{A.20}$$

C. DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE PRESIONES EN UNA CORONA CIRCULAR ESTRECHA

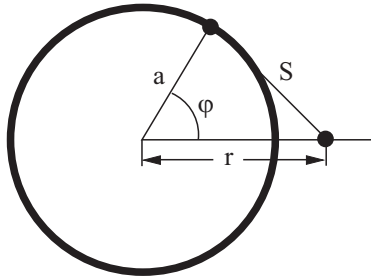


Fig. A.2 Esquema para el cálculo del desplazamiento vertical en el punto r cuando se aplica una distribución uniforme de presiones en una corona circular estrecha.

El desplazamiento en el punto r se calcula según

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{s} \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2\pi} \frac{F_N}{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}} , \\
 &= \frac{F_N}{2aE^*} \frac{4}{\pi^2 (1+r/a)} K \left(2 \frac{\sqrt{r/a}}{1+r/a} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A.21}$$

(fig. A.3), donde F_N es la fuerza normal y $K(\kappa)$ es la integral elíptica completa de primera especie:

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}} .
 \tag{A.22}$$

Cuando $r \approx a$, el desplazamiento tiene una singularidad logarítmica:

$$u_z = \frac{F_N}{2aE^*} \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{8}{|r/a-1|}, \quad |r/a-1| \ll 1. \quad (\text{A.23})$$

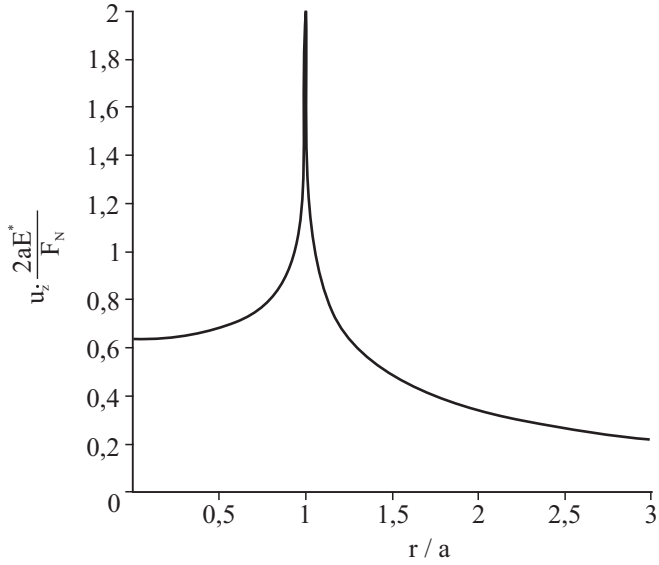


Fig. A.3 Desplazamiento de la superficie por acción de una presión ejercida sobre una zona en forma de corona circular estrecha.

APÉNDICE B – EL CONTACTO NORMAL CON PERFILES DE SIMETRÍA AXIAL

En este apéndice se trata de forma más general el caso del contacto entre perfiles de simetría axial y superficies compactas. Para ello, se va a suponer que la solución del caso de contacto para un indentador cilíndrico, rígido y liso ya se conoce (véase Apéndice A). El tratamiento permite derivar al mismo tiempo las ecuaciones básicas del método de reducción de dimensión (MRD, véase sección 5.6).

Se considera un contacto entre un indentador rígido de la forma $z = f(r)$ y un semi-espacio elástico caracterizado por la magnitud elástica efectiva E^* . Sea d la profundidad de indentación bajo la acción de la fuerza normal y a el radio de contacto. Para un perfil dado, cada una de estas tres magnitudes viene determinada por las otras dos, en especial, la profundidad de indentación, la cual se puede expresar como función explícita del radio de contacto

$$d = g(a). \quad (\text{A.24})$$

Se va a examinar el proceso de indentación desde el momento en que las superficies entran en contacto hasta que se alcanza la profundidad de indentación final d . Para ello, se designan como \tilde{F}_N , \tilde{d} y \tilde{a} a los valores instantáneos de fuerza, profundidad de indentación y radio de contacto, respectivamente. Por consiguiente, el proceso global consiste en el cambio de la profundidad de indentación desde el valor $\tilde{d} = 0$ hasta el valor $\tilde{d} = d$, en el que también cambia el radio de contacto desde $\tilde{a} = 0$ hasta $\tilde{a} = a$ y la fuerza de contacto desde $\tilde{F}_N = 0$ hasta $\tilde{F}_N = F_N$. La fuerza normal al final del proceso puede escribirse de la siguiente manera

$$F_N = \int_0^{F_N} d\tilde{F}_N = \int_0^a \frac{d\tilde{F}_N}{d\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.25})$$

Considerando que la rigidez diferencial de una región de radio \tilde{a} viene dada por (véase ecuación (A.15))

$$\frac{d\tilde{F}_N}{d\tilde{a}} = 2E^* \tilde{a}, \quad (\text{A.26})$$

y empleando la relación dada por (A.24), se obtiene

$$F_N = 2E^* \int_0^a \tilde{a} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.27})$$

Integrando por partes se llega al siguiente resultado

$$F_N = 2E^* \left[a \cdot g(a) - \int_0^a g(\tilde{a}) d\tilde{a} \right] = 2E^* \left[\int_0^a (g(a) - g(\tilde{a})) d\tilde{a} \right]. \quad (\text{A.28})$$

Ahora se calcula la distribución de presiones en la región de contacto. Una indentación infinitesimal en una superficie de magnitud $d\tilde{a}$ y radio \tilde{a} , contribuye a la distribución de presiones de la siguiente manera (véase ecuación (A.16)):

$$dp(r) = \frac{1}{\pi} \frac{E^*}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} d\tilde{a}, \quad \text{con } r < \tilde{a}. \quad (\text{A.29})$$

La distribución de presiones al final del proceso de indentación es igual a la suma de todos estos incrementos:

$$p(r) = \int_{d(r)}^d \frac{1}{\pi} \frac{E^*}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} d\tilde{a} = \int_r^a \frac{1}{\pi} \frac{E^*}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{a}} d\tilde{a} \quad (\text{A.30})$$

o, teniendo en cuenta la definición dada por (A.24),

$$p(r) = \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.31})$$

La función $g(a)$ de la ecuación (A.24) determina de forma inequívoca tanto la fuerza normal (mediante la ecuación (A.28)), como la distribución de presiones (mediante la ecuación (A.31)). El problema del contacto normal se reduce, por tanto, a determinar la función (A.24).

La función $d = g(a)$ se puede obtener de la siguiente manera. El desplazamiento infinitesimal de la superficie en el punto $r = a$ producido por una indentación infinitesimal de magnitud $d\tilde{a}$ en una región de contacto de radio $\tilde{a} < a$ es, según la ecuación (A.13), igual a

$$du_z(a) = \frac{2}{\pi} \arcsen\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) d\tilde{a}. \quad (\text{A.32})$$

El proceso de indentación deja, por tanto, una huella final en la superficie de perfil dado por

$$u_z(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^d \arcsen\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) d\tilde{a} = \frac{2}{\pi} \int_0^a \arcsen\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, \quad (\text{A.33})$$

o, teniendo en cuenta la definición (A.24)

$$u_z(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \arcsen\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.34})$$

No obstante, esta expresión es claramente igual a $u_z(a) = d - f(a)$:

$$d - f(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \arcsen\left(\frac{\tilde{a}}{a}\right) \frac{d\mathbf{g}(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.35})$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta la ecuación (A.24) se llega a la igualdad

$$f(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{g(\tilde{a})}{\sqrt{a^2 - \tilde{a}^2}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.36})$$

Esta expresión es la transformada integral de Abel, la cual se puede resolver para $g(a)$ de la forma siguiente¹:

$$g(a) = a \int_0^a \frac{f'(\tilde{a})}{\sqrt{a^2 - \tilde{a}^2}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.37})$$

Con la determinación de la función $g(a)$, el problema de contacto queda completamente resuelto.

Es fácil ver que las ecuaciones (A.37), (A.36), (A.24), (A.28) y (A.31) coinciden exactamente con las del método de reducción de dimensión (capítulo 5, ecuaciones (5.51), (5.52), (5.54), (5.56) y (5.58)), lo que demuestra la validez del MRD.

1. R. Bracewell. *The Fourier Transform and its applications*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York (1965).

APÉNDICE C – EL CONTACTO ADHERENTE CON PERFILES DE SIMETRÍA AXIAL

El método de reducción de dimensión descrito en el apéndice B para resolver los casos de contacto no adherente de cuerpos con simetría rotacional, puede extenderse de forma muy sencilla a casos de contacto adherente. La generalización se basa en el principio fundamental de Johnson, Kendall y Roberts, el cual enuncia que *el contacto con adherencia se deriva del contacto sin adherencia si a este se añade una traslación del cuerpo rígido*. En otras palabras, se puede configurar el contacto adherente si, en primer lugar, se comprimen los cuerpos *sin tener en cuenta su adherencia* hasta que se alcanza un determinado *radio de contacto a* (fig. A.4, izquierda), y seguidamente se alza el cuerpo en una magnitud crítica determinada, Δl_{\max} , preservando en todo momento la zona de contacto (fig. A.4 derecha). Dado que el MRD puede reproducir correctamente tanto la impresión de un perfil de simetría rotacional cualquiera como la traslación de un cuerpo rígido, es también posible reproducir la superposición de ambos.

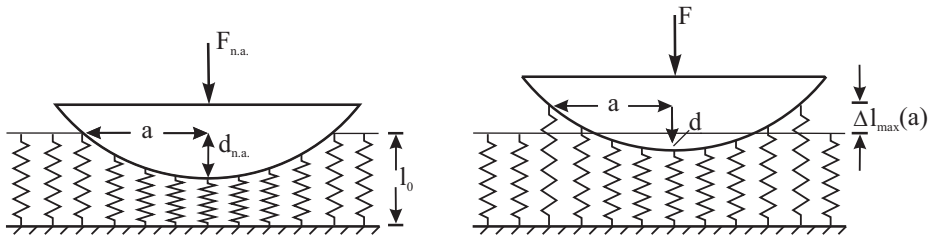


Fig. A.4 Representación cualitativa de la compresión y la tracción de una cimentación elástica mediante un indentador 1D. El modelo reproduce exactamente las características del contacto adherente entre un indentador esférico y un semi-espacio elástico.

La distancia crítica Δl_{\max} , que aún no se conoce, puede determinarse a partir del principio de trabajos virtuales. Según este principio, el sistema se encuentra en equilibrio si su energía no cambia con pequeñas variaciones de sus coordenadas generalizadas. Aplicado al caso del contacto adherente, esto implica que el cambio de la energía elástica asociada a una disminución del radio de contacto de a a $a - \Delta x$, ha de ser igual al cambio en la energía superficial $2\pi a \Delta x \cdot \gamma_{12}$, donde γ_{12} es el trabajo de separación de las superficies en contacto por unidad de área. Dado que el modelo del MRD puede reproducir exactamente la relación entre la fuerza y el desplazamiento, se puede igualmente reproducir de forma exacta la energía elástica. El cambio en la energía elástica puede, por tanto, calcularse directamente con el modelo de MRD. Desprendiendo los dos muelles del borde,

la energía elástica se reduce en la cantidad $2\frac{1}{2}E^*\Delta x\Delta l_{\max}^2$. Igualando el cambio de la energía elástica y el de la energía de adhesión, se obtiene

$$2\pi a\Delta x \cdot \gamma_{12} = E^* \Delta x \Delta l_{\max}^2, \quad (\text{A.38})$$

de lo cual se llega a

$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi a\gamma_{12}}{E^*}}. \quad (\text{A.39})$$

El criterio anteriormente mencionado por el que los muelles del borde se desprenden en el modelo adhesivo del MRD, fue encontrado por M. Heß y se conoce como *regla de Heß*². La aplicación de este proceso a casos concretos de contacto se muestra en el capítulo 6.

2. M. Heß. *Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension*. Cuvillier-Verlag, Göttingen (2011).

APÉNDICE D – EL CONTACTO TANGENCIAL CON PERFILES DE SIMETRÍA AXIAL

La analogía entre el tratamiento del contacto normal y el del contacto tangencial es muy clara. De la misma manera que la indentación en d de un cuerpo cilíndrico y liso de radio a produce una fuerza normal F_N y una distribución de presiones $p(r)$, descritas por las ecuaciones

$$F_N = 2E^*ad, \quad p(r) = \frac{1}{\pi} \frac{E^*d}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (\text{A.40})$$

(véase Apéndice A), un desplazamiento tangencial en la magnitud $u_x^{(0)}$ da lugar a una fuerza tangencial y una distribución de esfuerzos cortantes de la forma

$$F_x = 2G^*au_x^{(0)}, \quad \tau(r) = \frac{1}{\pi} \frac{G^*u_x^{(0)}}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (\text{A.41})$$

Estas expresiones se diferencian de las del contacto normal en tan solo la notación. Se considera a continuación la indentación simultánea de un perfil de simetría axial de la forma $z = f(r)$ en las direcciones normal y tangencial. Para ello, se caracterizan los movimientos resultantes mediante desplazamientos en la dirección normal y tangencial, que se expresan como *funciones del radio de contacto*:

$$d = g(a), \quad u_x^{(0)} = h(a). \quad (\text{A.42})$$

Las fuerzas y los esfuerzos resultantes a partir del primer contacto son, por tanto,

$$F_N = 2E^* \int_0^a \tilde{a} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, \quad p(r) = \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a} \quad (\text{A.43})$$

y

$$F_x = 2G^* \int_0^a \tilde{a} \frac{dh(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, \quad \tau(r) = \frac{G^*}{\pi} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dh(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}. \quad (\text{A.44})$$

Se considera ahora el siguiente procedimiento de dos pasos. En primer lugar y mediante un movimiento normal, el indentador se presiona hasta alcanzar un radio de contacto c . En segundo lugar y hasta alcanzar el radio de contacto a , se indenta de manera que el indentador se mueve *simultáneamente* en las direcciones normal y tangencial y

$$dh = \lambda \cdot dg. \quad (\text{A.45})$$

Tras finalizar el proceso, la fuerza normal y la distribución de presiones vienen dadas, como antes, por las ecuaciones (A.43), mientras que para la fuerza tangencial y la distribución de esfuerzos tangenciales se cumple que

$$F_x = 2G^* \int_c^a \tilde{a} \frac{dh(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a} = 2G^* \lambda \int_c^a \tilde{a} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a} \quad (\text{A.46})$$

y

$$\tau(r) = \begin{cases} \frac{G^*}{\pi} \lambda \int_c^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, & \text{para } r < c \\ \frac{G^*}{\pi} \lambda \int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, & \text{para } c < r < a \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

En la región $c < r < a$, las distribuciones de esfuerzos normales y tangenciales tienen la misma forma:

$$\tau(r) = \lambda \frac{G^*}{E^*} p(r) \quad (\text{A.48})$$

Mediante la siguiente identidad

$$\lambda \frac{G^*}{E^*} = \mu, \quad (\text{A.49})$$

el contacto descrito tiene las siguientes características:

$$\begin{aligned} u_x(r) &= u_x^{(0)} = \text{const}, & \text{para } r < c \\ \tau(r) &= \mu p(r), & \text{para } c < r < a \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Estas condiciones corresponden exactamente a las condiciones de deslizamiento y de no deslizamiento («pegado» o agarre) en un contacto tangencial caracterizado por un coeficiente de fricción μ (véanse las ecuaciones (8.30) y (8.31) en el capítulo 8). Teniendo en cuenta la expresión (A.48), la fuerza dada por (A.46) y la distribución de esfuerzos dada por (A.47), permiten resolver el caso del contacto tangencial:

$$F_x = 2\mu E^* \int_c^a \tilde{a} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, \quad (\text{A.51})$$

$$\tau(r) = \begin{cases} \mu \frac{E^*}{\pi} \left(\int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a} - \int_r^c \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a} \right), & \text{para } r < c \\ \mu \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 - r^2}} \frac{dg(\tilde{a})}{d\tilde{a}} d\tilde{a}, & \text{para } c < r < a \end{cases}$$

o

$$\tau(r) = \begin{cases} \mu(p_a(r) - p_c(r)), & \text{para } r < c \\ \mu p_a(r), & \text{para } c < r < a \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

donde $p_a(r)$ y $p_c(r)$ son las distribuciones de presiones para los radios de contacto a y c , respectivamente. El desplazamiento tangencial del contacto se obtiene integrando la ecuación (A.45), lo cual resulta en

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G} (g(a) - g(c)). \quad (\text{A.53})$$

Es fácil ver que las ecuaciones (A.51) y (A.53) coinciden con las expresiones (8.52) y (8.49) del método de reducción de dimensión, lo cual confirma su validez.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

La lista de títulos que se ofrece a continuación no es de ningún modo completa y sólo pretende ser una guía de consulta o de estudio más avanzado.

CAPÍTULO 1

- D. DOWSON. *History of Tribology*. Longman Group Limited, Londres (1979).
- E. RABINOWICZ. *Friction and Wear of Materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).
- F.P. BOWDEN, D. TABOR. *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford (2001).
- B.N.J. PERSSON. *Sliding Friction. Physical Principles and Applications*. Springer, Berlin-Heidelberg (2002).
- D.F. MOORE. *The Friction and Lubrication of Elastomers*. Pergamon Press, Oxford (1972).
- I.L. SINGER, H.M. POLLOCK (Eds). *Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes*, NATO ASI Series E, Applied Sciences, vol. 220. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1992).
- B.N.J. PERSSON, E. TOSATTI (Eds). *Physics of Sliding Friction*. NATO ASI Series E, Applied Sciences, vol. 311. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).
- G. VOGELPOHL, *Geschichte der Reibung*, VDI-Verlag (1981).
- H CZICHOS, K.H. HABIG. *Tribologie-Handbuch: Reibung und Verschleiß*, 2.^a edición. Vieweg, Wiesbaden (2003).
- K.V. FROLOV (Ed). *Tribología Moderna: Resultados y Perspectivas* (en ruso). Moscú (2008).
- E. POPOVA, V.L. POPOV. «The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction», *Friction* **3**(2), 183-190 (2015).
- E. POPOVA, V.L. POPOV. «On the history of elasto-hydrodynamics: The dramatic destiny of Alexander Mohrenstein-Ertel and his contribution to the theory and practice of lubrication», *ZAMM: J. Appl. Math. Mech.*, 10.1002/zamm.201400050, **95**(7), 652-663 (2015).

CAPÍTULO 2

- E RABINOWICZ. *Friction and wear of materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).

CAPÍTULO 3

- J. ISRAELACHVILI. *Intermolecular and Surface Forces*, 3.^a edición, Academic Press, Amsterdam (2011).
- A.J. KINLOCH. *Adhesion and Adhesives: Science and Technology*. Chapman and Hall, Londres (1987).

- B.V. DERYAGIN, N.A. KROTOVA, V.P. SMILGA. *Adhesion of Solids*. Consultants Bureau, Nueva York (1978).
- K. KENDALL. *Molecular Adhesion and its Applications*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, Nueva York, Boston, Dordrecht, Londres, Moscú (2001).
- I.E. DZYALOSHINSKII, E.M. LIFSHITZ, L.P. PITAEVSKII. «General Theory of van der Waals' Forces», *Sov. Phys. Usp.* **4**, 153-176 (1961).
- D. MAUGIS. *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (2000).

CAPÍTULO 4

- F. M. FOWKES (Ed.). *Contact Angle, Wettability and Adhesion*. Advances in Chemistry Series 43, American Chemical Society (1964).
- D. MAUGIS. *Contact, adhesion, and rupture of elastic solids*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).

CAPÍTULO 5

- H. HERTZ. «Über die Berührung fester elastischer Körper», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1882**(92), 156-171 (1882).
- K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*, 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- L.D. LANDAU, E.M. LIFSCHITZ. *Teoría de la Elasticidad*. (Capítulos 8 y 9). Curso de Física Teórica, vol. 7, 1.^a edición. Editorial Reverté, Barcelona (2009).
- I.N. SNEDDON. «The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Bousinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile», *Int. J. Eng. Sci.* **3**(1), 47-57 (1965).

CAPÍTULO 6

- K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*, 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- B.V. DERYAGIN, N.A. KROTOVA, V.P. SMILGA. *Adhesion of Solids*. Consultants Bureau, Nueva York (1978).
- M.K. CHAUDHURY, T. WEAVER, C.Y. HUI, E.J. KRAMER. «Adhesive Contact of Cylindrical Lens and a Flat Sheet», *J. Appl. Phys.* **80**(1), 30-37 (1996).
- D. MAUGIS. *Contact, adhesion, and rupture of elastic solids*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).

CAPÍTULO 7

- S. HYUN, L. PEI, J.F. MOLINARI, M.O. ROBBINS. «Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces», *Phys. Rev. E* **70**(2): 026117 (2004).
- B.N.J. PERSSON. «Contact mechanics for randomly rough surfaces», *Surface Science Reports*, **61**(4), 201-227 (2006).
- R. HOLM. *Electric Contacts: Theory and Application*, 4.^a edición, Springer, Berlin (1967).
- R. POHRT, V.L. POPOV. «Contact stiffness of randomly rough surfaces», *Sci. Rep.* 10.1038/srep03293, **3**: 3293 (2013).

CAPÍTULO 8

- K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*, 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- J. JAEGER. *New Solutions in Contact Mechanics*. WIT Press (2004).

CAPÍTULO 9

- K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*, 6.^a reimpresión de la 1.^a edición. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- J.J. KALKER. *Three-dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990).
- A. BÖHMER. *Auswirkung des Werkstoffverhaltens auf die rechnerisch ermittelte Belastbarkeit der Schiene*. VDI-Verlag, Düsseldorf (2004).

CAPÍTULO 10

- F.P. BOWDEN, D. TABOR. *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford (2001).
- E. RABINOWICZ. *Friction and Wear of Materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).
- M. KÖHLER. *Beitrag zur Bestimmung des Coulombschen Haftreibungskoeffizienten zwischen zwei metallischen Festkörpern*. Cu villier Verlag, Göttingen (2005).
- F. HESLOT, T. BAUMBERGER, B. PERRIN, B. CAROLI, C. CAROLI. «Creep, stick-slip, and Dry-Friction Dynamics: Experiments and a Heuristic Model», *Phys. Rev. E* **49**(6), 4973-4988 (1994).

CAPÍTULO 11

- E. MEYER, R.M. OVERNEY, K. DRANSFELD, T. GYALOG. *Nanoscience: Friction and Rheology on the Nanometer Scale*. World Scientific, Singapore (1998).
- M.H. MÜSER, M. URBACH, M.O. ROBBINS. «Statistical mechanics of static and low-velocity kinetic friction» en Prigogine I, Rice SA (Eds) *Advances in Chemical Physics Vol. 126*, John Wiley & Sons, Nueva Jersey, 187-272 (2003).
- A.E. FILIPPOV, V.L. POPOV. «Fractal Tomlinson Model for Mesoscopic Friction: From Microscopic Velocity-dependent Damping to Macroscopic Coulomb Friction», *Physical Review E* **75**: 027103 (2007).
- P. REIMANN. «Brownian Motors: Noisy Transport far From Equilibrium». *Physics Reports* **361**(2-4), 57-265 (2002).
- V.L. POPOV. «Nanomachines: Methods of induce a directed motion at nanoscale», *Physical Review E* **68**: 026608 (2003).
- V.L. POPOV, J.A.T. GRAY. «Prandtl-Tomlinson Model: History and Applications in Friction, Plasticity, and Nanotechnologies», *ZAMM: J. Appl. Math. Mech* **92**(9), 683-708 (2012).

CAPÍTULO 12

- K. MAGNUS, K. POPP. *Schwingungen: eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Teubner, Stuttgart (2005).
- N.M. KINKAID, O.M. O'REILLY, P. PAPACLOPOULOS. «Automotive disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration* **267**(1), 105-166 (2003).
- K. WERNER. *Auf Rad und Schiene: Millimeterstrukturen, Weiße Flecken, Riffeln und Risse, Furchen und Grübchen*. Projekte Verlag 188, Halle (2004).
- M. SCHARGOTT, V. POPOV. «Mechanismen von Stick-Slip- und Losbrech-Instabilitäten», *Tribologie und Schmieringstechnik*, no. 5, 9-15 (2004).

CAPÍTULO 13

- H. BLOK. «The Flash Temperature Concept», *Wear*, **6**(6), 483-494 (1963).
- J.C. JAEGER. «Moving Sources of Heat and the Temperature at Sliding Contacts», *J. And Proc. R. Soc. of New South Wales* **76**, 203-224 (1942).

CAPÍTULO 14

- D.F. MOORE. *The Friction and Lubrication of Elastomers*. Pergamon Press, Oxford (1972).
- N. PETROW, O. REYNOLDS, A. SOMMERFELD, A.G.M. MICHELL. *Theorie der hydrodynamischen Schmierung*, 2.^a edición. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften vol. 218. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt (2000).
- G. VOGELPOHL. *Betriebssichere Gleitlager: Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb*. Springer-Verlag, Berlin (1958).
- R. GOHAR. *Elastohydrodynamics*, 2.^a edición. Imperial College Press, Londres (2002).
- M. WISNIEWSKI. *Elastohydrodynamische Schmierung. Grundlagen und Anwendungen*. Handbuch der Tribologie und Schmieringstechnik, vol. 9. Expert Verlag, Renningen-Malmsheim (2000).
- E. POPOVA, V.L. POPOV. «On the history of elastohydrodynamics: The Dramatic Destiny of Alexander Mohrenstein-Ertel and his Contribution to the Theory and Practice of Lubrication», *ZAMM: J. Appl. Math. Mech.*, 10.1002/zamm.201400050, **95**(7), 652-663 (2015).

CAPÍTULO 15

- G. SACCOMANDI, R.W. OGDEN (Eds). *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*. CISM Centre for Mechanical Sciences – Courses and Lectures. Springer, Viena (2004).
- D.F. MOORE. *The Friction and Lubrication of Elastomers*. Pergamon Press, Oxford. (1972).
- A.S. WINEMAN, K.R. RAJAGOPAL. *Mechanical Response of Polymers. An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).

CAPÍTULO 16

- K.A. GROSCH. «The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber», *Proceedings of the Royal Society of London – Series A: Mathematical and Physical Sciences* **274**(1356), 21-39 (1963).
- K.A. GROSCH. «The Rolling Resistance, Wear and Traction Properties of Tread Compounds». *Rubber Chemistry and Technology* **69**(3), 495-568 (1996)..

CAPÍTULO 17

- E. RABINOWICZ. *Friction and Wear of Materials*, 2.^a edición, John Wiley & Sons, Nueva York (1995).
- I. KLEIS, P. KULU. *Solid Particle Erosion*. Springer-Verlag, Londres (2008).
- K.H. ZUM GAHR. *Microstructure and wear of materials*, Elsevier, Amsterdam (1987).
- M. MÜLLER, G.P. OSTERMEYER. «Cellular Automata Method for Macroscopic Surface and Friction Dynamics in Brake Systems», *Tribology International* **40**(6), 942-952 (2007).

CAPÍTULO 18

- J. STARCEVIC. *Tribospectroscopie als neue Methode zur Untersuchung von Reibungsmechanismen: Theoretische Grundlagen und Experiment*. Tesis Doctoral, Universidad Técnica de Berlin (2008).
- J. WALLASCHEK. «Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors», *Smart Materials and Structures* **7**(3), 369-381 (1998).
- T. SASHIDA, T. KENIO. *An Introduction to Ultrasonic Motors*. Oxford Science Publications, Oxford (1994).

CAPÍTULO 19

- P. WRIGGERS. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, Nueva York (2006).
- P. WRIGGERS P, U. NACKENHORST (Eds). *Analysis and Simulation of Contact Problems (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics)*. Springer, Berlin, Heidelberg, Nueva York (2006).
- R. POHRT, Q. LI. «Complete Boundary Element Formulation for Normal and Tangential Contact Problems», *Physical Mesomechanics* **17**(4), 334-340 (2014).
- R. POHRT, V.L. POPOV. «Adhesive Contact Simulation of Elastic Solids using Local Mesh-dependent Detachment Criterion in Boundary Elements Method», *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* **13**(1), 3-10 (2015).

CAPÍTULO 20

- C.H. SCHOLZ. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- C.H. SCHOLZ. «Earthquakes and Friction Laws», *Nature* **391**(6662), 37-42 (1998).

-
- J.H. DIETERICH. «Earthquake Nucleation and Faults with Rate and State-dependent Strength», *Tectonophysics* **211**(1-4), 115-134 (1992).
- M.D. TRIFUNAC, A.G. BRADY. «On the Correlation of Seismic Intensity Scales with the Peaks of Recorded Strong Ground Motion», *Bull. Seism. Soc. Am.* **65**(1), 139-162 (1975).
- Y. BEN-ZION. «Collective Behavior of Earthquakes and Faults: Continuum-discrete Transitions, Progressive Evolutionary Changes, and Different Dynamic Regimes», *Rev. Geophys.* **46**(4): RG4006, 1-70 (2008).
- B. GRZEMBA. *Predictability of Elementary Models for Earthquake Dynamics*, epubli GmbH, Berlin (2014).

ÍNDICE DE IMÁGENES

Capítulo 1 (Introducción): Transporte de un coloso egipcio: detalle de la tumba de Tehuti-Hetep, El-Bersheh (aprox. 1880 A.C.).....	21
Capítulo 2: Cojinete de un puente en Berlin Spandau (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin)	29
Capítulo 3: Gecko en una pared de piedra (Zhengdong Dai, Institute for Bio-inspired Structure and Surface Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics).....	47
Capítulo 4: Gotas de agua en una planta de jardín (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	63
Capítulo 5: Distribución de esfuerzos en un contacto entre una placa fotoelástica y un cilindro (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin) .	79
Capítulo 6: Contacto adherente entre un objeto de gelatina y un cilindro de acero (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	105
Capítulo 7: Distribución de esfuerzos de tracción en un contacto entre una placa fotoelástica y una superficie rugosa (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	119
Capítulo 8: Zonas deslizantes y desgaste anular (<i>Fretting</i>) en un contacto entre una placa y una esfera bajo cargas aplicadas a distintos ángulos con respecto a la normal (reproducción con permiso de K.L. Johnson y de la editorial Cambridge University Press).....	139
Capítulo 9: Contacto rueda-raíl (J. Starcevic, Institut für Mechanik, TU Berlin)	161
Capítulo 10: Tribómetro de varilla sobre disco en el Instituto de Mecánica de la Universidad Técnica de Berlín (J. Thaten, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	175
Capítulo 11: Esquema de una punta de un microscopio de fuerza atómica sobre una superficie « atómicamente» lisa.....	199
Capítulo 12: Un modo característico de vibración en un freno de disco medido con un vibrómetro láser (U. von Wagner, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	219

Capítulo 13: Termografía de un neumático rodante bajo distintos ángulos de deslizamiento (F. Böhm: SFB 181 Contacto en rodadura de alta frecuencia en neumáticos, Informe de investigación, segundo semestre 1988-1. Semestre 1991, TU Berlin, págs A1-68).....	245
Capítulo 14: Corriente de arrastre sobre una superficie ondulada – líneas de corriente experimentales y comparación con resultados de cálculo numérico – (reproducción con permiso de M. Scholle, Universidad de Bayreuth). Fuente: Tesis de Habilitación de M. Scholle y M. Scholle, A. Wierschem, N. Aksel, «Creeping films with vortices over strongly undulated bottoms», <i>Acta Mech.</i> 168 , 167-193, (2004))...	253
Capítulo 15: Goma (Borrador) (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	285
Capítulo 16: Neumático de caucho (V. Popov, Institut für Mechanik, TU Berlin)	315
Capítulo 17: Aspecto típico del desgaste abrasivo y adhesivo. Izquierda: desgaste abrasivo de hierro frente a aluminio. Derecha: gripado por adherencia, acero C45 templado. (Fuente: Sra. Binkowski, Bundesanstalt für Materialforschung und –prüfung, Berlin, por mediación del Dr. H. Klob).....	333
Capítulo 18: Probeta en un triboespectrómetro en el Instituto de Mecánica de la Universidad Técnica de Berlin (J. Starcevic, Institut für Mechanik, TU Berlin).....	351
Capítulo 19: Ventana de la interfase de usuario de un software para el cálculo de las propiedades de contacto y fricción entre dos superficies rugosas (FaCom – Fast Computation of rough surfaces, V. Popov, T. Geike, S. Korostelev, A. Dimaki, Institut für Mechanik, TU Berlin)	371
Capítulo 20: West Marin, 1906. Las fisuras en el valle de Olema fueron provocadas por el terremoto de San Francisco de 1906. Fotografía de G.K. Gilbert. (Cortesía de Anne T. Kent California Room, Marin County Free Library)	381

ÍNDICE DE TÉRMINOS

A

- Abradabilidad 344
- Aceite lubricante 266
- Adherencia
 - superficies rugosas 133
 - superficies curvas 52
 - superficies lisas 53
- Amontons 24
- Amortiguamiento
 - crítico 225
 - negativo 221, 224
- Ángulo de contacto 64
 - histéresis 67
- Ángulo de inclinación crítico 155, 177, 178
- Aproximación de semi-espacio 52, 81
- Archard 26, 27, 340
- Autobloqueo 188

B

- Barquins 325
- Bifurcaciones 211, 213
- Blok 246
- Bowden 26, 245
- Bradley 52
- Bronces 187
- Bush 26

C

- Carter 25, 161, 165
- Catástrofes 213
- Cattaneo 158
- Cimentación Winkler 149, 327
- Coefficiente de adherencia 137
- Coefficiente de desgaste
 - abrasivo 335
 - adhesivo 340
- Coefficiente de fricción 23, 185
 - dependencia con el tiempo de contacto 178

- dependencia con la fuerza normal 180
- dependencia con la rugosidad 182
- dependencia con la temperatura 187
- dependencia con la velocidad 181
- dinámica o cinética 177
- en un contacto lubricado 275
- estática 176
- interno 398
- Coefficiente de fricción de
 - acero al manganeso 361
 - acero mejorado 188
 - acero templado 361
 - aluminio 188, 361
 - cobre 188, 361
 - goma 361
 - latón 361
 - pastilla de freno 361
 - teflón 361
 - titanio 361
 - vidrio 361
 - X5CrNi18-30 188
- Coefficiente de Poisson 31
- Coefficiente de resistencia a rodadura 327
- Coefficiente de restitución 307
- Coefficiente de rozamiento
 - dinámico o cinético 177
 - estático 176, 184
- Cojinete de Mohrenstein 277
- Cojinete de Rayleigh 276
- Comportamiento del material
 - Modelo estándar 313
- Condición de deslizamiento inminente 167
- Contacto
 - Rigidez 131
 - tangencial 139
- Contacto adherente 414
 - en cuerpos con simetría rotacional 111
 - indentador cilíndrico 113
 - perfil cónico 116

- Contacto normal 29
- barra longitudinal 33
 - capa cilíndrica fina 36
 - casquete esférico 34
 - cilindro 40
 - con un medio viscoelástico 310
 - cono 40, 88
 - desacoplamiento del contacto tangencial 149
 - en cuerpos con simetría axial 91
 - esfera 38, 83
 - indentador cilíndrico 37, 81
 - película delgada 34
 - perfil dado por una función potencia 99
 - perfil parabólico truncado 102
- Contacto normal
- cono 99
- Contacto rodante 161, 165
- Contacto tangencial
- con deslizamiento 145
 - con un cilindro redondeado 156
 - sin deslizamiento 143
- Contacto tangencial
- perfil con simetría axial 149
- Contactos eléctricos 127
- Coulomb 24, 176
- Criterio de rotura de (Mohr-)Coulomb 398
- Curva de Stribeck 259
- Curva maestra 301
- Curvas maestras 299, 320
- D**
- d'Alembert 225
- da Vinci, Leonardo 23, 175
- Deformación
- elástica 30
 - plástica 126
 - uniaxial 34
- densidad de energía de deformación 31
- Dependencia con la escala de medida 126
- Derjagin 27
- Desgaste 333
- abrasivo 334
 - adhesivo 337
 - de dos cuerpos 335
 - de tres cuerpos 335
 - en elastómeros 343
 - erosivo 346
 - oscilatorio 347
 - patrón tabla de lavar 249, 250
- Desgaste erosivo
- forma final 347
- Deslizamiento por torsión 174
- Deslizamiento trasversal 171, 172
- Dieterich 26, 386
- Difusividad térmica 247
- Distribución de presiones
- hertziana 82
 - indentador cilíndrico 81
 - indentador cónico 88
 - perfil dado por una función potencia 101
- Dupuit 25
- Dureza 32, 127, 185
- Dzyaloshinskii 57
- E**
- Ecuación de desgaste
- abrasivo 335
 - adhesivo 340
- Ecuación de Navier-Stokes 254
- Ecuación de Reynolds 256, 267
- Elasticidad entrópica 286
- Elasto-hidrodinámica 266
- Elastómeros 285
- contacto adherente 324
 - propiedades viscoelásticas 285
- Elemento de Kelvin 312
- Energía de activación 264
- Energía de superficie 50, 64
- efectiva 56
 - relativa 58
- Energía superficial
- relativa 108
- Equivalencia elástica 149
- Ertel 266
- Escala sismológica de magnitud de momento 383

Esfuerzo de fluencia 31, 32

Estabilidad

- dinámica 389

Euler 24

F

Fallas

- aceleración de la superficie 403, 404

- criterio de estabilidad para 390

- divergentes 400

- estructura de 396

- inversas 400

- normales 400

- transcurrentes 400

Fluido

- newtoniano 254

- no newtoniano 263

Flujo de Stokes 254

Formulación nodo a superficie 373

Formulación superficie a superficie 373

Fretting 148, 347

Fricción

- de Coulomb 175

- dinámica 176

- estática 176

- mixta 265

- seca 175

Fricción de la goma 315

- contribución a distintas escalas 326

- dependencia con la temperatura 320

- dependencia con la velocidad 318

Fricción dinámica

- efecto de los ultrasonidos 352

Fricción mixta 259

Fuerza de adherencia 109, 113

Fuerza de rozamiento 67

- dependencia con el estado del sistema 232

- dependencia con la velocidad 222

- dependiente del estado 389

- dinámica 232

- dinámico o cinético 176

- efecto de los ultrasonidos 351

- estática 232

- estático 176

Fuerzas capilares 69

Fuerzas de adherencia 47

Fuerzas de van der Waals 48

Función de desplazamiento 299

Función de Williams-Landel-Ferry 325

Función memoria 288

Función WLF 299

G

Giro 174

Goma

- efecto de la temperatura en la reología 298

- modelo estándar 296

Goodyear 286

Grado de deslizamiento 163

Grafito 270

Grasa lubricante 266

Greenwood 26, 119

Grosch 27, 315

H

Habitación insonorizada 227

Hardy 25, 266

Hertz, Heinrich 27, 96

Hidrófilo 65, 69

Hidrófobo 65, 69

Holm 340

Hooke 25

I

Índice de plasticidad 126

Índice de presión 265

Inestabilidad

- del rozamiento 220

- dinámica 220, 234

- elástica 206, 217

J

Jabón metálico 266

Jaeger 246

Johnson 27

K

Kendall 27
Khrushchov 27, 337

L

Ley de Gutenberg-Richter 384
Ley de rozamiento
- de Coulomb 149
- dependiente del estado 386
Leyes de Omori 396
Lifschitz 57
Límite de percolación 132
Longitud de contacto 128
Lubricación
- con cavitación 273
- de capa límite 265
- hidrodinámica 255
Lubricantes
- Reología de 263
- sólidos 270

M

Marone 388
Materiales de cojinetes 187
Materiales multifásicos 187
Maugis 325
Medio viscoelástico 305
Medios granulares 396
Método de autómatas celulares 378
Método de elementos de contorno 374,
375
- contacto adhesivo 377
- contacto normal 374
- contacto tangencial 375
Método de elementos finitos 373
Método de reducción de dimensión 91,
111, 149, 305
- contacto adherente 414
- contacto tangencial 149
Método Euleriano-Lagrangiano arbitrario
373
Métodos de simulación numérica 371
Mindlin 158
Modelo estándar 313

Modelo Prandtl-Tomlinson 199, 201, 357
Modelo Tomlinson 199
Modelos reológicos 294
Módulo de almacenamiento 289, 293
Módulo de cizalla
- complejo 289, 291, 293
- estático 287
- función de la frecuencia 289
- función del tiempo 287
Módulo de pérdida 289, 292
Módulo vítreo 287
Mojabilidad 65
Molibdenita 270
Momento sísmico 383
Morin 25
MoS₂ 270
Motores eléctricos 351
Movimiento *stick-slip* 219, 238, 241
MRD 91, 111, 149, 305, 347
Müller 27

N

Nanoactuadores 210
Nanomáquinas 210
Neumático 44, 46
Número de Pécelet 246, 247

O

Obreimov 115
Ondas de Schallamach 344

P

Perfil
- cilíndrico 310
- cónico 116, 310, 312
- de cantos redondeados 156
- paraboloide de revolución 310
Persson 26
Petrov 25
Pitaevskii 57
Plomo 270
Post-deslizamiento 395
Potencial de Lennard-Jones 48
Premonitores 396

Profundidad de indentación 33
 Proteínas motoras 210

R

Rabinowicz 27
 Radio de curvatura
 - gaussiano 86
 - negativo 85
 Radios principales de curvatura 68, 85, 96
 Radok 306
 Regla de Heß 112, 415
 Relaciones de Kramers-Kronig 291
 Reología de
 - la goma 285
 - lubricantes 263
 Réplicas 396
 Reptación o *creep* térmica 193
 Resistencia al desgaste 336
 Resistencia de constricción 128
 Reynolds 25, 161
 Riedler 246
 Rigidez 38
 Rigidez a cortadura 144
 Roberts 27
 Rozamiento
 - de bajo desgaste 340
 - de capa límite 266
 - de una cuerda 190
 - en rocas 385
 Rugosidad 119, 121
 Ruido por rozamiento 220, 227
 - supresión activa 228
 - supresión pasiva 225
 Ruina 232, 386

S

Sellantes 131
 Semi-espacio elástico 37
 Serie de Prony 301
 Sistemas de varios cuerpos 372
 Soldadura por fricción 360
Sprag-slip 219, 236, 237
 Stribeck 25

Superficie
 - mojada 65
 - repelente 65
 - rugosa 119

T

Tabor 26, 27, 246
 Tectónica 381
 Temperatura de transición vítrea 299
 Temperatura *flash* 246
 Tensión superficial 50
 Tensor efectivo de esfuerzos 397
 Teorema de reciprocidad de Betti 46
 Teoría del contacto
 - de Greenwood y Williamson 119
 - hertziano 83
 Teoría JKR 27, 106
 Terremotos
 - formulación de la escala 383
 - magnitud de momento sísmico 383
 - nucleación 392
 - post-deslizamiento 392
 - predicción de 400
 - reptación acelerada 394
 Tiempo de relajación 296, 312
 Toporov 27
 Torsión 142
 Transformación MRD
 - desplazamiento 94
 - presión 94
 Transformación MRD 92
 Transformación MRD inversa 92
 Transmisión por polea y correa 172
 Tribología 23
 Trinquete 210

U

Ultrasonidos 351

V

Variable de estado 386
 - ecuación cinética 389
 Variables de estado internas 232

Velocidad de deslizamiento 161
Volumen de activación 264
Vulcanización 286

W

Wallaschek 355, 356
Wenzel 71
Williamson 26, 119

Principios y aplicaciones de la mecánica de contacto en tribología, fricción y adherencia

Este libro actualizado hasta 2019 sobre la mecánica del contacto es multidisciplinar y constituye una herramienta muy útil para los ingenieros, los físicos, geólogos y los investigadores en el campo de los materiales y los adhesivos. La existencia de una obra en castellano sobre esta temática constituye una novedad que abre el campo de trabajo de los hispano-hablantes a una disciplina raramente tratada en las obras actuales en castellano.

Este volumen constituye un excelente compendio de aspectos teóricos y aplicados, ilustrados con problemas resueltos, por lo que podría ser utilizado como un libro de texto riguroso para los estudiantes de las facultades de ingeniería, física y geología. No obstante, el libro resulta útil también para los investigadores y profesionales que se ocupan de los múltiples aspectos del rozamiento y la fricción en campos tan diversos como la ingeniería mecánica, la predicción de terremotos, la adherencia y la física de las superficies.

 PUBLICACIONES
UNIVERSITAT D'ALACANT



<https://publicaciones.ua.es>